第 1 章

函数、极限和连续

Functions, limits and continuity

微积分研究的主要对象是函数. 研究函数通常有两种方法：一种方法是代数方法和几何方法的综合. 用这种方法常常只能研究函数的简单性质；另一种方法就是微积分的方法. 用这种方法能够研究函数的许多深刻性质，并且做起来相对简单. 微积分就是用极限的方法研究函数的一门学科.

1.1 函数

为了准确且深刻地理解函数的概念，集合知识是不可或缺的. 本节将简要地介绍集合的一些基本概念，在此基础上重点介绍函数的概念.

1.1.1 集合

1. 集合的概念

集合是具有某种属性的事物的全体，或是一些确定的对象汇集的总体. 组成集合的这些对象被称为集合的**元素**. 通常用大写斜体字母 A，B，C 等表示集合，用小写斜体字母 a，b，c 等表示集合的元素.

x 是集合 E 的元素，记为：$x\in E$（读作：x 属于 E）；

y 不是集合 E 的元素，记为：$y\notin E$（读作：y 不属于 E）.

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，那么就称 E 是 F 的**子集合**，简称为**子集**，记为

$$E\subset F\text{（读作 } E \text{ 包含于 } F\text{）},$$

或者

$$F\supset E\text{（读作 } F \text{ 包含 } E\text{）}.$$

如果集合 E 的任何元素都是集合 F 的元素，并且集合 F 的任何元素也都是集合 E 的元素（即 $E\subset F$ 并且 $F\subset E$），那么称集合 E 与集合 F 相等，记为

$$E=F.$$

为了方便起见，我们引入一个不含任何元素的集合——空集 $\varnothing$. 我们还约定：空集 $\varnothing$ 是任何集合 E 的子集，即

$$\varnothing \subset E.$$

2. 集合的表示方法

(1) 列举法：将集合的元素一一列举出来，写在一个花括号{ }内.

例如，所有正整数组成的集合可以表示为 $\mathbf{Z}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 由 $x^2-2x-3=0$ 的根组成的集合 A，可表示为 $A=\{-1,3\}$.

用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不得遗漏和重复.

(2) 描述法：将具有性质 $p(x)$的元素 x 所组成的集合 A 记作

$$A=\{x \mid x \text{ 具有性质 } p(x)\}.$$

例如，$x^2-2x-3=0$ 的解组成的集合 A，可表示为 $A=\{x \mid x^2-2x-3=0\}=\{-1,3\}$；$x^2-2x-3<0$ 的解组成的集合 B，可表示为 $B=\{x \mid -1<x<3\}$.

再比如，正整数集 $\mathbf{Z}^+$ 也可表示成

$$\mathbf{Z}^+=\{n \mid n=1,2,3,\cdots\};$$

所有实数的集合可表示成

$$\mathbf{R}=\{x \mid x \text{ 为实数}\}.$$

又如

$$A=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1, x,y \text{ 为实数}\}$$

表示 xOy 平面单位圆周上点的集合.

全体自然数的集合，全体整数的集合，全体有理数的集合，全体实数的集合和全体复数的集合都是最常遇到的集合，我们约定分别用粗正体字母 **N**, **Z**, **Q**, **R** 和 **C** 来表示这些集合，即

N 表示全体自然数的集合；

Z 表示全体整数的集合；

Q 表示全体有理数的集合；

R 表示全体实数的集合；

C 表示全体复数的集合.

3. 特殊的集合——区间

在本书中经常遇到以下形式的实数集的子集——区间. 为了书写简练，将各种区间的符号、名称、定义列表如下(表 1-1，其中 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$，$-\infty$，$+\infty$分别称为负无穷和正无穷).

表 1-1 区间

符 号	名 称		定 义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x \mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a,b]$		左开右闭区间	$\{x \mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		左闭右开区间	$\{x \mid a\leqslant x<b\}$

续表

符 号	名 称		定 义
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x\mid a<x\}$
$[a,+\infty)$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\}$
$(-\infty,a)$		开区间	$\{x\mid x<a\}$
$(-\infty,a]$		闭区间	$\{x\mid x\leqslant a\}$

4. 特殊的区间——邻域

设 $a\in\mathbf{R},\delta>0$. 称数轴上与点 a 的距离小于 δ 的点的全体为点 $\boldsymbol{a}$ **的** $\boldsymbol{\delta}$ **邻域**，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

当不需要注明邻域的半径 δ 时，常将它表示为 $U(a)$，简称 a 的**邻域**.

