第一章　导数

1.1　导数

1.1.1　函数的平均变化率

1. 在平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$中，下列说法不正确的是(　　)

   A. Δx 可为正数　　B. Δx 可为负数　　C. Δx 可为零　　D. Δy 可为零

2. 函数 $f(x)=5x-3$ 在区间$[a,b]$上的平均变化率为(　　)

   A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

3. 一物体的运动方程是 $s(t)=3+2t$，则在$[2,2.1]$这段时间内的平均速度是(　　)

   A. 0.4　　B. 2　　C. 0.3　　D. 0.2

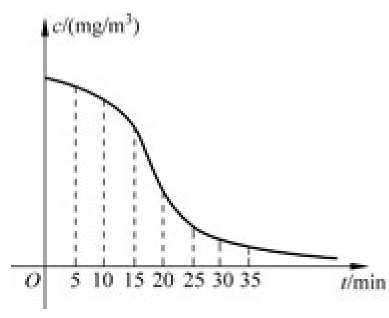
4. 已知函数 $f(x)=2x^2-1$ 的图像上一点$(1,1)$，当自变量增加 Δx 时，因变量增加 Δy，则$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$等于(　　)

   A. 4　　B. $4+2\Delta x$　　C. $4+2(\Delta x)^2$　　D. $4x$

5. 在点 $x=1$ 附近，取 $\Delta x=0.3$，在下列四个函数中平均变化率最大的是(　　)

   A. $y=x$　　B. $y=x^2$　　C. $y=x^3$　　D. $y=\dfrac{1}{x}$

6. 降低室内微生物密度的有效方法是定时给室内注入新鲜空气，即开窗通风换气.空气中微生物密度(c)随开窗通风换气时间(t)的关系如图所示，则下列时间段内，空气中微生物密度变化的平均速度最快的是(　　)



   A. $[5,10]$

   B. $[5,15]$

   C. $[5,20]$

   D. $[5,35]$

7. 过曲线 $y=x^2+1$ 上两点 $P(1,2)$和 $Q(1+\Delta x,2+\Delta y)$作曲线的割线，当 $\Delta x=0.1$ 时，割线斜率 $k=$________，当 $\Delta x=0.001$ 时，割线斜率 $k=$________.

8. 一质点运动的方程为 $s(t)=\ln t+1$，则该质点在时间段$[e,e^2]$内的平均速度为________.

9. 若函数 $f(x)=x^2-x$ 在区间$[-2,t]$上的平均变化率是 2，则 $t=$________.

10. 服药后，人吸收药物情况可以用血液中药物的浓度 c（单位：mg/mL）来表示，它是时间 t（单位：min）的函数，表示为 $c=c(t)$，下表给出了 $c(t)$的一些函数值.

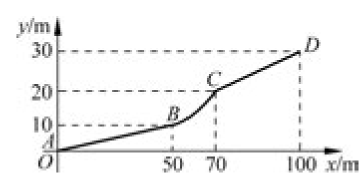
t/min	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$c(t)$/(mg/mL)	0.89	0.94	0.98	1.00	1.00	0.97	0.90	0.79	0.63

服药后 30～70min 药物浓度的平均变化率为________ mg/(mL·min).

11. 分别求出函数 $y=\sin x$ 在区间 0 到 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$和区间 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$内的平均变化率，并比较它们的大小.

12. 若函数 $f(x)=-x^2+x$ 在区间$[2,2+\Delta x]$($\Delta x>0$)上的平均变化率不大于-1，求 Δx 的取值范围.

