

第3章

线性时不变系统时域分析



导图

系统的时域分析是指在给定的激励作用下,通过不同的数学方法求解系统的响应。为了确定线性时不变系统对给定激励的响应,就要建立描述该系统的数学模型,并求出满足一定初始状态的解。如果把对系统的定性和定量分析限定在时间领域内,即所涉及函数的自变量都是时间,这就是系统的时域分析法。这种方法比较直观,物理概念清楚,是信号与系统分析的最基本方法,也是其他各种变换域分析方法的基础。

系统数学模型的时域表示最主要的方法为输入-输出法,即将系统用一元 n 阶微分或差分方程来表示。本章讨论系统方程的建立和求解。首先利用高等数学知识求解微分或差分方程,其解即为系统的响应或称系统的全响应,按照产生响应原因的不同将系统响应分解为零输入响应和零状态响应。

在系统的时域分析中引入系统的冲激响应,利用任意信号可分解为无穷多个冲激信号之和,线性时不变系统的零状态响应则是各输入信号中冲激分量响应的叠加,即外加入与冲激响应的卷积积分或卷积和。

对于线性时不变系统,利用卷积运算求解零状态响应,此种方法物理概念清楚、运算方便,便于计算机求解。卷积是联系时域分析法和变换域分析法的纽带,在线性时不变系统分析中具有重要的理论意义。

3.1 连续时间线性时不变系统的时域分析

3.1.1 连续时间线性时不变系统的数学模型

对于连续时间线性时不变系统,可用常系数微分方程来描述,其一般形式为

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt}y(t) + a_0 y(t) \\ &= b_m \frac{d^m}{dt^m}x(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt}x(t) + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

所以研究时域分析方法的起点是建立常系数微分方程。本节研究如何从给定实际应用系统中建立满足响应 $y(t)$ 和输入 $x(t)$ 的微分方程。

为了简便地描述常系数微分方程,需要引入算子(或算符)的概念,特作如下规定:

$$p = \frac{d}{dt} \quad (3.1.2)$$

其逆算子为

$$\frac{1}{p} = \int_{-\infty}^t (\cdot) dt \quad (3.1.3)$$

它们的意思是指

$$\begin{aligned} p x(t) &= \frac{d}{dt} x(t), \quad p^n \triangleq \frac{d^n}{dt^n} \\ \frac{1}{p} x(t) &= \int_{-\infty}^t x(t) dt \end{aligned}$$

$$\frac{1}{p^n}x(t) = p^{(-n)}x(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^t \cdots \int_{-\infty}^t}_{n} x(t) \underbrace{dt \cdots dt}_n, \quad n > 0$$

按照上述规定,有

$$p \cdot \frac{1}{p} = 1 \quad (3.1.4)$$

$$\frac{1}{p} \cdot p \neq 1 \quad (3.1.5)$$

因为

$$p \cdot \frac{1}{p}x(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t x(t) dt = x(t)$$

而

$$\frac{1}{p} \cdot px(t) = \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt} x(t) dt = x(t) \Big|_{-\infty}^t = x(t) - x(-\infty) \neq x(t)$$

在运算中这一点特别需要注意。

引入算子后,还可以引入算子式,比如

$$p^2 + ap + b + c \frac{1}{p}$$

其意思是指下述运算规则:

$$\begin{aligned} & \left(p^2 + ap + b + c \frac{1}{p} \right) x(t) \\ &= p^2 x(t) + apx(t) + bx(t) + c \frac{1}{p} x(t) \\ &= \frac{d^2}{dt^2} x(t) + a \frac{d}{dt} x(t) + bx(t) + c \int_{-\infty}^t x(t) dt \end{aligned}$$

式(3.1.1)描述的微分方程可借助算子式表示成**算子方程**,即

$$D(p)y(t) = N(p)x(t) \quad (3.1.6)$$

其中, $D(p)$ 是 p 的 n 次算子多项式, $D(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1p + a_0$; $N(p)$ 是 p 的 m 次算子多项式, $N(p) = b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \cdots + b_1p + b_0$ 。

算子式原则上可以像代数式一样进行运算,如

$$p^2 + (a+b)p + ab = (p+a)(p+b)$$

因为以第一个等号为例,有

$$\begin{aligned} (p+a)(p+b)x(t) &= (p+a)[x'(t) + bx(t)] \\ &= x''(t) + (a+b)x'(t) + abx(t) \\ &= [p^2 + (a+b)p + ab]x(t) \end{aligned}$$

但要注意,在算子运算中是不成立消去律的,如

$$py(t) = px(t)$$

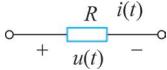
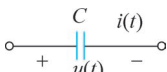
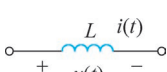
不能用消去律消去 p 而得到 $y(t) = x(t)$ 。因为 $y(t)$ 和 $x(t)$ 之间可以相差一个常数 C ,正确的应为

$$y(t) = x(t) + C$$

借助微分算子 p ,可把电路系统中的基本元件(线性电感 L 、线性电容 C 、线性电阻

R) 的电压、电流关系用微分算子 p 的形式给出运算模型, 如表 3.1.1 所示。

表 3.1.1 电路元件的运算模型

元件名称	电路符号	u - i 关系	运算模型
电阻		$u(t) = Ri(t)$	$\frac{u(t)}{i(t)} = R$
电容		$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$	$\frac{u(t)}{i(t)} = \frac{1}{pC}$
电感		$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$\frac{u(t)}{i(t)} = pL$

下面结合几个例子说明如何使用微分算子建立电路系统中的微分方程。

例 3.1.1 如图 3.1.1 所示电路, 试建立 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 和输入 $x(t)$ 之间的关系。

