第 1 章

多元函数微分学及其应用

Differential Calculus of Multivariable Functions and its Applications

在前面我们研究的函数都是一元函数,其因变量的值仅受一个自变量的影响.但许多实际问题中往往牵涉多方面的因素,反映到数学上就是因变量的值依赖于多个自变量的情形,这就产生了多元函数的概念.多元函数微分学是一元函数微分学的推广与发展,它们的理论体系相似.本章将在一元函数微分学的基础上,进一步研究多元函数的极限、偏导数、全微分、极值、最值及其应用等相关知识.讨论中将以二元函数为主要研究对象,这不仅因为二元函数比其他的多元函数更直观,而且有关的概念和方法大都能自然推广到二元以上的多元函数.在学习中要善于总结多元函数微分学与一元函数微分学在理论和方法上的共性,找出差异,以便弄懂、理解和掌握多元函数微分学的理论与方法.

在研究多元函数之前,先介绍一些空间解析几何的知识.

1.1 空间解析几何简介

1.1.1 空间直角坐标系

在平面解析几何中,为了确定平面上任意一点的位置,建立了平面直角坐标系,将平面上的点与二元有序数组(x,y)建立了一一对应关系.为了确定空间任意一点的位置,需要建立空间直角坐标系,将空间中的点与三元有序数组(x,y,z)形成一一对应关系,这样,就可以用代数的方法研究几何问题.

过空间一定点O,作三条相互垂直的数轴,再规定一个单位长度,这三条数轴依次称为x轴(横轴),y轴(纵轴)和z轴(竖轴),并统称为**坐标轴**,点O称为**坐标原点**.各轴正向之间的顺序通常按如下的**右手法则**确定:以右手握住z轴,当右手4个手指从x轴正向以$\frac{\pi}{2}$的角度转向y轴正向时,大拇指的指向就是z轴的正向(参见图1-1),这样的坐标系称为**右手坐标系**,否则称为左手坐标系,一般习惯上都采用右手坐标系,这样就建立了**空**

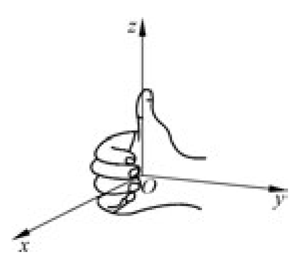

图 1-1 右手坐标系

间直角坐标系.

每两条坐标轴确定一个平面,如 x 轴和 y 轴确定 xOy 面.类似地,y 轴和 z 轴确定 yOz 面,z 轴和 x 轴确定 zOx 面,这三个面统称为**坐标面**.三个坐标面把空间分成 8 个部分,每个部分称为一个卦限,共 8 个卦限,其中 $x>0,y>0,z>0$ 部分为第Ⅰ卦限,第Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ卦限在 xOy 平面的上方并按逆时针方向来确定;在第Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ卦限下面的卦限依次称为第Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ卦限(参见图 1-2).取定了空间直角坐标系后,就可以建立起空间中的点与数组之间的对应关系.

设 M 为空间中的任意一点,过点 M 分别作垂直于三条坐标轴的平面,它们与三条坐标轴分别相交于 P,Q,R 三点,这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x,y,z,这样任意点 M 唯一地确定了一个三元有序数组(x,y,z).反之,对任意的一个三元有序数组(x,y,z),可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P,在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q,在 z 轴上取坐标为 z 的点 R,然后过点 P,Q,R 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面,这三个平面相交于一点 M,则由任意的一个三元有序数组(x,y,z)唯一地确定了空间中的一点 M.于是,空间中的任意一点 M 与三元有序数组(x,y,z)之间就建立起一一对应关系(参见图 1-3),称有序数组(x,y,z)为点 M 的**坐标**,记为 $M(x,y,z)$,并依次称 x,y,z 为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**.