（选做）13. 泰山为我国的五岳之首，有“天下第一山”的美誉，在当地有俗语“紧十八，慢十八，不紧不慢又十八”用来形容爬泰山的感受，下面是一段登山路线图. 同样是登山，但是从 A 处到 B 处会感觉比较轻松，而从 B 处到 C 处会感觉比较吃力. 想想看，为什么？你能用数学语言来量化 BC 段曲线的陡峭程度吗？



1.1.2 瞬时变化率与导数

1. 若 $f(x)=\frac{1}{x}$,则 $f'(1)$等于(　　)

A. 1　　B. -1

C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

2. 已知 $f(x)=-x^2+10$,则 $f(x)$在点 $x=\frac{3}{2}$处的瞬时变化率是(　　)

A. 3　　B. -3

C. 2　　D. -2

3. 若函数 $y=\sqrt{x}$在点 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是$\frac{\sqrt{3}}{3}$,则 x_0 的值是(　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$

C. 1　　D. 3

4. 一质点运动的方程为 $s=5-3t^2$,若该质点在时间段$[1,1+\Delta t]$内的平均速度为$-3\Delta t-6$,则该质点在 $t=1$ 时的瞬时速度是(　　)

A. -3　　B. 3

C. 6　　D. -6

5. 已知 $f(x)=x^2-3x$,则 $f'(0)$等于(　　)

A. $\Delta x-3$　　B. $(\Delta x)^2-3\Delta x$

C. -3　　D. 0

6. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}$,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{x}$等于(　　)

A. -1　　B. 1

C. -2　　D. 0

7. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{6}x^2$,则 $f'(-3)=$________.

8. 一质点按规律 $s=2t^3$ 运动,则其在时间段$[1,2]$内的平均速度为________ m/s,在 $t=1$ 时的瞬时速度为________ m/s.

9. 已知函数 $f(x)=13-8x+\sqrt{2}x^2$,且 $f'(x_0)=4$,则 x_0 的值为________.

10. 设函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处可导,当 h 无限接近于 0 时,对于$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$的值,以下说法正确的是________.(填序号)

① 与 x_0,h 都有关;　　② 仅与 x_0 有关而与 h 无关;

③ 仅与 h 有关而与 x_0 无关;　　④ 与 x_0,h 均无关.

11．若函数 $f(x)=ax^2+c$，且 $f'(1)=2$，求 a 的值．

12．一物体做直线运动，其位移 s（单位：m）与时间 t（单位：s）关系是 $s=3t-t^2$．

（1）求此物体的初速度；

（2）求此物体在 $t=2$ 时的瞬时速度；

（3）求此物体在 $t=0$ 到 $t=2$ 时的平均速度．

（选做）13．已知 $f(x)=x^2$，$g(x)=x^3$，求满足 $f'(x_0)+2=g'(x_0)$ 的 x_0 的值．

1.1.3 导数及其几何意义

1. 设 $f'(x_0)=0$,则曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线(　　)

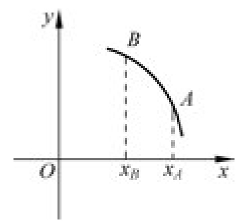
A. 不存在　　　　B. 与 x 轴平行或重合

C. 与 x 轴垂直　　　　D. 与 x 轴斜交

2. 已知曲线 $f(x)=2x^2$ 上一点 $A(2,8)$,则在点 A 处的切线斜率为(　　)

A. 4　　B. 16　　C. 8　　D. 2

3. 已知函数 $y=f(x)$的图像如图所示,则 $f'(x_A)$与 $f'(x_B)$的大小关系是(　　)



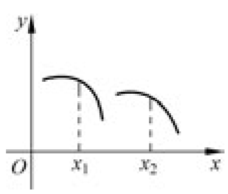
A. $f'(x_A)>f'(x_B)$

B. $f'(x_A)<f'(x_B)$

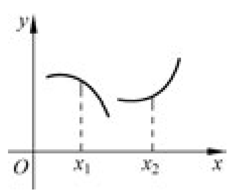
C. $f'(x_A)=f'(x_B)$

D. 不能确定

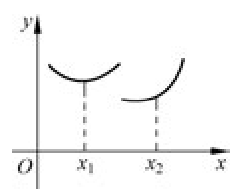
4. 已知函数 $f(x)$满足 $f'(x_1)>0,f'(x_2)<0$,则在 x_1 和 x_2 附近符合条件的 $f(x)$的图像大致是(　　)



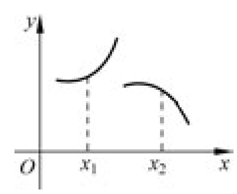
A.