解: 该电路有两个回路, 两回路的方程分别如下:

$$(3p + 1)i_1(t) - pi_2(t) = x(t)$$

$$-pi_1(t) + (3 + p)i_2(t) = 0$$

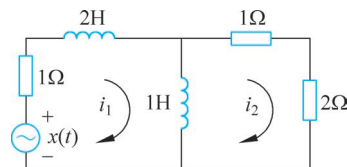


图 3.1.1 例 3.1.1 电路

上式为微分方程组, 可像求解代数方程组那样, 使用克拉默(Cramer)法则来解。

$$i_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} x(t) & -p \\ 0 & 3+p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3p+1 & -p \\ -p & 3+p \end{vmatrix}} = \frac{p+3}{2p^2+10p+3}x(t)$$

$$i_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} 3p+1 & x(t) \\ -p & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3p+1 & -p \\ -p & 3+p \end{vmatrix}} = \frac{p}{2p^2+10p+3}x(t)$$

$i_1(t)$ 对 $x(t)$ 的传输算子为

$$H_1(p) = \frac{p+3}{2p^2+10p+3}$$

$i_2(t)$ 对 $x(t)$ 的传输算子为

$$H_2(p) = \frac{p}{2p^2+10p+3}$$

$H_1(p)$ 所代表的 $x(t)$ 与 $i_1(t)$ 的关系为

$$2i_1''(t) + 10i_1'(t) + 3i_1(t) = x'(t) + 3x(t)$$

$H_2(p)$ 所代表的 $x(t)$ 与 $i_2(t)$ 的关系为

$$2i_2''(t) + 10i_2'(t) + 3i_2(t) = x'(t)$$

例 3.1.2 对于图 3.1.2 所示电路, 给定输入信号 $x(t)$, 写出求电流 $i_1(t)$ 的算子方程。

解: 直接写出各回路的算子方程式为

$$\begin{cases} 3pi_1 - pi_2 - pi_3 = 0 \\ -pi_1 + (p+1)i_2 - i_3 = x(t) \\ -pi_1 - i_2 + \left(p+1+\frac{1}{p}\right)i_3 = 0 \end{cases}$$

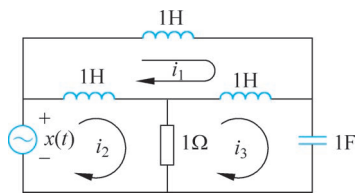


图 3.1.2 例 3.1.2 电路

其中第 3 个方程是微积分方程。为了能直接利用代数

方程的解法, 应首先把微积分方程变成微分方程, 为此两边同乘 p (微分算子)。把方程组写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 3p & -p & -p \\ -p & p+1 & -1 \\ -p^2 & -p & p^2+p+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

使用克拉默法则, 解此方程得到

$$i_1(t) = \frac{p(p^2 + 2p + 1)}{p(p^3 + 2p^2 + 2p + 3)} x(t)$$

$i_1(t)$ 对 $x(t)$ 的传输算子为

$$H(p) = \frac{p(p^2 + 2p + 1)}{p(p^3 + 2p^2 + 2p + 3)}$$

对应的算子方程为

$$p(p^3 + 2p^2 + 2p + 3)i_1(t) = p(p^2 + 2p + 1)x(t)$$

注意: 等式两端的 p 不能消去, 否则可能引起系统结构的变化。

3.1.2 零输入响应

第 1 章中已讲过, 线性系统具有分解性, 其响应可以分解成零输入响应和零状态响应两个独立部分。其中, 初始状态单独作用时的输出称为**零输入响应**, 记作 $y_{zi}(t)$; 输入信号单独作用时的输出称为**零状态响应**, 记作 $y_{zs}(t)$ 。系统的**全响应**可写作

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \quad (3.1.7)$$

从能量角度来看, 系统的零输入响应是假定初始时刻 (通常取 $t=0$) 起输入信号为零, 系统并不从外界获得能量, 靠系统的初始储能产生的响应。系统的零状态响应则是系统无初始储能, 靠输入信号引起的响应。

根据零输入响应 $y_{zi}(t)$ 的定义: 若 $t \geq 0$ 时, $x(t) = 0$, 则对应的响应为 $y_{zi}(t)$, 所以 $y_{zi}(t)$ 满足的算子方程为

$$D(p)y_{zi}(t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.1.8)$$

即

$$y_{zi}^{(n)}(t) + a_{n-1}y_{zi}^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0y_{zi}(t) = 0 \quad (3.1.9)$$

式 (3.1.9) 是一个高阶线性齐次微分方程, 零输入响应 $y_{zi}(t)$ 其实就是这个齐次微分方程

的解。

考虑到指数函数求导数只是系数有改变,其各阶导数的加权和有望叠加为零。现设 $y_{zi}(t) = e^{\lambda t}$, 代入得

$$\lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \cdots + a_0 e^{\lambda t} = (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_0) e^{\lambda t} = 0$$

$e^{\lambda t}$ 不能恒为零, 只有其系数为零。而其系数正好是 $D(\lambda) = D(p) \big|_{p=\lambda}$, 现转为求解方程

$$D(\lambda) = 0 \quad (3.1.10)$$

这个方程称为系统的**特征方程**, 其根即为系统的**特征根**。根据代数基本定理, n 次多项式必有 n 个根(实根或复根), 记为 $\lambda_i, i=1, 2, \cdots, n$ 。按照特征根可能的形式, 零输入响应具有以下几种形式。

当特征根是各不相等实根 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$ 时, 解为

$$y_{zi}(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + k_n e^{\lambda_n t}, \quad t \geq 0 \quad (3.1.11)$$

当特征根是 r 个重根 λ_0 (其中 $r \leq n$), $n-r$ 个单根 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_{n-r}$ 时, 解为

$$y_{zi}(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + k_{n-r} e^{\lambda_{n-r} t} + k_{n-r+1} e^{\lambda_0 t} + k_{n-r+2} t e^{\lambda_0 t} + \cdots + k_n t^{r-1} e^{\lambda_0 t}, \quad t \geq 0 \quad (3.1.12)$$

