第 1 章

变换群与几何学

众所周知，客观事物总是处在不断地运动和变化之中的，作为几何学研究对象的图形也不例外。为了深入认识图形的性质，“高等几何”将以运动和变换的观点去考查图形的性质。

为确切地描述图形的运动变化，本章首先给出变换的概念，着重讨论仿射变换，因为仿射几何是从欧氏几何过渡到射影几何的桥梁；其次还将阐明克莱因关于几何学的变换群的观点，这一观点曾对近代几何学的发展产生巨大影响。

1.1　变换与变换群

1.1.1　映射与变换

设集合 S 和 S'，若对 S 中的每一元素 M，按照确定的法则 T，在 S' 中总存在唯一的元素 M' 与之对应，则称此法则 T 为集合 S 到集合 S' 的**映射**，记为

$$T: S \to S' \tag{1-1}$$

若在 T 之下，元素 $M\left(M \in S\right)$ 的对应元素是 $M'\left(M' \in S'\right)$，则称 T 将 M 映成 M'，记为

$$M \xrightarrow{T} M' = T\left(M\right)$$

并称 M' 为 M 在 T 下的像，M 为 M' 在 T 之下的原像。

对于映射式（1-1），我们用 $T\left(S\right)$ 表示集合 S 的全体元素在 T 下的像的集合。按照定义，$T\left(S\right)$ 是 S' 的一部分，即 $T\left(S\right) \subset S'$，若 $T\left(S\right) = S'$，即 S' 中的每一元素在 T 下都有原像，则称此映射为满射；若集合 S 中不同元素的像也不同，则称此映射为单射；既是单射又是满射的映射，称为双射。

两个集合之间的双射，称为对应；集合到自身的双射称为**变换**。显然，集合的变换建立了该集合到自身元素间的一个一一对应关系。

下面介绍几种简单而常见的平面变换。

（1）恒等变换。若变换 $T: S \to S$，将 S 上每一元素映射到自身，即对任意 $M \in S$，有 $M \xrightarrow{T} M = T\left(M\right)$，则称该变换为恒等变换（也称为单位变换），常将 T 记为 I。恒等变换的表达式为

$$I:\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \tag{1-2}$$

（2）平移变换。将平面上的点 M 按定向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向移动到 M'，使得 $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{a}$ 的变换称为平移变换，简称平移，以 $\boldsymbol{a}$ 为平移向量的平移记为 $T_{\boldsymbol{a}}$。

选取标架如图 1-1 所示，设点 $M(x, y)$ 经平移后对应点 $M'(x', y')$，向量 $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2\}$，利用 $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{a}$，即得平移变换的表达式为

$$T_{\boldsymbol{a}}:\begin{cases} x' = x + a_1 \\ y' = y + a_2 \end{cases} \tag{1-3}$$

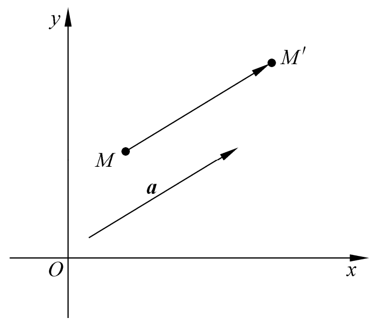

图 1-1

（3）旋转变换。对平面上的固定点 O 和有向角 θ，使得原像点 M 与像点 M' 满足关系：$\left|\overrightarrow{OM'}\right| = \left|\overrightarrow{OM}\right|$，$\angle MOM' = \theta$ 的点变换称为以 O 为旋转中心、旋转角为 θ 的旋转变换，简称旋转，记为 R_θ。

如图 1-2 所示，在以中心 O 为原点的直角坐标系 $\sigma \equiv [O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}]$ 下，旋转变换的表达式为

$$R_\theta:\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \tag{1-4}$$

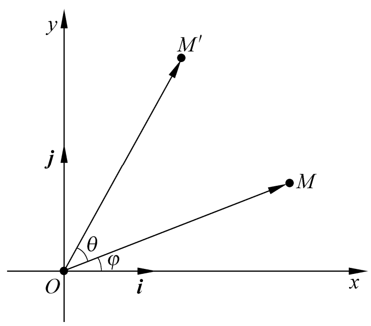

图 1-2

（4）轴反射变换。在平面上取一定直线 ξ，使原像点 M 与像点 M' 之间的线段 MM' 被 ξ 垂直平分的点变换 $M \to M'$，称为以 ξ 为轴的轴反射变换，也称为镜射变换，简称镜射