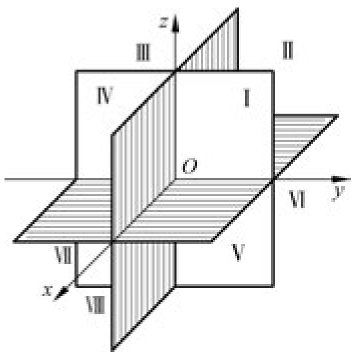

图 1-2　坐标面及卦限

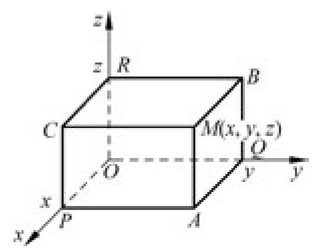

图 1-3　空间中的点及其坐标

显然,坐标原点 O 的坐标为$(0,0,0)$,x 轴上的点的纵坐标和竖坐标均为 0,因而可表示为$(x,0,0)$;类似地,y 轴上的点的坐标为$(0,y,0)$;z 轴上的点的坐标为$(0,0,z)$.xOy 面上的点的坐标可表示为$(x,y,0)$;yOz 面上的点的坐标可表示为$(0,y,z)$;zOx 面上的点的坐标可表示为$(x,0,z)$.

设点 $M(x,y,z)$为空间直角坐标系中的一点,则点 M 关于坐标面 xOy 的对称点为 $M_1(x,y,-z)$,关于 z 轴的对称点为 $M_2(-x,-y,z)$,关于原点的对称点为 $M_3(-x,-y,-z)$.

1.1.2　空间任意两点间的距离公式

给定空间中的任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,下面来求它们之间的距离 $|M_1M_2|$.过这两个点分别作垂直于三个坐标轴的平面,这 6 个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(参见图 1-4).因为

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2&=|M_1Q|^2+|QM_2|^2=|M_1P|^2+|PQ|^2+|QM_2|^2\\&=|M_1'P'|^2+|P'M_2'|^2+|QM_2|^2\\&=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,\end{aligned}$$

所以

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

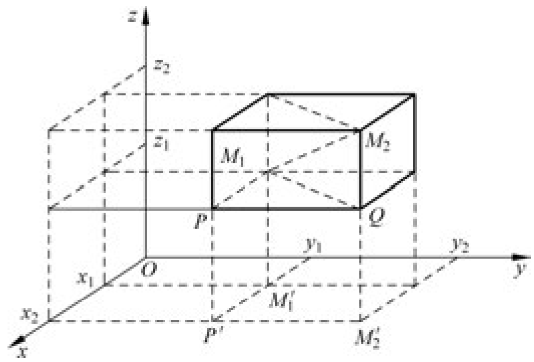

图 1-4　空间两点间的距离图示

例 1　证明：以 $A(4,3,1)$，$B(7,1,2)$，$C(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是等腰三角形.

解　根据两点间距离公式有

$$|AB|=\sqrt{(4-7)^2+(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{14},$$

$$|AC|=\sqrt{(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{6},$$

$$|BC|=\sqrt{(7-5)^2+(1-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{6},$$

显然有 $|AC|=|BC|$，故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

1.1.3　空间曲面与方程

在平面解析几何中，我们把平面曲线看成是动点的运动轨迹.类似地，在空间解析几何中，我们把曲面看作空间中点的运动轨迹，并且将点的特征性质，用点的坐标 x、y 与 z 之间的关系式来表达，即一般用方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{1-1}$$

或

$$z=f(x,y) \tag{1-2}$$

来表达；反过来，每个形如式(1-1)或式(1-2)的方程通常表示空间中的一个曲面.即曲面 S 与三元方程(1-1)或方程(1-2)之间如果存在如下关系：

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程(1-1)或方程(1-2)；

(2) 满足方程(1-1)或方程(1-2)的点都在曲面 S 上.

则称方程(1-1)或方程(1-2)为曲面 S 的方程，而曲面 S 就称为方程(1-1)或方程(1-2)的图形(参见图 1-5).