当特征根全部是成对的共轭复根 $\lambda_1 = \sigma_1 \pm j\omega_1, \lambda_2 = \sigma_2 \pm j\omega_2, \cdots, \lambda_i = \sigma_i \pm j\omega_i, i=n/2$ 时, 解为

$$y_{zi}(t) = e^{\sigma_1 t} [k_1 \cos(\omega_1 t) + k'_1 \sin(\omega_1 t)] + \cdots + e^{\sigma_i t} [k_i \cos(\omega_i t) + k'_i \sin(\omega_i t)], \quad t \geq 0 \quad (3.1.13)$$

以上各式中的系数 k_i, k'_i 均可由初始状态 $y(0^-), y'(0^-), \cdots, y^{(n-1)}(0^-)$ 直接确定。注意, 由于 0^- 时刻以前不存在任何激励, $y_{zi}^{(i)}(0^-)$ 也就是 $y^{(i)}(0^-)$ 。

例 3.1.3 已知某系统为 $y'(t) + 3y(t) = 2x(t)$, 当初始条件 $y(0^-) = 1$, 输入 $x(t) = e^{-2t}u(t)$ 时, 求该系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ 。

解: 由系统的微分方程, 可知其系统特征方程为

$$D(\lambda) = \lambda + 3 = 0$$

其特征根为 $\lambda = -3$, 故零输入响应为

$$y_{zi}(t) = k e^{-3t}, \quad t > 0$$

因为

$$y(0^-) = y_{zi}(0^-) = k = 1$$

该系统的零输入响应 $y_{zi}(t) = e^{-3t}, \quad t > 0$ 。

例 3.1.4 如图 3.1.3 所示电路系统, $x(t)$ 是输入电压源, 以电流 $i(t)$ 作为输出。当初始条件 $i(0^-) = 1, i'(0^-) = 2$, 输入 $x(t) = 0$ 时, 求 $i(t)$ 。

解: 这个系统的方程为

$$\left(5 + p + \frac{6}{p}\right)i(t) = x(t)$$

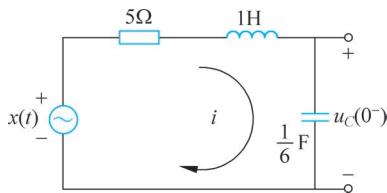


图 3.1.3 RLC 串联二阶系统



仿真求解



仿真求解

因 $x(t)=0$, 求 $i(t)$ 其实就是求该电系统的零输入响应。

相应的方程为

$$(p^2 + 5p + 6)i(t) = 0$$

系统的特征方程为

$$D(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

其特征根为

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3$$

设零输入响应为

$$i(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-3t}$$

由此方程两端及其微分后, 令 $t=0^-$ 得

$$i(0^-) = k_1 + k_2$$

$$i'(0^-) = -2k_1 - 3k_2$$

代入 $i(0^-)=1$ 及 $i'(0^-)=2$ 的值解得

$$k_1 = 5, \quad k_2 = -4$$

最后得 $i(t) = 5e^{-2t} - 4e^{-3t}, t \geq 0$ 。

3.1.3 单位冲激响应

在讨论零状态响应之前, 先来讨论系统的单位冲激响应。系统的单位冲激响应定义为系统的初始状态全部为零, 仅由单位冲激信号输入系统产生的输出响应, 记为 $h(t)$, 如图 3.1.4 所示, 系统的单位冲激响应又称为**系统的冲激响应**。



图 3.1.4 系统的冲激响应

显然, 由于系统的单位冲激响应要求系统初始状态为零且输入信号是单位冲激信号, 因而它仅取决于系统的结构。也就是说, 不同结构的系统, 具有不同的冲激响应。因此, 系统的冲激响应可以表征系统本身的特性。例如, 对于因果系统来说, 其冲激响应必然有

$$h(t) = 0, \quad t < 0$$

当系统的微分方程确定后, 系统的冲激响应可采用冲激平衡法求解。所谓冲激平衡法是指为保持系统微分方程恒等, 方程两边具有的冲激信号及其各阶导数必须恒等。

依据这个原理, 下面讨论如何由 $H(p)$ 来求冲激响应。先讨论一阶系统冲激响应的求解方法, 然后再推广到一般情况。

3.1.3.1 一阶系统的冲激响应

现在考虑一阶系统

$$(p - a)y(t) = (b_1 p + b_0)x(t) \quad (3.1.14)$$

其冲激响应应满足

$$(p-a)h(t)=(b_1p+b_0)\delta(t) \quad (3.1.15)$$

由于冲激信号及其各阶导数仅在 $t=0$ 作用,而在 $t>0$ 时恒为零。因此,系统的冲激响应与该系统的齐次解具有相同的函数形式。由于微分方程的特征根为 $\lambda=a$,故 $h(t)$ 也应为 e^{at} 形式,考虑到式(3.1.15)等号右边有 $\delta'(t)$,依据冲激平衡法原理, $h(t)$ 也应含有 $\delta(t)$ 项,才能使等式两边平衡,因此该系统的冲激响应可写成

$$h(t)=Ae^{at}u(t)+B\delta(t) \quad (3.1.16)$$

式中 A, B 为待定系数。系统冲激响应的导数为

$$h'(t)=B\delta'(t)+Ae^{at}\delta(t)+aAe^{at}u(t)$$

将 A, B 代入式(3.1.15),得

$$B\delta'(t)+Ae^{at}\delta(t)+aAe^{at}u(t)-aAe^{at}u(t)-aB\delta(t)=b_1\delta'(t)+b_0\delta(t)$$