数集 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 表示为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=(a-\delta,a+\delta)-\{a\},$$

也就是在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a，称为 a 的 δ **去心邻域**. 当不需要注明邻域半径 δ 时，常将它表示为 $\mathring{U}(a)$，简称 a 的去心邻域.

通常把区间 $(a-\delta,a)$ 和 $(a,a+\delta)$ 分别称为点 a 的左邻域和右邻域. 有时点 a 的左邻域和右邻域分别记为 $\mathring{U}(a^-)$ 和 $\mathring{U}(a^+)$.

1.1.2 函数的概念

在一个自然现象或技术过程中，常常有几个量同时变化，它们的变化并非彼此无关，而是相互联系着的，这是物质世界的一个普遍规律. 17 世纪初，数学首先从对运动(如天文、航海问题等)的研究中引出了函数这个基本概念. 在那以后的二百多年里，这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了中心位置.

例 1 球的半径 r 与该球的体积 V 互相联系着：对于任意的 $r\in[0,+\infty)$ 都对应一个球的体积 V. 已知 r 与 V 的对应关系是

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

例 2 在标准大气压下，温度 T 与水的体积 V 互相联系着. 实测数据如表 1-2 所示，数集 $\{0,2,4,6,8,10,12,14\}$ 中每个温度 T 都对应一个体积 V，T 与 V 的对应关系用表 1-2 表示.

表 1-2 实测数据

温度 T/℃	0	2	4	6	8	10	12	14
体积 V/cm^3	100	99.990	99.987	99.990	99.998	100.012	100.032	100.057

上述两个实例,分属于不同的学科,实际意义完全不同.但是,从数学角度看,它们有一个共同的特征:都有一个数集和一个对应关系,对于数集中任意数 x,按照对应关系都对应 $\mathbf{R}$ 中唯一一个数.于是有如下的函数概念.

定义1 设 D 是非空数集.若存在对应关系 f,对 D 中任意数 x(常记为 $\forall$[①] $x\in D$),按照对应关系 f,都有唯一一个 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的**函数**,表示为

$$f: D\to\mathbf{R},$$

数 x 对应的数 y 称为 x 的**函数值**,表示为 $y=f(x)$.x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.数集 D 称为函数 f 的**定义域**,函数值的集合 $f(D)=\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**.

根据函数定义不难看到,上述两例皆为函数的实例.

关于函数概念的几点说明.

(1) 用符号"$f: D\to\mathbf{R}$"表示 f 是定义在数集 D 上的函数,十分清楚、明确.在本书中,为方便起见,我们约定,将"f 是定义在数集 D 上的函数"用符号"$y=f(x)$,$x\in D$"表示.当不需要指明函数 f 的定义域时,又可简写为"$y=f(x)$",有时甚至笼统地说"$f(x)$ 是 x 的函数(值)".

(2) 根据函数定义,虽然函数都存在定义域,但常常并不明确指出函数 $y=f(x)$ 的定义域,这时认为函数的定义域是自明的,即定义域是使函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合 $D=\{x\mid f(x)\in\mathbf{R}\}$.例如,函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,没有指出它的定义域,那么它的定义域就是使函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 有意义的实数 x 的集合,即闭区间

$$[-1,1]=\{x\mid\sqrt{1-x^2}\in\mathbf{R}\}.$$

具有实际意义的函数,它的定义域要受实际意义的约束.例如,上述例1,半径为 r 的球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 这个函数,从抽象的函数意义来说,r 可取任意实数;从它的实际意义来说,半径 r 不能取负数,因此它的定义域是区间 $[0,+\infty)$.