（见图 1-3）。以 x 轴为轴的轴反射变换式为

$$M_{ox}:\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}\tag{1-5}$$

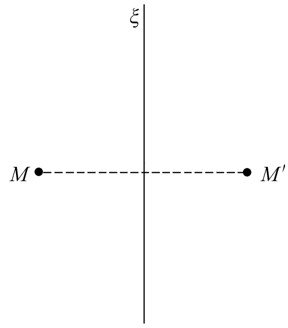

图 1-3

（5）位似变换。给定一个实数 $k\neq 0$ 和平面 π 上的一点 A，若 T 使得 π 的每一点 M 及其像 $M'=T(M)$ 恒满足 $\overrightarrow{AM'}=k\overrightarrow{AM}$，则易知 T 是 π 上的变换，称为**位似变换**或**位似**，定点 A 和实数 k 分别称为**位似中心**和**位似比**。当 $k>0$ 时，T 称为**同向位似或顺位似**；当 $k<0$ 时，T 称为**异向位似或逆位似**。

如图 1-4 所示，设 $A(a_1,a_2)$，$M(x,y)$，$M'(x',y')$，利用 $\overrightarrow{AM'}=k\overrightarrow{AM}$，即得位似变换的表达式为

$$\begin{cases}x'=kx+(1-k)a_1\\y'=ky+(1-k)a_2\end{cases},\ k\neq 0\tag{1-6}$$

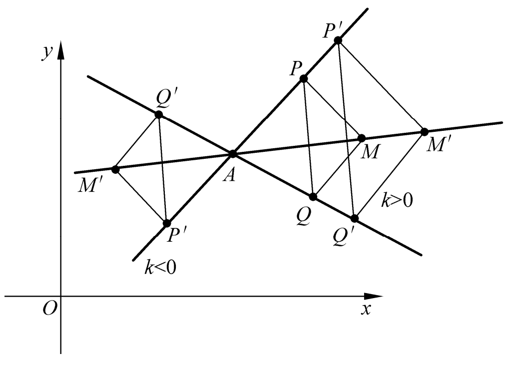

图 1-4

特别地，若原点 O 为位似中心，其变换式为

$$\begin{cases}x'=kx\\y'=ky\end{cases},k\neq 0\tag{1-7}$$

设两点 P、Q 在位似变换下的像分别为 P'、Q'（见图 1-4），则由上述定义得

$$\overrightarrow{P'Q'}=\overrightarrow{AQ'}-\overrightarrow{AP'}=k\left(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}\right)=k\overrightarrow{PQ}$$

说明　位似将线段变为与之平行的线段，且将线段的长度按同一倍数放大或缩小（$|k|=1$时不变）。因此，位似将共线点变为共线点、平行直线变为平行直线；位似还保持任意两线段之比不变，因此位似将三角形变为与之相似的三角形，从而保持角度不变。

在运动和变化中研究图形时，一个核心的问题是确定图形在所考虑的变换下保持不变的那些性质（或量），称之为该变换下的不变性（或不变量）。例如，共线性、平行性都是位似下的不变性，两线段的比值、角度是位似下的不变量。

以上讨论的是平面到自身的变换，下面考虑两个平面之间的对应关系。

平行射影　设两个平面π与π'相交于直线ξ，$\boldsymbol{v}$是不与平面π和π'平行的向量，对于平面π上的任意点M，过M作$\boldsymbol{v}$的平行直线，交π'于M'，则将M映成M'的点对应关系称为平面π到π'的平行射影，向量$\boldsymbol{v}$称为**投射方向**（见图 1-5）。