利用冲激信号的性质,可得

$$B\delta'(t)+(A-aB)\delta(t)=b_1\delta'(t)+b_0\delta(t)$$

等式两边 $\delta'(t)$ 与 $\delta(t)$ 的系数分别相等,可得

$$B=b_1, \quad A=b_0+ab_1$$

将 $B=b_1, A=b_0+ab_1$ 代入式(3.1.16),得

$$h(t)=b_1\delta(t)+(b_0+ab_1)e^{at}u(t) \quad (3.1.17)$$

冲激响应为

$$h(t)=H(p)\delta(t)=\frac{b_1p+b_0}{p-a}\delta(t)=b_1\delta(t)+(b_0+ab_1)e^{at}u(t) \quad (3.1.18)$$

特殊地,当 $b_1=0, b_0=b$ 时,

$$h(t)=H(p)\delta(t)=\frac{b}{p-a}\delta(t)=be^{at}u(t) \quad (3.1.19)$$

这样可直接由系统的传输算子通过式(3.1.17)或式(3.1.18)得出系统的冲激响应。

若 $b_1=1, b_0=-a$ 时,式(3.1.18)变为

$$h(t)=H(p)\delta(t)=\frac{p-a}{p-a}\delta(t)=\delta(t)$$

从这里可以得出一个结论:在求冲激响应时,传输算子分子和分母中的公因子可以消去。这就是说,在求冲激响应时,算子式可以完全像普通代数式那样进行运算,只需记住算子与 $\delta(t)$ 的相乘表示了系统对 $\delta(t)$ 的传输而不是使 $\delta(t)$ 乘以一个数值系数。进行传输算子分子、分母中公因子 $p-a$ 的相消,并不会漏掉以 a 为特征根出现的响应模式 e^{at} ,因为本质上是考虑了的,只不过这一响应模式的系数抵消为零了。

例 3.1.5 求系统 $(p+3)y(t)=2x(t)$ 的冲激响应 $h(t)$ 。

解: 此系统的传输算子为 $H(p)=\frac{2}{p+3}$

直接由式(3.1.18)有

$$h(t)=H(p)\delta(t)=\frac{2}{p+3}\delta(t)=2e^{-3t}u(t)$$



仿真求解

对冲激响应,一般乘以 $u(t)$ 明确表示因果性;而对零输入响应,一般不乘以 $u(t)$ 。因为在本质上,零输入响应并不是在 $t < 0$ 以前就不存在。 $t < 0$ 以前系统的输出当然不一定就与零输入响应的变化规律相同,但实际动态系统存在着惯性,其物理量的变化存在着连续性。比如电路中有电流的连续性,如用 $u(t)$ 相乘就必然在数学上强加以不连续性。这一点在用求导方法导入初始条件 $y(0^-)$ 、 $y^{(i)}(0^-)$ ($i=1,2,\dots,n-1$) 时要特别注意。

例 3.1.6 已知系统的微分方程为

$$2y'(t) + 3y(t) = 6x'(t) + 4x(t)$$

求系统的冲激响应 $h(t)$ 。

解: 系统的冲激响应 $h(t)$ 应满足算子微分方程式,即

$$(2p + 3)h(t) = (6p + 4)\delta(t)$$

传输算子为

$$H(p) = \frac{6p + 4}{2p + 3}$$

由式(3.1.18),有

$$\begin{aligned} h(t) &= H(p)\delta(t) = \frac{6p + 4}{2p + 3}\delta(t) \\ &= 3\delta(t) - \frac{5}{2p + 3}\delta(t) \\ &= 3\delta(t) - \frac{5}{2} \frac{1}{p + 3/2}\delta(t) \\ &= 3\delta(t) - \frac{5}{2} e^{-\frac{3}{2}t} u(t) \end{aligned}$$

3.1.3.2 高阶系统的冲激响应

对高阶系统的微分方程可用传输算子法。所谓传输算子法就是将传输算子式变形至一阶传输算子的组合,然后可用 3.1.3.1 节介绍的方法来求解。

设系统方程

$$D(p)y(t) = N(p)x(t)$$

$$\text{即 } (p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0)y(t) = (b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \dots + b_0)x(t)$$

1. $n > m$, 且 $D(p)$ 的根全为单根

可以将传输算子 $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ 作部分分式展开,利用式(3.1.19)来求解。

例 3.1.7 如图 3.1.3 所示电路系统,以 $x(t)$ 为输入, $i(t)$ 为输出,求系统的冲激响应 $h(t)$ 。

解: 从例 3.1.4 中,知系统的算子方程为

$$(p^2 + 5p + 6)i(t) = px(t)$$



仿真求解

传输算子可作部分分式展开如下:

$$H(p) = \frac{p}{p^2 + 5p + 6} = \frac{-2}{p+2} + \frac{3}{p+3}$$

利用式(3.1.19),其冲激响应为

$$\begin{aligned} h(t) &= H(p)\delta(t) = \frac{-2}{p+2}\delta(t) + \frac{3}{p+3}\delta(t) \\ &= -2e^{-2t}u(t) + 3e^{-3t}u(t) \end{aligned}$$

2. $n \leq m$, 且 $D(p)$ 的根全为单根

先直接作 p 的多项式 $N(p)$ 与 $D(p)$ 的除法,直到余下的分式成为真分式后再按第 1 种情况处理。

例 3.1.8 设系统方程的微分方程为

$$y'(t) + 2y(t) = x''(t) + 3x'(t) + 3x(t)$$

求其冲激响应 $h(t)$ 。

解: 由微分方程知传输算子是

$$H(p) = \frac{p^2 + 3p + 3}{p + 2} = p + 1 + \frac{1}{p + 2}$$

故其冲激响应为

$$\begin{aligned} h(t) &= H(p)\delta(t) = p\delta(t) + \delta(t) + \frac{1}{p+2}\delta(t) \\ &= \delta'(t) + \delta(t) + e^{-2t}u(t) \end{aligned}$$