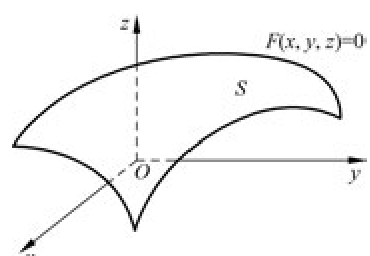

图 1-5　空间曲面图示

我们把三元二次方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面称为二次曲面，把平面称为一次曲面.

下面我们在空间直角坐标系下，建立几个常见曲面的方程.

1. 平面

例 2 设有两点 $M_1(-1,2,0)$ 和点 $M_2(2,-1,3)$，求线段 M_1M_2 的垂直平分面的方程.

解 据题意知，所求平面为与 M_1 和 M_2 等距离的点的轨迹，设 $M(x,y,z)$ 是所求平面上的任一点，则 $|MM_1|=|MM_2|$，即

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z-0)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2},$$

化简得

$$2x-2y+2z-3=0.$$

例 3 求三个坐标面的方程.

解 在 xOy 平面上任意一点的坐标必有 $z=0$，满足 $z=0$ 的点也必然在 xOy 平面上，所以坐标面 xOy 的方程为 $z=0$.

同理，坐标面 yOz 与 zOx 的方程分别为 $x=0$ 与 $y=0$.

例 4 画出 $y=3$ 的图形.

解 方程 $y=3$ 中不含 x 和 z，这意味着 x 与 z 可取任意值，且总有 $y=3$，所以其图形是过点 $(0,3,0)$ 且垂直于 y 轴的平面(参见图 1-6).

前面三个例子所讨论的方程都是三元一次方程，对应的图形都是平面，可以证明任意平面的方程都是三元一次方程，即平面方程的一般形式为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中 A,B,C,D 均为常数，且 A,B,C 不全为 0.

例 5 求与 x 轴、y 轴、z 轴分别交于 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$ 三点的平面方程(参见图 1-7)，其中 $a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0$.

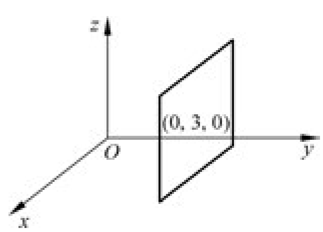

图 1-6 垂直于 y 轴的平面

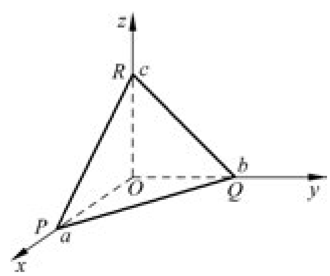

图 1-7 平面的截距式方程中截距的几何含义

解 设所求平面的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，将这三点坐标代入到平面方程中，得

$$aA+D=0,\quad bB+D=0,\quad cC+D=0,$$

解得

$$A=-\frac{D}{a},\quad B=-\frac{D}{b},\quad C=-\frac{D}{c},$$

再代回原平面方程中，得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{1-3}$$

方程(1-3)称为平面的**截距式方程**，其中 a,b,c 分别称为平面在 x 轴、y 轴和 z 轴上的截距.

2. 柱面

定义 1　平行于定直线 l 沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的轨迹称为**柱面**. 定曲线 C 称为柱面的**准线**,动直线 L 称为柱面的**母线**(参见图 1-8).

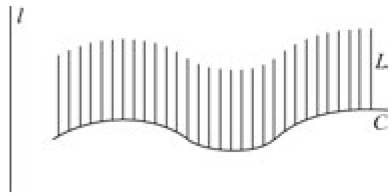

图 1-8　柱面准线及母线

一般地,在空间直角坐标系中,方程 $F(x,y)=0$ 表示以 xOy 坐标面上的曲线 $F(x,y)=0$ 为准线,母线平行于 z 轴的柱面；类似地,方程 $G(x,z)=0$ 在空间直角坐标系中表示以 zOx 坐标面上的曲线 $G(x,z)=0$ 为准线,母线平行于 y 轴的柱面；方程 $H(y,z)=0$ 在空间直角坐标系中表示以 yOz 坐标面上的曲线 $H(y,z)=0$ 为准线,母线平行于 x 轴的柱面.