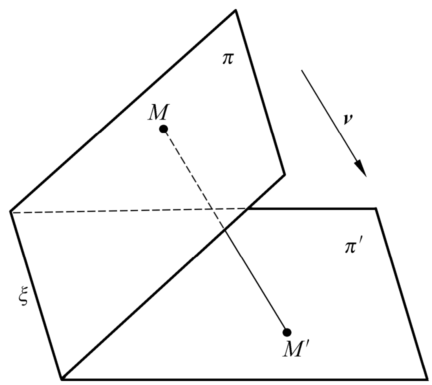

图 1-5

由初等几何知识可以证明，平行射影将直线变成直线，且保持平行性和平行线段之比不变。即有以下性质：

（1）直线的像还是直线。

（2）若$AB\,/\!/\,CD$，则$A'B'\,/\!/\,C'D'$。

（3）对于平行线段AB和CD，有$AB/CD=A'B'/C'D'$。

1.1.2　映射的乘积与映射的逆

映射可以连续施行。若将平面上的点M先施行R_θ得到点M'，再施行T_a得到点M''，则由式（1-4）和式（1-3）易得$M(x,y)$到$M''(x'',y'')$的关系为

$$\begin{cases}x''=x\cos\theta-y\sin\theta+a_1\\ y''=x\sin\theta+y\cos\theta+a_2\end{cases}$$

在此，称这种从M到M''的变换为R_θ和T_a的乘积，记为$T_a\circ R_\theta$（或T_aR_θ），即$M''=T_a\circ R_\theta(M)$。

一般地，设有映射 $T_1: S \to S'$ 和 $T_2: S' \to S''$，则乘积 $T_2 \circ T_1: S \to S''$ 定义为：对于任意 $M \in S$，$T_2 \circ T_1(M) = T_2\left[T_1(M)\right]$。

映射的乘积满足结合律。事实上，对于任意 $M \in S$，总有

$$\left[T_3(T_2T_1)\right](M) = T_3\left[T_2T_1(M)\right] = T_3\left[T_2\left(T_1(M)\right)\right]$$

$$\left[(T_3T_2)T_1\right](M) = (T_3T_2)\left[T_1(M)\right] = T_3\left[T_2\left(T_1(M)\right)\right]$$

于是，$T_3(T_2T_1) = (T_3T_2)T_1$。

要注意的是，乘法一般不满足交换律，即 $T_2T_1 \neq T_1T_2$。比如对于非恒等的 T_a 和 R_θ，有 $T_aR_\theta \neq R_\theta T_a$，请读者自行证明这一结论。

对于双射 $T: S \to S'$，有逆映射 $T^{-1}: S' \to S$，即若 $T(M) = M'$，则 $T^{-1}(M') = M$。而且，对于变换 $T: S \to S'$，一定有 $TT^{-1} = T^{-1}T = I$。

1.1.3　变换的不动元素与不动子集

对于变换 $T: S \to S$，若存在元素 $M \in S$，使得 $T(M) = M$，则称 M 为变换的**不动元素**；若存在 S 的子集 F，使得 $T(F) = F$，则称 F 为变换的**不动子集**。

显然，由不动元素构成的子集一定是不动子集；反之，不动子集的元素则不一定是不动元素。

对于恒等变换 I，每一个元素都是不动元素，每一个子集都是不动子集；平移变换 $T_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$ 没有不动点，平行于平移向量 $\boldsymbol{a}$ 的直线都是不动直线；旋转变换 $R_\theta(\theta \neq 0)$ 除原点以外没有不动点，以原点为中心的圆都是不动子集。

若 F 是变换 $T: S \to S$ 的不动子集，即 $T(F) = F$,则有 $T^{-1}(F) = F$，说明 F 也是逆变换 $T^{-1}: S \to S$ 的不动子集，反之亦然。也就是说，**集合 S 上的变换与其逆变换有相同的不动子集**。

例 1.1　求变换 $\begin{cases} x' = 4x + 5y - 11 \\ y' = 2x + 4y - 7 \end{cases}$ 的不动点。

解　不动点满足 $\begin{cases} x = 4x + 5y - 11 \\ y = 2x + 4y - 7 \end{cases}$，解得 $(x, y) = (2,1)$，所以不动点为 $(2,1)$。

例 1.2　求以 x 轴为轴的轴反射变换 $R_{ox}: \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ 的不动直线。