3. 系统有多重特征根

由式(3.1.19)得到

$$\frac{1}{p-a}\delta(t) = e^{at}u(t)$$

由于在求冲激响应时,算子式可以像代数式那样进行运算,故上式两边可以对参数 a 进行微分,于是有

$$\frac{1}{(p-a)^2}\delta(t) = te^{at}u(t)$$

微分下去可得

$$\frac{1}{(p-a)^n}\delta(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}u(t) \quad (3.1.20)$$

这样当系统出现多重特征根时,可以利用式(3.1.20)来计算。

例 3.1.9 设系统方程为

$$(p+1)^3(p+2)y(t) = (4p^3 + 16p^2 + 23p + 13)x(t)$$

求系统的冲激响应 $h(t)$ 。

解: 系统传输算子为



仿真求解

$$\begin{aligned}
 H(p) &= \frac{4p^3 + 16p^2 + 23p + 13}{(p+1)^3(p+2)} \\
 &= \frac{2}{(p+1)^3} + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{3}{p+1} + \frac{1}{p+2}
 \end{aligned}$$

故冲激响应为

$$\begin{aligned}
 h(t) &= H(p)\delta(t) \\
 &= \frac{2}{(p+1)^3}\delta(t) + \frac{1}{(p+1)^2}\delta(t) + \frac{3}{p+1}\delta(t) + \frac{1}{p+2}\delta(t) \\
 &= \frac{2}{2!}t^2e^{-t}u(t) + \frac{1}{1!}te^{-t}u(t) + 3e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \\
 &= t^2e^{-t}u(t) + te^{-t}u(t) + 3e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)
 \end{aligned}$$

4. 避免出现复数模式

系统的响应模式取决于系统的特征根,即使微分方程的系数全为实数,其特征根也可能为复数,故其冲激响应也可能包含复数形式。实际上,如实系统的特征根为复数,则必成对出现,两两成共轭复数。对于系统特征根为复数的情况,如对 $D(p)$ 进行因子分解时将含共轭复根的两因子合并,就可以避免形式上的复数。这样通过只分解到二次因子的办法就可以将系统的冲激响应完全写成实数形式。原来那种分解到一次因子的方法得出的复数响应只是一个表示形式的问题,并非系统的响应真正是复数。

设 a 和 b 都是实数,容易得出,对于方程

$$[(p-a)^2 + b^2]y(t) = bx(t)$$

冲激响应为

$$\begin{aligned}
 h(t) &= H(p)\delta(t) \\
 &= \frac{b}{(p-a)^2 + b^2}\delta(t) = e^{at}\sin(bt)u(t)
 \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

而方程

$$[(p-a)^2 + b^2]y(t) = (p-a)x(t)$$

的冲激响应为

$$\begin{aligned}
 h(t) &= H(p)\delta(t) \\
 &= \frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}\delta(t) = e^{at}\cos(bt)u(t)
 \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

例 3.1.10 一电路系统如图 3.1.5 所示,其中 $x(t)$ 为输入(电流),试分别求以 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 为输出(电压)时的系统的冲激响应 $h(t)$ 。

解: 系统的节点方程为

$$\begin{cases} \left(\frac{p}{2} + 1\right)v_1(t) - \frac{1}{2}v_2(t) = x(t) \\ -\frac{1}{2}v_1(t) + \left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}\right)v_2(t) = 0 \end{cases}$$

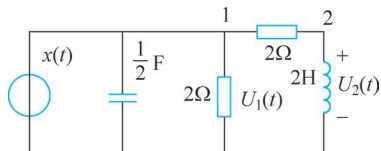


图 3.1.5 例 3.1.10 电路



仿真求解

可解得以 v_1 和 v_2 为输出时的系统方程为

$$\begin{cases} (p^2 + 2p + 2)v_1(t) = 2(p+1)x(t) \\ (p^2 + 2p + 2)v_2(t) = 2px(t) \end{cases}$$

由式(3.1.21)、式(3.1.22)可求得

$$h_1(t) = \frac{2(p+1)}{(p+1)^2 + 1} \delta(t) = 2e^{-t} \cos t u(t)$$

$$h_2(t) = \frac{2(p+1) - 2}{(p+1)^2 + 1} \delta(t) = 2e^{-t} \cos(t)u(t) - 2e^{-t} \sin(t)u(t)$$

也可以利用前面介绍的方法,分解 $D(p) = (p+1)^2 + 1$, 即 $D(p) = (p+1+j)(p+1-j)$, 利用式(3.1.19), 最后用欧拉公式, 两种方法结论是一样的, 读者可自行验证。

3.1.4 零状态响应

3.1.3 节研究了线性时不变系统在零状态条件下, 输入为冲激信号时系统产生冲激响应的过程。冲激响应可以说是零状态响应的一个特例。本节讨论线性时不变系统在任意输入信号下, 零状态响应的求解方法——卷积积分。

任一连续信号 $x(t)$ 都可分解成一系列冲激信号序列, 得到

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

对于线性时不变系统, 若系统的冲激响应为 $h(t)$, 则不难看出, 以下推理是成立的。

由单位冲激响应定义得

$$\delta(t) \rightarrow h(t)$$

由时不变特性

$$\delta(t - \tau_i) \rightarrow h(t - \tau_i)$$

由零状态响应齐次性

$$x(\tau_i) \Delta\tau_i \delta(t - \tau_i) \rightarrow x(\tau_i) \Delta\tau_i h(t - \tau_i)$$

由零状态响应可加性

$$\sum_i x(\tau_i) \Delta\tau_i \delta(t - \tau_i) \rightarrow \sum_i x(\tau_i) \Delta\tau_i h(t - \tau_i)$$