几种常用的柱面：

(1) 圆柱面：$x^2+y^2=R^2$. 它表示以 xOy 坐标面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 为准线,母线平行于 z 轴的圆柱面(参见图 1-9(a)).

(2) 抛物柱面：$y^2=2x$. 它表示以 xOy 坐标面上的抛物线 $y^2=2x$ 为准线,母线平行于 z 轴的抛物柱面(参见图 1-9(b)).

(3) 椭圆柱面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$. 它表示以 xOz 坐标面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ 为准线,母线平行于 y 轴的椭圆柱面(参见图 1-9(c)).

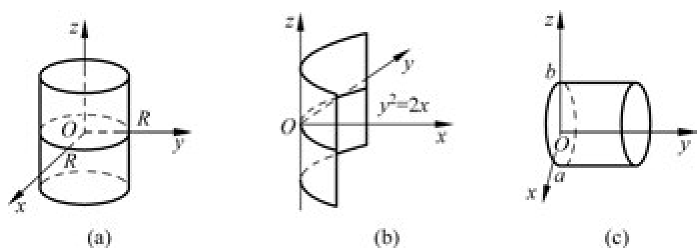

图 1-9　几种柱面的图示

下面讨论一些常见的含 x,y,z 的二次方程表示的曲面,即二次曲面.

3. 二次曲面

三元二次方程

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+b_1xy+b_2xz+b_3yz+c_1x+c_2y+c_3z=d$$

所表示的空间曲面,称为二次曲面. 其中 $a_i,b_i,c_i(i=1,2,3)$ 和 d 均为常数. 相应地,三元一次方程表示的平面,也称一次曲面.

三元二次方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面图形的大致形状,可采用“截痕法”讨论. 即用坐标面或与坐标面平行的平面与曲面相交,通过分析交线(称为截痕)的形状,综合各种情

形,确定出曲面的大致形状.

例6 用截痕法作椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c>0) \tag{1-4}$$

的图形.

解 由方程(1-4)易知,$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1$,$\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$,$\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$,进而有

$$|x|\leqslant a, \quad |y|\leqslant b, \quad |z|\leqslant c.$$

以平行于 xOy 坐标面的平面 $z=z_0$($|z_0|\leqslant c$)截曲面,得到截线方程为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z_0^2}{c^2},\\ z=z_0.\end{cases}$$

当 $|z_0|<c$ 时,截线是平面 $z=z_0$ 上的一个椭圆,当 $|z_0|=c$ 时,截线退化成一点 $(0,0,c)$.

以平行于 xOz 坐标面的平面 $y=y_0$($|y_0|\leqslant b$)截曲面,得到截线方程为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y_0^2}{b^2},\\ y=y_0.\end{cases}$$

当 $|y_0|<b$ 时,截线是平面 $y=y_0$ 上的一个椭圆,当 $|y_0|=b$ 时,截线退化成一点 $(0,b,0)$.

同理,用平面 $x=x_0$($|x_0|\leqslant a$)截椭球面所截得的截线与上述情况相类似.

综上所述,可得到椭球面的图形如图1-10所示.

当 $a=b=c$ 时,方程变为

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

它表示一个球心在原点,半径为 a 的球面.

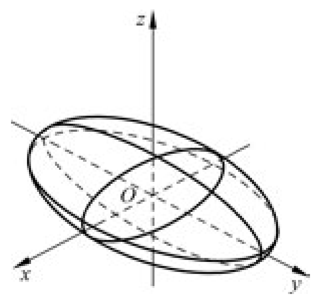

图1-10 椭球面

用截痕法可以类似地作出其他二次曲面的图形.