解　设直线 ξ 经过轴反射后的像直线为

$$\xi': Ax' + By' + C = 0$$

将变换式代入得原像直线 ξ 的方程为

$$Ax - By + C = 0$$

ξ 为不动直线的充要条件是 ξ 与 ξ' 重合，即满足

$$\frac{A}{A}=\frac{B}{-B}=\frac{C}{C}$$

此式等价于

$$\begin{cases}2AB=0\\2BC=0\end{cases}$$

即 $A=0$，$B\neq 0$，$C=0$ 或 $A\neq 0$，$B=0$。

于是不动直线方程为 $y=0$ 和 $Ax+C=0(A\neq 0)$，即 x 轴和垂直于 x 轴的直线都是不动直线。

1.1.4　变换群

若集合 S 中的若干个变换构成的集合 G 满足：

（1）对于任意变换 $T_1\in G$，$T_2\in G$，有 $T_1\circ T_2\in G$；

（2）对于任意变换 $T\in G$，有 $T^{-1}\in G$，

则称 G 为集合 S 上的一个变换群。

根据定义，对于任意变换 $T\in G$，都有 $T^{-1}T=TT^{-1}=I\in G$，即任何变换群一定包含恒等变换 I。

若一变换群 $\bar{G}$ 的所有变换都属于变换群 G，则称 $\bar{G}$ 为 G 的子群。例如，每一个变换群 G 都是自己的子群，$\{I\}$ 是任何变换群的子群。

例 1.3　证明：欧氏平面上所有平移变换组成的集合构成一个变换群。

证明　设集合 $G=\left\{T\,\middle|\,T:\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\end{cases}\right\}$，任取 G 中的两个变换：

$$T_1:\begin{cases}x'=x+a_1\\y'=y+b_1\end{cases}\in G,\quad T_2:\begin{cases}x'=x+a_2\\y'=y+b_2\end{cases}\in G$$

满足

$$T_1\circ T_2:\begin{cases}x'=x+a_2+a_1\\y'=y+b_2+b_1\end{cases}\in G,\quad \text{且}\,T_1^{-1}:\begin{cases}x=x'-a_1\\y=y'-b_1\end{cases}\in G$$

所以，欧氏平面上所有平移变换组成的集合构成一个变换群，称为平移变换群。

习　题　1.1

1. 证明：非恒等的平移变换和旋转变换的乘积不可交换。

2. 已知变换 $T_1:\begin{cases}x'=2x+3y-7\\y'=3x+5y-9\end{cases}$，$T_2:\begin{cases}x'=2x+2y+5\\y'=3x-y-7\end{cases}$，求 T_1^{-1}，T_1T_2，T_2T_1。

3. 已知变换 $T_1:\begin{cases}x'=4x-y-5\\y'=2x+3y+2\end{cases}$，$T_2:\begin{cases}x'=7x-y-1\\y'=4x+2y+4\end{cases}$，求 T_1 的不动点和 T_2 的不动直线。

4. 求证以下四个变换构成变换群。

$$T_1:\begin{cases}x'=x\\y'=y\end{cases},\quad T_2:\begin{cases}x'=-y\\y'=x\end{cases}$$

$$T_3:\begin{cases}x'=-x\\y'=-y\end{cases},\quad T_4:\begin{cases}x'=y\\y'=-x\end{cases}$$

5. 求证平面上所有变换 $T:\begin{cases}x'=\alpha x\\y'=\beta y\end{cases}(\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0)$ 构成一个变换群。

1.2　仿 射 变 换

1.2.1　仿射坐标系和仿射坐标变换

在平面上取定一点 O 和两个不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ ，称它们构成平面上的一个**仿射标架**，记为 $\sigma\equiv[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$ ，其中 O 称为**原点**，$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 称为**基向量**。过原点 O ，分别沿 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 的有向直线称为 x **轴**和 y **轴**（见图 1-6）。

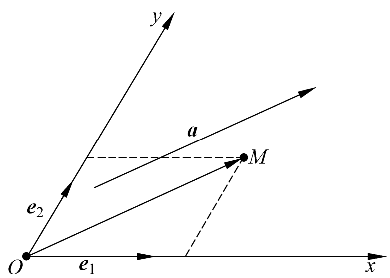

图 1-6

对于平面上的任意点 M ，显然有

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2 \tag{1-8}$$

则其有序实数对 (x,y) 称为点 M 在标架 σ 下的**仿射坐标**。$\{x,y\}$ 也是向量 $\overrightarrow{OM}$ 关于标架 σ 的坐标（或分量）。由于向量是自由的，故若向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$ ，则 $\boldsymbol{a}$ 关于标架 σ 的坐标也是 $\{x,y\}$ ，即 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\{x,y\}$ 。以 (x,y) 为坐标的点记为 $M(x,y)$ 。可以证明：在仿射坐标系下，向量的坐标等于终点坐标减去起点坐标。