当 τ_i 连续变化, 即 $\Delta\tau_i \rightarrow 0$ 时, 可用连续变化的 τ 代替 τ_i , 无穷小 $d\tau$ 代替 $\Delta\tau_i$, 而把上述无限求和式写成积分式, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

上式左端就是信号 $x(t)$, 右端是当输入为 $x(t)$ 时系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$, 即

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.1.23)$$

将式(3.1.23)与卷积定义式比较, 得到

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) \quad (3.1.24)$$

这表明, 系统对于输入信号 $x(t)$ 的零状态响应 $y_{zs}(t)$, 即是信号 $x(t)$ 与系统的冲激响应 $h(t)$ 的卷积积分。换句话说, 系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 可以通过求输入信号 $x(t)$ 与系统冲激响应 $h(t)$ 的卷积积分来获得。

若系统为因果系统, 输入信号从 $t=0$ 时刻加入, 式(3.1.24)可写成

$$y_{zs}(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (3.1.25)$$

其过程如图 3.1.6 所示。

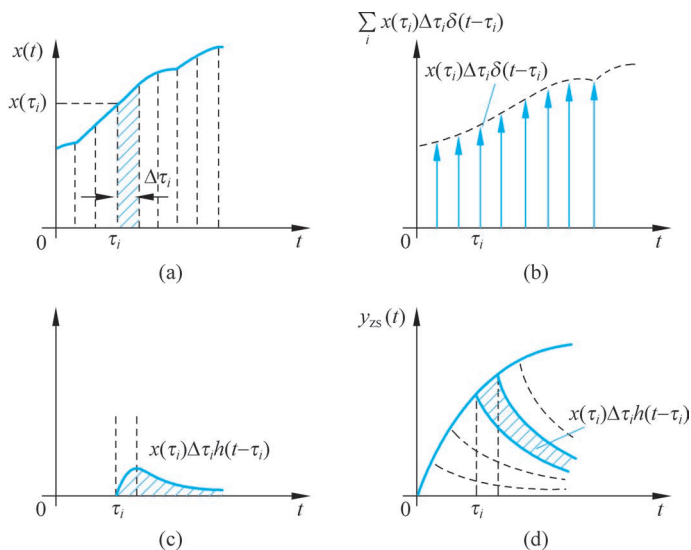


图 3.1.6 系统的零状态响应

因而,在系统分析中,应用卷积积分求系统的零状态响应是一个重要方法,可以利用卷积积分的定义、图解法和性质使计算简化,而且在后面的频域和复频域分析中卷积积分将显示出它独特的优越性。

例 3.1.11 已知一线性时不变系统的冲激响应 $h(t) = e^{-2t}u(t)$, 输入为 $x(t) = u(t)$, 试求零状态响应 $y_{zs}(t)$ 。

解: 将已知 $x(t)$ 和 $h(t)$ 代入式(3.1.24), 则

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

式中,积分变量为 τ 。由于

$$u(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}, \quad u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \tau > t \end{cases}$$

所以积分限应为 $0 < \tau < t$, 注意该不等式隐含了 $t > 0$, 否则积分为 0。故

$$y_{zs}(t) = \left[\int_0^t e^{-2(t-\tau)} d\tau \right] u(t) = -\frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t)$$

到目前为止,已经有三种方式对系统进行具体的描述:微分方程、系统的传输算子和系统的冲激响应。微分方程代表系统,其输入和输出由微分方程联系;传输算子也代表系统,其输出由传输算子对输入作用得出;同样,冲激响应 $h(t)$ 也代表系统,其输出由输入与 $h(t)$ 的卷积积分给定。微分方程和传输算子用于表示系统参数具体给定的系统,冲激响应 $h(t)$ 则可用于表示更一般的系统,如图 3.1.7 所示。有

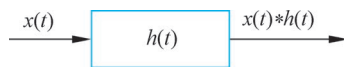


图 3.1.7 系统冲激响应表示



仿真求解

些系统无法用微分方程和传输算子表示,但可用冲激响应表示,如 $h_1(t) = e^{-t^2} u(t)$,

$$h_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} u(t)。$$

当然,凡是可用微分方程和传输算子表示的系统,都能用冲激响应来表示。

考虑系统

$$y(t) = H(p)x(t) \quad (3.1.26)$$

其冲激响应为

$$h(t) = H(p)\delta(t) \quad (3.1.27)$$

设其初始状态为零,则有

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= H(p)x(t) \\ &= x(t) * h(t) = x(t) * [H(p)\delta(t)] \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

可见,用式(3.1.26)表示的系统可理解为式(3.1.28)的卷积关系式。

在 3.1.3 节中已经有了由传输算子得出冲激响应的方法,因此式(3.1.26)中,系统的零状态响应就很容易得到。比如系统

$$y_{zs}(t) = \frac{1}{p-\lambda} x(t)$$

实际上可表示为

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= x(t) * \left[\frac{1}{p-\lambda} \delta(t) \right] \\ &= x(t) * [e^{\lambda t} u(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{\lambda(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

另一方面,任一信号都可当作某系统的冲激响应,因为

$$x(t) = \delta(t) * x(t)$$

如果以上式右端的 $x(t)$ 作为冲激响应,则上式就表明了以右端的 $x(t)$ 为冲激响应的系统的冲激响应即为左端的 $x(t)$,这句话并不是一种简单的同义重复,它深刻地表明了信号与系统之间内在的密不可分的联系。比如 $x(t) = e^{at} u(t)$ 就可看作以 $e^{at} u(t) = \frac{1}{p-a} \delta(t)$ 为冲激

响应或以 $\frac{1}{p-a}$ 为传输算子的系统的冲激响应,以这个信号输入给式(3.1.27)所表示的系统,其零状态响应还可以看作以 $\frac{1}{p-\lambda} \cdot \frac{1}{p-a}$ 为传输算子的系统的冲激响应,有