(3) 函数定义指出:$\forall x\in D$,按照对应关系 f,对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$,这样的对应就是所谓的单值对应.反之,一个 $y\in f(D)$ 就不一定只有一个 $x\in D$,使 $y=f(x)$.例如,函数 $y=\sin x$.$\forall x\in\mathbf{R}$,对应唯一一个 $y=\sin x\in\mathbf{R}$,反之,对 $y=1$,却有无限多个 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\in\mathbf{R}$,$k\in\mathbf{N}$,按照对应关系 $y=\sin x$,x 都对应1.即

$$\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,\quad k\in\mathbf{N}.$$

(4) 在函数 $y=f(x)$ 的定义中,要求对应于 x 值的 y 值是唯一确定的,这种函数也称为**单值函数**.如果取消唯一这个要求,即对应于 x 值,可以有两个以上确定的 y 值与之对应,那么函数 $y=f(x)$ 称为**多值函数**.例如,函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 是多(双)值函数.

今后如果没有特别声明,我们所讨论的函数都限于单值函数.

(5) 有时一个函数要用几个表达式来表示,这种在自变量的不同变化范围内函数表达

---

① "$\forall$"读作"对于任意的",并表示此含义.

式不同的函数称为**分段函数**.

实际应用中很多问题都是用分段函数表示的.

例 3 取整函数 $y=[x]$,$[x]$表示不超过 x 的最大整数(如图 1-1 所示).如$[2.5]=2$,$[3]=3$,$[0]=0$,$[-\pi]=-4$.

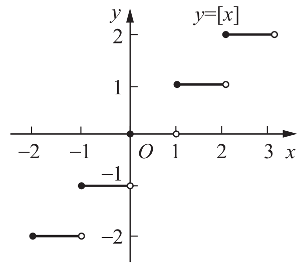
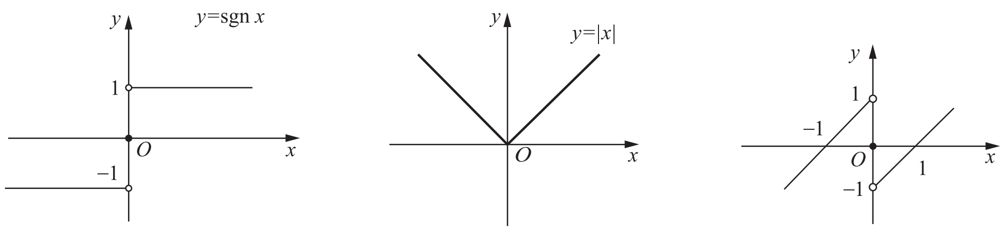


图 1-1 取整函数的图像

例 4 (1) 符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$其图形如图 1-2(a)所示;

(2) 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$其图形如图 1-2(b)所示;

(3) 分段函数 $y=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0.\end{cases}$其图形如图 1-2(c)所示.



(a) 符号函数 (b) 绝对值函数 (c) 分段函数

图 1-2 三种函数的图像

绝对值及其运算具有下列性质:

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$; (2) $|x|\geqslant 0$; (3) $|x|=|-x|$; (4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

(5) 如果 $a>0$,则$\{x\,|\,|x|<a\}=\{x\,|\,-a<x<a\}=(-a,a)$;

(6) 如果 $b>0$,则$\{x\,|\,|x|>b\}=\{x\,|\,x<-b\}\cup\{x\,|\,x>b\}=(-\infty,-b)\cup(b,+\infty)$;

(7) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$; (8) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$;

(9) $|xy|=|x|\cdot|y|$; (10) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$,$y\neq 0$.

1.1.3 函数的基本特性

1. 有界函数

定义 2 设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义,若存在常数 M,使得对任意 $x\in D$,恒有:

(1) $|f(x)|\leqslant M(M>0)$,称函数 $f(x)$在 D 上有界;

(2) $f(x)\leqslant M$,称函数 $f(x)$在 D 上有上界;

(3) $f(x)\geqslant M$,称函数 $f(x)$在 D 上有下界;

(4) 若对于任意给定的 $M>0$,存在 $x_M \in D$,满足 $|f(x_M)|>M$,则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

显然,**有界函数必有上界和下界;** 反之,**既有上界又有下界的函数必有界.**

有界函数的图形如图 1-3 所示,曲线 $y=f(x)$ 夹在两条直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

例如,函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,因为对 $\forall x \in \mathbf{R}$,都有 $|\sin x| \leqslant 1$. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 内是无界的,在 $[1,+\infty)$ 上是有界的.