反之，对于任意的有序实数对 (x,y) ，总可以按式（1-8）构成向径 $\overrightarrow{OM}$ ，从而得到 (x,y) 对应的点 M 。

显然，若在平面上给定了仿射标架 σ ，平面上全体点的集合与全体有序实数对的集合有一一对应的关系，称这个一一对应的关系为平面**仿射坐标系**。

直角标架是特殊的仿射标架，直角坐标是特殊的仿射坐标，直角坐标系是特殊的仿射坐标系。

建立了仿射坐标系的平面称为仿射平面。假设在仿射平面上建立了两个仿射标架 $\sigma \equiv [O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$ 和 $\sigma' \equiv [O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2']$，此时来考查平面上同一点 M 在 σ 下的坐标 (x,y) 与在 σ' 下的坐标 (x',y') 之间的关系，也就是仿射坐标变换式。

设在 σ 下新原点 O' 的坐标为 (a,b)，新基向量的坐标为

$$\boldsymbol{e}_1' = \{a_{11},a_{21}\},\quad \boldsymbol{e}_2' = \{a_{12},a_{22}\}$$

由图 1-7 有

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OO'} + x'\boldsymbol{e}_1' + y'\boldsymbol{e}_2'$$

即

$$\{x,y\} = \{a,b\} + x'\{a_{11},a_{21}\} + y'\{a_{12},a_{22}\},$$

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + b \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \det(a_{ij}) \neq 0 \tag{1-9}$$

这里的 $\det(a_{ij}) \neq 0$，是因为 $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2'$ 不共线。

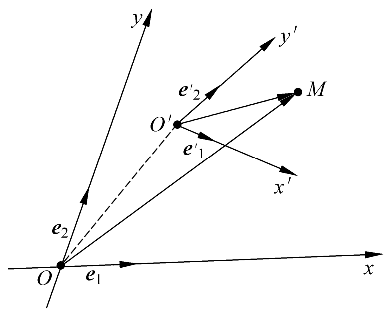

图 1-7

推论 1.1　若平面向量 $\boldsymbol{u}$ 在 σ 下的坐标为 $\{X,Y\}$，在 σ' 下的坐标为 $\{X',Y'\}$，则其仿射坐标变换式为

$$\begin{cases} X = a_{11}X' + a_{12}Y' \\ Y = a_{21}X' + a_{22}Y' \end{cases},\quad \det(a_{ij}) \neq 0$$

该推论的证明留给读者自行完成。

下面来看仿射平面上的几个常用结论。

首先在仿射平面上给出直线方程。设直线 ξ 过点 $M_0(x_0,y_0)$，平行于向量 $\boldsymbol{\tau}\{u,\boldsymbol{v}\}$。显然，动点 $M(x,y)$ 在 ξ 上的充要条件是向量 $\overrightarrow{M_0M}\{x-x_0,y-y_0\} \parallel \boldsymbol{\tau}$，此条件等价于

$$\frac{x-x_0}{u} = \frac{y-y_0}{\boldsymbol{v}} \tag{1-10}$$

上式称为直线的**点向式**方程。

当 $u \neq 0$ 时，式（1-10）可变为形如 $y = kx + b$ 的表达式，其中 $k = \dfrac{v}{u}$ 决定了直线的方向，称为直线的**方向数**。显然，方向数是直角坐标系下直线斜率在仿射坐标系下的推广。

当 $u = 0$ 时，直线平行于 y 轴，在直角坐标系下，该直线的斜率不存在，在仿射坐标系下，该直线的方向数为 ∞，此时约定方程为 $x = x_0$。

对式（1-10）进行整理，可得二元一次方程：

$$Ax + By + C = 0\left(A,B\text{不同时为}0\right) \tag{1-11}$$

反之，任意一个形如式（1-11）的二元一次方程经过适当变形后均可以写成式（1-10）的形式。因此，我们称式（1-11）为直线的一般式方程。

其次，在仿射平面上给出以下有关点和直线的结论：

（1）对于两条直线 ξ_i: $A_i x + B_i y + C_i = 0\left(i = 1,2\right)$，它们相交的充要条件是 $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$；它们平行的充要条件是 $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$；它们重合的充要条件是 $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$。