B.



C.



D.

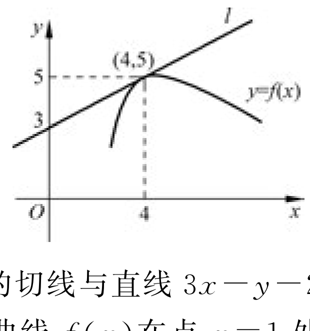
5. 若曲线 $y=x^2$ 的一条切线的斜率为 4,则切点的横坐标为(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 已知函数 $y=f(x)$的图像在点 $M(1,f(1))$处的切线方程是 $y=\frac{1}{2}x+2$,则 $f(1)+f'(1)$的值等于(　　)

A. 1　　B. $\frac{5}{2}$　　C. 3　　D. 0

7. 如图所示,直线 l 是曲线 $y=f(x)$在点 $x=4$ 处的切线,则 $f'(4)=$________.



8. 已知函数 $y=f(x)$在点$(2,1)$处的切线与直线 $3x-y-2=0$ 平行,则 $f'(2)=$________.

9. 已知 $f(x)=x^2+ax,f'(1)=4$,曲线 $f(x)$在点 $x=1$ 处的切线在 y 轴上的截距为-1,则实数 a 的值为________.

10. 曲线 $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ 在点$(1,0)$处的切线的倾斜角等于________.

11. 已知直线 l_1 为曲线 $f(x)=x^2+x-2$ 在点$(1,0)$处的切线，l_2 为该曲线的另一条切线，且 $l_1 \perp l_2$，求直线 l_2 的方程.

12. 已知曲线 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}(x>0)$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线分别与 x 轴，y 轴交于点 A，B，O 是坐标原点，若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\dfrac{1}{3}$，求实数 x_0 的值.

（选做）13. 点 P 在曲线 $f(x)=x^2+1$ 上，且曲线在点 P 处的切线与曲线 $y=-2x^2-1$ 相切，求点 P 的坐标.

1.1.4 基本初等函数的导数(一)

1. 下列求导运算正确的是( )

A. $(\cos x)'=-\sin x$ B. $(x^3)'=x^3\ln x$

C. $(e^x)'=xe^{x-1}$ D. $(\ln x)'=\frac{1}{x\ln 10}$

2. 下列各式中正确的个数是( )

①$(x^7)'=7x^6$;②$(x^{-1})'=x^{-2}$;③$(\sqrt[5]{x^2})'=\frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}$;④$(\cos 2)'=-\sin 2$.

A. 1 B. 2

C. 3 D. 4

3. 已知函数 $f(x)=x^a$($a\in\mathbf{Q}$ 且 $a\neq 0$),若 $f'(-1)=-4$,则 a 的值等于( )

A. 4 B. -4

C. 5 D. -5

4. 若函数 $f(x)=\cos x$,则 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)$的值为( )

A. 0 B. -1

C. 1 D. 2

5. 已知函数 $f(x)=x^3$ 在某点处的切线的斜率等于 1,则这样的切线有( )

A. 1 条 B. 2 条

C. 多于 2 条 D. 不能确定

6. 若对任意 $x\in\mathbf{R}$,$f'(x)=4x^3$,$f(1)=-1$,则 $f(x)$是( )

A. $f(x)=x^4$ B. $f(x)=4x^3-5$

C. $f(x)=x^4+2$ D. $f(x)=x^4-2$

7. 若曲线 $y=\sqrt{x}$ 在点 $P(a,\sqrt{a})$处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为 2,则实数 a 的值是________.

8. 设曲线 $y=e^x$ 在点(0,1)处的切线与曲线 $y=\frac{1}{x}(x>0)$在点 P 处的切线垂直,则点 P 的坐标为________.