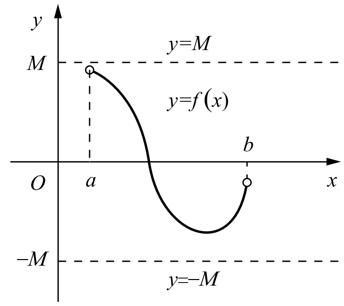


图 1-3 有界函数示意图

2. 单调函数

定义 3 设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义,$\forall x_1, x_2 \in A$ 且 $x_1<x_2$,若:

(1) $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 A 上**严格单调增加**;

(2) $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 A 上**严格单调减少**;

(3) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 A 上**单调增加**;

(4) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 A 上**单调减少**.

单调增加与单调减少的函数统称为**单调函数**,使函数 $f(x)$ 为单调函数的区间称为**单调区间**.

单调增加的函数的图形随自变量 x 的增大而上升(如图 1-4(a)所示);单调减少函数的图形随自变量 x 的增大而下降(如图 1-4(b)所示).

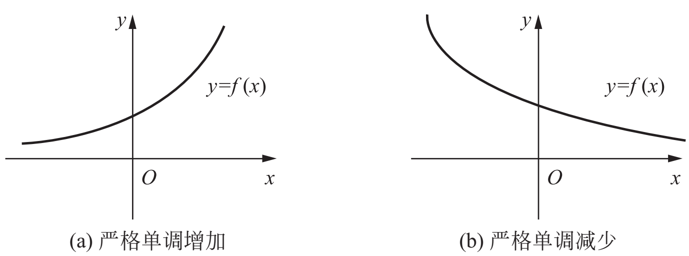


图 1-4 单调函数示意图

例如,(1) 函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调增加的. (2) 函数 $y=2x^2+1$ 在 $(-\infty,0)$ 内是严格单调减少的,在 $[0,+\infty)$ 内是严格单调增加的. 因此,在 $(-\infty,+\infty)$ 内,$y=2x^2+1$ 不是单调函数.

3. 奇函数与偶函数

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域为集合 D,若 $\forall x \in D$,有 $-x \in D$,并且

(1) 若 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 是**奇函数**.

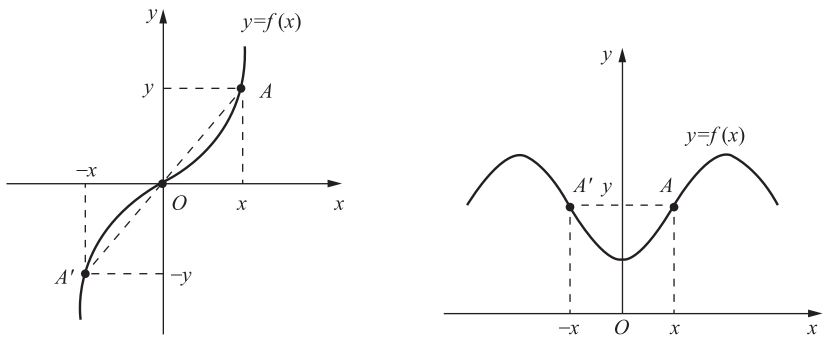
(2) 若 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 是**偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称,如图 1-5 所示.

例如,函数 $y=x^4-2x^2$, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 皆为偶函数; 函数 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=x^3$, $y=$

$x^2\sin x$ 皆为奇函数.

也有既非奇函数也非偶函数的函数. 例如，$y=x+1$，$y=\ln[(2-x)(x+1)]$.



(a) 奇函数　　(b) 偶函数

图 1-5　奇、偶函数示意图

4. 周期函数

定义 5　设函数 $f(x)$定义在数集 D 上，若 $\exists\, l>0$，$\forall\, x\in D$，有 $x\pm l\in D$，且

$$f(x\pm l)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$是**周期函数**，l 称为函数 $f(x)$的一个**周期**.