（2）对于三点 $P_i\left(x_i, y_i\right)\left(i = 1,2,3\right)$，它们共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

而且，若 P_3 分线段 P_1P_2 成定比 $\lambda\left(\lambda \neq -1\right)$，则

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

（3）对于三条直线 ξ_i: $A_i x + B_i y + C_i = 0\left(i = 1,2,3\right)$，它们共点或平行的充要条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{1-12}$$

证明　若三条直线平行，则有 $\dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{A_2}{B_2} = \dfrac{A_3}{B_3}$，式（1-12）显然成立。反之，若式（1-12）成立，且第一列与第二列成比例，则三条直线平行。下面假定前两列不成比例，即三条直线不平行，于是 $\xi_i\left(i = 1,2,3\right)$ 共点于 $P_0\left(x_0, y_0\right)$ 的充要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0 \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z = 0 \end{cases}$$

有非零解 $\left(x_0, y_0, 1\right)$，此条件等价于式（1-12）。

需要注意的是，以上结论与直角坐标系下相应的结论一致。但是，在特殊的直角坐标系下成立的结论不能完全照搬到一般的仿射坐标系下。例如，在直角坐标系下成立的距离

公式，在一般仿射坐标系下是不成立的。

1.2.2　仿射变换

前面介绍了两相交平面之间的平行射影，接下来将以平行射影为基础，建立平面上的仿射变换。首先介绍透视仿射变换。

设平面 π 与 π' 相交于直线 ξ，取具有不同投射方向 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 的两个平行射影 T_1：$\pi \to \pi'$ 和 T_2：$\pi' \to \pi$，则乘积 $T = T_2T_1$：$\pi \to \pi$ 可将平面 π 上的任意点 M 变成 π 自身的点 M'，即满足 $M' = T(M) = T_2T_1(M) = T_2(M_1)$，称此变换 T 为 π 上的**透视仿射变换**（见图 1-8）。

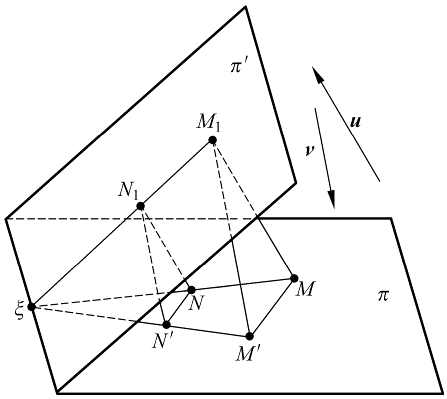

图 1-8

由于 T 是平行射影的乘积，故有以下性质：

（1）将点变成点，将直线变成直线。

（2）保持平行性和平行线段之比不变。

（3）对应点的连线相互平行。如图 1-8 所示，$MM' \,/\!/\, NN'$。

在此将对应点连线所具有的固定方向称为透视方向，显然平面 π 与 π' 的交线 ξ 是由不动点构成的直线，称为透视仿射轴（简称轴）。容易得出，一对对应直线与轴三条直线存在的位置关系是：要么三线共点，要么三线平行。

其次介绍仿射变换。若 T_1：$\pi \to \pi_1$，T_2：$\pi_1 \to \pi_2$，…，T_n：$\pi_{n-1} \to \pi$ 是 n 个平行射影（见图 1-9），则它们的乘积 $T_n \cdots T_2T_1$ 显然是 π 到自身的双射，因而是 π 的变换。平面 π 到自身的映射若是有限个平行射影的乘积，则称为 π 上的**仿射变换**。平面 π 上的仿射变换将点变成点，将直线变成直线，且保持平行性和平行线段之比不变。

定理 1.1　恒等变换是仿射变换，仿射变换的逆变换是仿射变换。有限个仿射变换的乘积是仿射变换。

证明　平面 π 的恒等变换可视为 π 到另一平面 π' 的平行射影 T 与其逆映射 T^{-1} 的乘积。根据定义，后面的结论是显然成立的。