9. 已知在曲线 $y=\frac{1}{x^2}$上存在一点 P,曲线在点 P 处的切线的倾斜角为 $135°$,则点 P 的横坐标为________.

10. 已知 $f(x)=\ln 5\cdot\log_5 x$,则曲线 $f(x)$在点 $A(1,0)$处的切线方程为________.

11. 点 P 是曲线 $y=e^x$ 上任意一点，求点 P 到直线 $y=x$ 的最小距离.

12. 已知抛物线 $y=x^2$，求过点 $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$ 且与抛物线相切的直线方程.

（选做）13. 观察 $(x^2)'=2x$，$(x^4)'=4x^3$，$(\cos x)'=-\sin x$，由归纳推理得：

若偶函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可导函数，记 $g(x)$ 为 $f(x)$ 导函数，则 $g(-x)=$（　　）

A. $f(x)$　　B. $-f(x)$　　C. $g(x)$　　D. $-g(x)$

1.1.5　基本初等函数的导数(二)

1. 函数 $y=3^x$ 在点 $x=2$ 处的导数为(　　)

A. 9　　B. 6

C. 9ln3　　D. 6ln3

2. 设 $f_0(x)=\cos x$, $f_1(x)=f_0'(x)$, $f_2(x)=f_1'(x)$, $\cdots$, $f_{n+1}(x)=f_n'(x)$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $f_{2023}(x)=$(　　)

A. $\sin x$　　B. $-\sin x$

C. $\cos x$　　D. $-\cos x$

3. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$, 则 $f'(-1)=$(　　)

A. $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　B. $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

C. e　　D. $-$e

4. 已知函数 $f(x)=x^3$ 在点 P 处的导数值为 3, 则点 P 的坐标为(　　)

A. $(-2,-8)$　　B. $(-1,-1)$

C. $(-2,-8)$或$(2,8)$　　D. $(-1,-1)$或$(1,1)$

5. 直线 $y=\dfrac{1}{2}x+b$ 不可能是(　　)的图像的切线.

A. $f(x)=\dfrac{1}{x}$　　B. $f(x)=x^4$

C. $f(x)=\sin x$　　D. $f(x)=\mathrm{e}^x$

(多选)6. 若函数 $y=f(x)$的图像上存在两点, 使得函数的图像在这两点处的切线互相垂直, 则称 $y=f(x)$具有 T 性质, 下列函数中具有 T 性质的是(　　)

A. $y=\cos x$　　B. $y=\ln x$

C. $y=\mathrm{e}^x$　　D. $y=x^2$

7. 给出下列三个结论, 所有正确结论的序号是________.

① 若 $y=\sqrt{x}$, 则 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; ② 若 $y=\mathrm{e}^{-x}$, 则 $y'=\mathrm{e}^{-x}$;

③ 若 $y=\cos x$, 则 $y'=-\sin x$.

8. 曲线 $y=x^n$ 在点 $x=2$ 处的导数为 12, 则 $n=$________.

9. 能说明"若 $f'(x)$为偶函数, 则 $f(x)$为奇函数"为假命题的一个函数是 $f(x)=$________.

10. 定义方程 $f(x)=f'(x)$的实数根 x_0 叫作函数 $f(x)$的"新驻点".

(1) 设 $f(x)=\cos x$, 则 $f(x)$在区间$(0,\pi)$上的"新驻点"为________.

(2) 若函数 $g(x)=x$ 与 $h(x)=\ln(x+1)$的"新驻点"分别为 α, β, 则 α 和 β 的大小关系是________.

11. 若曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线经过点(8,3)，求此切线的斜率.

12. 求曲线 $y=\mathrm{e}^{x}$ 在点$(2,\mathrm{e}^{2})$处的切线与坐标轴所围三角形的面积.

（选做）13. 已知曲线 $y=\frac{1}{3}x^{3}+\frac{4}{3}$.

（1）求曲线在点 $P(2,4)$处的切线方程；

（2）求曲线过点 $P(2,4)$的切线方程.