若 l 是函数 $f(x)$的周期，则 $2l$ 也是它的周期. 不难用归纳法证明，若 l 是函数 $f(x)$的周期，则 $nl(n\in \mathbf{Z}^+)$也是它的周期. 若函数 $f(x)$有最小的正周期，通常将这个最小正周期称为函数 $f(x)$的**基本周期**，简称为**周期**.

例如，$y=\sin x$ 就是周期函数，周期为 2π. 再如，常函数 $y=1$ 也是周期函数，任意正的实数都是它的周期.

习题 1.1

二维码 1.1

1. 判断下面的函数是否相同，并说明理由.

(1) $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$；　　(2) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sin\sqrt{4-x^2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\sqrt{x+2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\ln(x-1)}}$；　　(4) $y=\tan(x+1)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 求 $f(3)$，$f(2)$，$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ x^2+4, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(x-1)+f(x+1)$.

5. 某快递公司的收费标准如下：首重 1 千克收费 10 元，超出部分每千克加收 5 元，请将付费金额 C 元表示为质量 x 千克的函数，其中 $0<x<6$.

6. 写出图 1-6(a)和(b)所示函数的解析表达式.

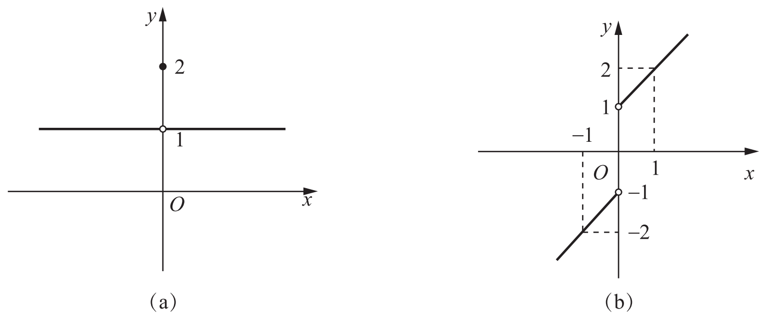


图 1-6　两个函数的图像

7. 已知 $f(x)$是二次多项式，且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，求 $f(x)$.

8. 判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{\cos x}$；　(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(3) $f(x)=(x^2+x)\sin x$；　(4) $f(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x-1, & x>0.\end{cases}$

9. 证明下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=x^2,(-1,0)$；　(2) $y=\sin x,\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；　(3) $y=\dfrac{x}{1+x},(-1,+\infty)$.

提高题

1. 设 $f(x)$是周期为 4 的奇函数，且 $f(x)=x^2-2x,x\in[0,2]$，求 $f(7)$.

2. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-L,L)$内的，证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数.

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

3. 证明函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$在$(-\infty,+\infty)$上是有界的.

4. 证明函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$在$(0,1)$内是无界的.

5. 判断函数 $f(x)=x\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是否有界，并说明理由.

6. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$满足 $f(0)\neq 0$，当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，且对任意 $a,b\in\mathbf{R}$，$f(a+b)=f(a)f(b)$.

(1) 求 $f(0)$；

(2) 求证：对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)>0$；

(3) 求证：$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

1.2 初等函数

1.2.1 反函数

在初等数学中已经学习了反函数，鉴于其重要性，我们复习反函数的概念及其图像.

在圆的面积公式(函数)

$$S=\pi r^2$$

中，半径 r 是自变量，面积 S 是因变量，即对任意半径 $r\in[0,+\infty)$，均对应唯一一个面积 S. 这个函数还有一个性质：对任意面积 $S\in[0,+\infty)$，按此对应关系，也对应唯一一个半径 r，即

$$r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

函数 $r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 就是函数 $S=\pi r^2$ 的反函数.

在函数定义中，已知函数 $y=f(x)$，对任意 $x\in X$，按照对应关系 f，$\mathbf{R}$ 中有唯一一个 y 与之相对应，但对任意一个 $y\in f(X)$，不一定仅有唯一一个 $x\in X$，使 $f(x)=y$. 即一个函数不一定存在反函数.

定义 1 设函数 $y=f(x)$，$x\in X$. 若对任意 $y\in f(X)$，有唯一一个 $x\in X$ 与之对应，使 $f(x)=y$，则在 $f(X)$ 上定义了一个函数，记为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(X),$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. $y=f(x)$ 称为直接函数.