常见的二次曲面有:

(1) 球面 $x^2+y^2+z^2=R^2 \quad (R>0)$;

(2) 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c>0)$;

(3) 单叶双曲面(参见图1-11(a)) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c>0)$;

(4) 双叶双曲面(参见图1-11(b)) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a,b,c>0)$;

(5) 椭圆抛物面(参见图1-11(c)) $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p,q>0)$;

(6) 双曲抛物面(马鞍面)(参见图1-11(d)) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=-2z \quad (p,q>0)$;

(7) 二次锥面(参见图1-11(e)) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (a,b,c>0)$.

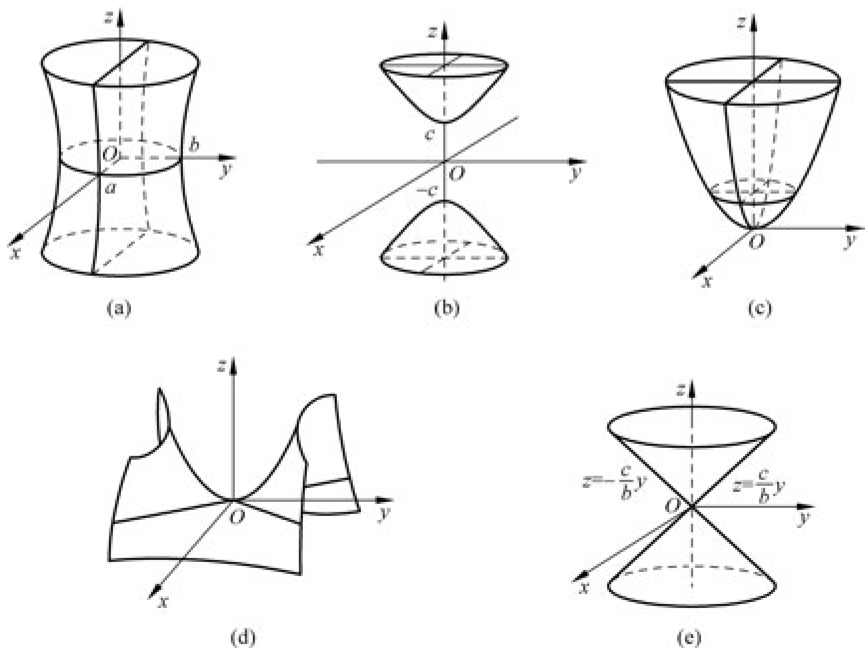

图 1-11　几种二次曲面的图示

习题 1.1

二维码 1.1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点的卦限：

(1) $(1,-5,3)$；　(2) $(2,4,-1)$；　(3) $(1,-5,-6)$；　(4) $(-1,-2,1)$.

2. 求点 $M(3,-2,1)$ 关于各坐标面及坐标原点的对称点.

3. 根据下列条件求点 B 的未知坐标：

(1) $A(4,-7,1)$，$B(6,2,z)$，$|AB|=11$；(2) $A(2,3,4)$，$B(x,-2,4)$，$|AB|=5$.

4. 在 z 轴上，求与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

5. 试证以点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

6. 指出下列方程在平面解析几何中和空间解析几何中分别表示什么图形：

(1) $x=2$；　(2) $y=x+1$；　(3) $x^2+y^2=4$.

提高题

1. 求点 $M(4,-3,5)$ 与原点及各坐标轴之间的距离.

2. 求点 $M(a,b,c)$ 分别关于各坐标面、坐标轴、坐标原点的对称点的坐标.

3. 动点 $M(x,y,z)$ 到 xOy 平面的距离与其到点 $(1,-1,2)$ 的距离相等，求点 M 的轨迹方程.

4. 画出由平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ 在第 Ⅰ 卦限所围成的空间区域的简图.

1.2 多元函数的基本概念

在许多实际问题中，经常需要研究多个变量相互作用的关系，即因变量与几个自变量之间的关系. 例如儿童的身高(因变量)受年龄(自变量)、遗传因素(自变量)、生活质量(自变量)等多方面的影响，这样的例子不胜枚举. 为了更好地研究这类问题，引入了多元函数的概念. 我们把具有两个自变量的函数称为二元函数，具有 n 个自变量的函数称为 n 元函数，而二元和二元以上的函数称为多元函数. 我们着重讨论二元函数，二元以上的多元函数的概念及性质等都可由二元函数类推得到. 本节将介绍二元函数、极限和连续性等相关概念和性质.