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= \frac{1}{p-\lambda} x(t) = \frac{1}{p-\lambda} \cdot \frac{1}{p-a} \delta(t) \\ &= \frac{1}{\lambda-a} \left[\frac{1}{p-\lambda} - \frac{1}{p-a} \right] \delta(t) \\ &= \frac{1}{\lambda-a} e^{\lambda t} u(t) - \frac{1}{\lambda-a} e^{at} u(t) \end{aligned}$$

可验证上述结果与式(3.1.29)进行卷积积分的结果是一致的(这里假定 $\lambda \neq a$)。

例 3.1.12 如图 3.1.3 所示电路系统,若 $x(t)=u(t)$, $i(t)$ 为输出,求该系统的冲激响应 $h(t)$ 和零状态响应 $i_{zs}(t)$ 。

解: 由例 3.1.4 可得系统的算子方程为

$$(p^2 + 5p + 6)i(t) = px(t)$$

传输算子为

$$H(p) = \frac{p}{p^2 + 5p + 6} = \frac{-2}{p+2} + \frac{3}{p+3}$$

所以系统的冲激响应为

$$\begin{aligned} h(t) &= H(p)\delta(t) = \frac{-2}{p+2}\delta(t) + \frac{3}{p+3}\delta(t) \\ &= -2e^{-2t}u(t) + 3e^{-3t}u(t) \end{aligned}$$

又因为

$$x(t) = u(t) = \frac{1}{p}\delta(t)$$

系统的零状态响应为

$$\begin{aligned} i_{zs}(t) &= H(p)x(t) \\ &= \frac{p}{p^2 + 5p + 6} \cdot \frac{1}{p}\delta(t) \\ &= \left[\frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3} \right] \delta(t) \\ &= e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t) \end{aligned}$$



仿真求解

3.1.5 连续时间线性时不变系统响应模式分析

3.1.5.1 系统全响应

线性时不变系统的全响应 $y(t)$ 可分解为零输入响应和零状态响应,即

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

求解全响应 $y(t)$, 可分别求出零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$, 再两者相加。

假设系统满足

$$D(p)y(t) = N(p)x(t)$$

其中, $D(p)$ 是 p 的 n 次多项式, $N(p)$ 是 p 的次数不高于 n 的多项式, 又设 $D(p)$ 的根 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都是单根。

由 3.1.2 节知系统的零输入响应为

$$y_{zi}(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + k_n e^{\lambda_n t}, \quad t \geq 0$$

则零输入响应可以表示成如下的向量形式:

$$y_{zi}(t) = [e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}] \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

$$\triangleq \mathbf{E}_\lambda^T \cdot \mathbf{A} \quad (3.1.30)$$

其中, $\mathbf{E}_\lambda = [e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]^T$ 称为零输入响应 $y_{zi}(t)$ 的响应模式向量, $e^{\lambda_i t}$ 称为响应模式, 根据已知初始状态向量 $[y(0^-), y'(0^-), \dots, y^{(n-1)}(0^-)]^T$, 求出 $k_i (i=1, 2, \dots, n)$, 从而得到系数向量 $\mathbf{A}$ 。

由 3.1.4 节知系统的零状态响应为

$$\begin{aligned} y_{zs}(t) &= H(p)x(t) \\ &= \frac{N(p)}{D(p)}x(t) \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

前已述及, 任一信号 $x(t)$ 可看作某系统的冲激响应, 该系统的传输算子可设为 $H_x(p) = \frac{N_x(p)}{D_x(p)}$, 则有

$$\begin{aligned} x(t) &= H_x(p)\delta(t) \\ &= \frac{N_x(p)}{D_x(p)}\delta(t) \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

其中, $D_x(p)$ 是 p 的 m 次多项式, $N_x(p)$ 是 p 的次数不高于 m 的多项式。设 $D_x(p)$ 的根 $\xi_i (i=1, 2, \dots, m)$ 都是单根, 且 $\xi_i \neq \lambda_i$, 代入式 (3.1.31), 得

$$y_{zs}(t) = \frac{N(p)}{D(p)} \cdot \frac{N_x(p)}{D_x(p)} \delta(t) \quad (3.1.33)$$

也就是说, 零状态响应也可看作以 $\frac{N(p)}{D(p)} \cdot \frac{N_x(p)}{D_x(p)}$ 为传输算子的系统的冲激响应。

$e^{\lambda_i t} (i=1, 2, \dots, n)$ 及 $e^{\xi_i t} (i=1, 2, \dots, m)$ 分别是 $H(p)$ 、 $H_x(p)$ 所表示系统的响应模式, 并记 $\mathbf{E}_\xi = [e^{\xi_1 t}, e^{\xi_2 t}, \dots, e^{\xi_m t}]^T$, 则系统零状态响应的响应模式将由 $\mathbf{E}_\lambda$ 和 $\mathbf{E}_\xi$ 两部分组成, 零状态响应可以表示成

$$y_{zs}(t) = \mathbf{E}_\lambda^T \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E}_\xi^T \cdot \mathbf{C} \quad (3.1.34)$$

其中, $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 都是系数向量, 是一个列矩阵。

可见最后系统的全响应可写成

$$y(t) = \underbrace{\mathbf{E}_\lambda^T \cdot \mathbf{A}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\mathbf{E}_\lambda^T \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E}_\xi^T \cdot \mathbf{C}}_{\text{零状态响应}} \quad (3.1.35)$$

注意: 当 λ_i 与 ξ_i 相同时, 或它们不是单根时, 分析类似。只是要注意, 此时将会产生 $te^{\xi_i t}$ 、 $te^{\lambda_i t}$ 等模式。