$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数.

反函数的实质在于它所表示的对应规律，用什么字母来表示反函数中的自变量与因变量是无关紧要的. 习惯上仍把自变量记作 x，因变量记作 y，则函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 写作 $y=f^{-1}(x)$.

$y=f^{-1}(x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称(参见图 1-7).

$x=f^{-1}(y)$ 记作 $y=f^{-1}(x)$ 并不影响函数的对应规律，表 1-3 中举例说明.

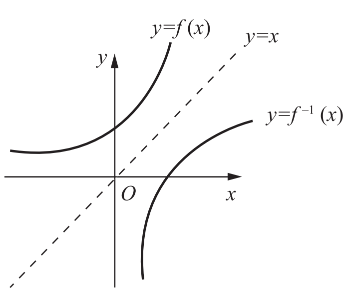


图 1-7 直接函数与反函数示意图

表 1-3 反函数

函数	反函数	反函数
$y=2x+1$	$x=\frac{y-1}{2}$	$y=\frac{x-1}{2}$
$y=a^x$	$x=\log_a y$	$y=\log_a x$
$y=x^3$	$x=\sqrt[3]{y}$	$y=\sqrt[3]{x}$

由函数严格单调的定义不难证明以下定理.

定理1 若函数 $y=f(x)$ 在某区间 X 上严格单调增加(严格单调减少),则函数 $y=f(x)$ 存在反函数,且反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $f(X)$ 上也严格单调增加(严格单调减少).

证明从略,作为练习.

注1 定理1的条件"函数是严格单调"中"严格"两字不可忽略.如 $y=[x]$ 具有单调性,但因为它不是严格单调的函数,它不存在反函数.

注2 函数是严格单调的仅是存在反函数的充分条件,如函数

$$y=\begin{cases}-x+1, & -1\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

在区间 $[-1,1]$ 上不是单调函数,但它存在反函数

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1-y, & 1<y\leqslant 2.\end{cases}$$

1.2.2 基本初等函数

以下6种函数称为基本初等函数.

1. 常值函数

常值函数 $y=C$,其中 C 为常数,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,其对应规则是对于任何 $x\in(-\infty,+\infty)$,x 所对应的函数值 y 恒等于常数 C,其函数图形为平行于 x 轴的直线(图1-8).

2. 幂函数

幂函数 $y=x^a$(a 为任意常数)的定义域和值域因 a 的不同而不同,但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义,且图形经过点 $(1,1)$.图1-9给出了常见的几个幂函数的图形.

同底数幂的运算公式如下(其中 m,n 为正整数):

$$x^nx^m=x^{n+m};\qquad \frac{x^n}{x^m}=x^{n-m};\qquad (x^n)^m=x^{nm};\qquad (xy)^n=x^ny^n;$$

$$x^{-n}=\frac{1}{x^n};\qquad x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x};\qquad x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m};\qquad x^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}.$$

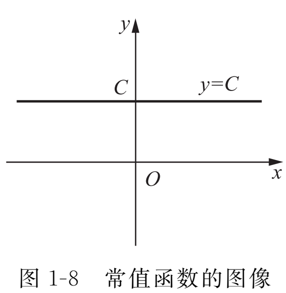


图1-8 常值函数的图像

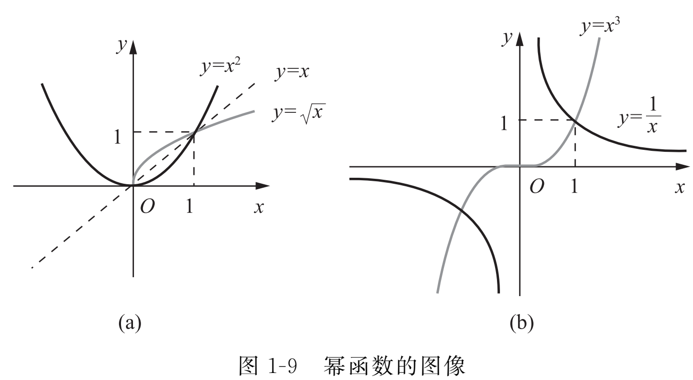


图1-9 幂函数的图像