1.2.1 平面区域的概念

1. 邻域

定义 1 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数，与点 P_0 距离小于 δ 的点 $P(x, y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ **邻域**(neighbourhood)(参见图 1-12)，记为 $U(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在几何上，点 P_0 的 δ 邻域就是 xOy 平面上以点 P_0 为中心，$\delta>0$ 为半径的圆内部的点 $P(x, y)$ 的全体.

不包含点 P_0 本身的 δ 邻域，称为点 P_0 的去心 δ 邻域，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|P_0P|<\delta\}.$$

如果不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示 P_0 的某个邻域，用 $\mathring{U}(P_0)$ 表示 P_0 的去心邻域.

下面利用邻域来描述点和点集之间的关系.

2. 区域

平面上的任意一点 P 与任意一个点集 E 之间必存在以下三种关系之一(参见图 1-13)：

(1) 存在点 P 的某一邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的**内点**(interior point)；

(2) 存在点 P 的某一邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P 为 E 的**外点**(exterior point)；

(3) 点 P 的任意邻域内既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的**边界点**(boundary point). 点集 E 的边界点的全体称为 E 的**边界**，记作 ∂E.

E 的内点必属于 E，E 的外点必定不属于 E，而 E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E.

任意一点 P 与一个点集 E 之间除了上述的 3 种关系之外，还有另外一种关系——聚点.

如果对于任意给定的 $\delta>0$，点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有 E 中的点，则称 P 是 E 的**聚点**(accumulation point).

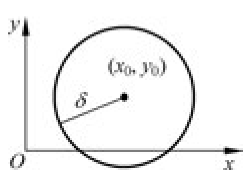

图 1-12 δ 邻域

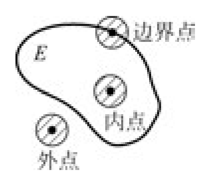

图 1-13 内点、外点、边界点

由聚点的定义可知,点集 E 的聚点 P 本身可以属于 E,也可以不属于 E.

根据点集中所属点的特征,下面再来定义一些重要的平面点集.

开集(open set):若点集 E 的点都是内点,则称 E 为开集.

闭集(closed set):如果点集 E 的边界 $\partial E \subset E$,则称 E 为闭集.

连通集:如果 E 中任意两点均可用属于 E 中的折线连结起来,则称 E 是连通的(参见图 1-14).

区域:连通的开集称为开区域,简称区域(region).

闭区域:开区域连同它的边界一起称为闭区域.

例如,$\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$ 为开区域(参见图 1-15(a));$\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$ 为闭区域(参见图 1-15(b)).

有界区域:对于平面区域 D,如果存在一个以 R 为半径的圆完全包含区域 D,则称平面区域 D 为**有界区域**. 否则,D 称为**无界区域**.

例如,$\{(x,y) \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$ 是有界闭区域;$\{(x,y) \mid x+y>0\}$ 是无界开区域.

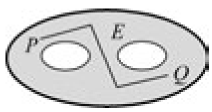

图 1-14　连通集

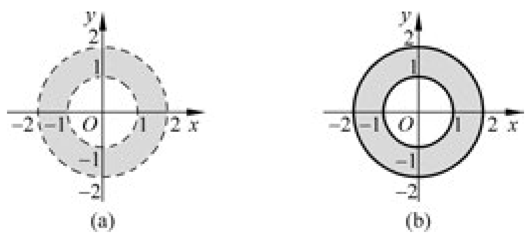

图 1-15　开区域、闭区域

3. n 维空间

我们知道,数轴上的点与实数之间是一一对应的,将实数的全体记为 $\mathbf{R}$;平面上的点与二元有序数组 (x,y) 之间是一一对应的,将二元有序数组 (x,y) 的全体记为 $\mathbf{R}^2$;空间中的点与三元有序数组 (x,y,z) 之间是一一对应的,将三元有序数组 (x,y,z) 的全体记为 $\mathbf{R}^3$. 这样 $\mathbf{R}$,$\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 就分别对应实数轴、平面和空间.

一般地,设 n 为取定的一个自然数,我们将 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体记为 $\mathbf{R}^n$,并称为 n 维空间. 其中每个 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维空间中的一个点,数 x_i 称为该点的第 i 个坐标,即 $\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n\}$.

n 维空间中两点间距离公式

$\mathbf{R}^n$ 中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离规定为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

特别地,当 n 分别为 1,2,3 时,上述距离分别为实数轴、平面、空间两点间的距离.

n 维空间中邻域、区域等概念

设 P_0 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点,δ 是某一正数,则 n 维空间中的点集

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta, P \in \mathbf{R}^n\}$$

称为 $\mathbf{R}^n$ 中点 P_0 的 δ 邻域.

以邻域为基础,前面就平面点集所叙述的一系列概念,如内点、边界点、区域等都可类似

地推广到 $\mathbf{R}^n$ 中去.

1.2.2　二元函数的概念

1. 二元函数

定义 2　设 D 是平面上的一个非空点集,如果对于 D 内的任一点(x,y),按照某种法则 f,都有唯一确定的实数 z 与之对应,则称 f 是 D 上的二元函数,它在点(x,y)处的函数值记为 $f(x,y)$,即 $z=f(x,y)$,其中 x,y 称为**自变量**(independent variable),z 称为**因变量**(dependent variable).点集 D 称为该函数的**定义域**(domain),数集

$$\{z \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为该函数的**值域**(range).

关于二元函数的定义域,与一元函数类似,约定如下:当函数用解析式表示,且没有明确指出其定义范围时,定义域就是使解析表达式有意义的点的全体;而在实际问题中,函数的定义域可由实际意义确定.

类似地,可定义三元及三元以上的函数.当 $n\geqslant 2$ 时,n 元函数统称为**多元函数**.

例 1　求 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$的定义域.

解　要使表达式有意义,需要满足

$$\begin{cases}|3-x^2-y^2|\leqslant 1,\\ x-y^2>0,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,\\ x>y^2,\end{cases}$$

因此,所求定义域(参见图 1-16)为 $D=\{(x,y)\mid 2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,x>y^2\}$.

2. 二元函数的几何意义

设函数 $z=f(x,y)$的定义域为 D,对于任意取定的 $P(x,y)\in D$,必有唯一的 $z=f(x,y)$与之对应.这样,将变量 x,y,z 作为空间点的坐标,三元有序数组(x,y,z)就确定了空间中的一点 $M(x,y,z)$,当(x,y)取遍 D 上一切点时,得到一个空间点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

该点集对应三维空间中的图形,称为二元函数 $z=f(x,y)$的图形,它是三维空间中的一张曲面(参见图 1-17),定义域 D 是该曲面在 xOy 面上的投影.

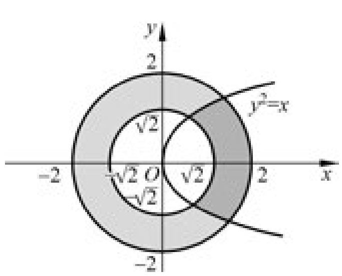

图 1-16　定义域图示

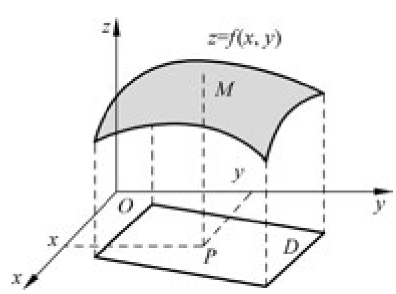

图 1-17　二元函数的几何意义

注　(1) 二元函数的定义域是平面上的区域,二元函数的图形是空间的曲面.如二元函数 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的图形是以坐标原点为球心,以 a 为半径的球面的上半球面,定义域则