例 3.1.13 设系统方程为

$$y'(t) - \lambda y(t) = x(t)$$

输入信号 $x(t) = e^{\xi t} u(t)$, $\xi \neq \lambda$, $y(0^-) = a$, 求系统的全响应 $y(t)$ 。

解: 系统的传输算子 $H(p) = \frac{1}{p - \lambda}$

输入信号 $x(t) = e^{\xi t} u(t) = \frac{1}{p - \xi} \delta(t)$



仿真求解

$$\begin{aligned}
y_{zi}(t) &= a e^{\lambda t}, \quad t \geq 0 \\
y_{zs}(t) &= \left[\frac{1}{p-\lambda} \cdot \frac{1}{p-\xi} \right] \delta(t) \\
&= \frac{1}{\lambda-\xi} \left[\frac{1}{p-\lambda} - \frac{1}{p-\xi} \right] \delta(t) \\
&= \frac{1}{\lambda-\xi} e^{\lambda t} u(t) - \frac{1}{\lambda-\xi} e^{\xi t} u(t)
\end{aligned}$$

系统的全响应为

$$y(t) = a e^{\lambda t} + \frac{1}{\lambda-\xi} e^{\lambda t} u(t) - \frac{1}{\lambda-\xi} e^{\xi t} u(t), \quad t \geq 0$$

由于这是一个一阶系统,且输入信号也可以理解为一阶系统的冲激响应,故 E_λ 、 E_ξ 、 A 、 B 和 C 各响应模式及其系数向量都退化为标量:

$$\begin{aligned}
E_\lambda &= e^{\lambda t}, \quad E_\xi = e^{\xi t}, \\
A &= a, \quad B = \frac{1}{\lambda-\xi}, \quad C = -\frac{1}{\lambda-\xi}
\end{aligned}$$

3.1.5.2 自然响应和强迫响应

从系统响应的一般表示式(3.1.35)可知, E_λ 是完全由系统的特征根决定的响应模式,与输入信号无关,因而可以称为**系统的自然响应模式**或**固有模式**;而 E_ξ 则是完全由输入信号决定的(信号的模式),是信号强迫系统产生出的响应模式,因此称为**强迫响应模式**。这样,系统的响应除了划分成零输入响应和零状态响应两类外,又可以划分成自然响应和强迫响应两类,即

$$y(t) = \underbrace{E_\lambda^T \cdot A + E_\lambda^T \cdot B}_{\text{自然响应}} + \underbrace{E_\xi^T \cdot C}_{\text{强迫响应}} \quad (3.1.36)$$

需要注意的是,自然响应虽与零输入响应具有相同的响应模式,但并不等同于零输入响应。一方面,没有外加信号时,由系统的初始储能可以引起自然响应;另一方面,即使系统的初始条件全部为零而只加上信号,也会产生自然响应。在例 3.1.11 中, $a e^{\lambda t}$ 和 $\frac{1}{\lambda-\xi} e^{\lambda t}$ 都是自然响应,尽管后者是由输入强迫引起的。而其中只有 $-\frac{1}{\lambda-\xi} e^{\xi t}$ 才是强迫响应,因为只有 $e^{\xi t}$ 这样的响应模式才与系统特性无关。

3.1.5.3 瞬态响应和稳态响应

在很多情况下,系统的响应由以下两部分组成:一部分随时间的增加而衰减,并且最终完全消失;其余部分则一直保留下来。它们分别称为**瞬态分量**和**稳态分量**。

例如在例 3.1.11 中,如果 $\lambda = -2, \xi = 3$,则自然响应为 $a e^{-2t} + \frac{1}{-2-3} e^{-2t} u(t), t \geq 0$ 最终将消失。而强迫响应为 $-\frac{1}{-2-3} e^{3t} u(t)$ 将一直保留下来。此时自然响应是瞬态分量,

而强迫响应是稳态分量。但如果 $\lambda = -2, \xi = -3$, 则自然响应为 $ae^{-2t} + \frac{1}{-2+3}e^{-3t}u(t)$, $t \geq 0$, 强迫响应为 $-\frac{1}{-2+3}e^{-3t}u(t)$, 二者最终都将消失, 于是它们都是瞬态分量——整个响应全是瞬态响应。

一般来说, 对于稳定系统, 其特征根(极点)小于零(或其实部小于零), 自然响应必然随着时间的增长而衰减, 其自然响应必须是瞬态的; 而对于不稳定系统, 其特征根(或其实部)不小于零, 自然响应必然不随着时间的增长而衰减, 其自然响应就是稳态的。如果输入信号不随着时间的增长而衰减, 系统的强迫响应就是稳态的; 如果输入信号随着时间的增长而衰减, 系统的强迫响应就是瞬态的。

3.2 离散时间线性时不变系统的时域分析

3.2.1 线性时不变系统的数学模型

对于离散时间线性时不变系统, 信号的自变量是离散量, 系统可用常系数差分方程来描述, 其一般形式为

$$a_k y(n+k) + a_{k-1} y(n+k-1) + \cdots + a_1 y(n+1) + a_0 y(n) = b_m x(n+m) + b_{m-1} x(n+m-1) + \cdots + b_1 x(n+1) + b_0 x(n) \quad (3.2.1)$$

或写作

$$\sum_{i=0}^k a_i y(n+i) = \sum_{j=0}^m b_j x(n+j), \quad m \leq k$$

式中, $x(n+j)$ ($j=0, 1, \cdots, m$) 是输入及其移位序列; $y(n+i)$ ($i=0, 1, \cdots, n$) 是响应及其移位序列, 差分方程的阶数等于未知响应序列的最高序号与最低序号之差, 因此式(3.2.1)是一个 k 阶差分方程式。

在式(3.2.1)的差分方程中, 各序列的序号自 n 以递增方式给出, 称为前向差分方程。差分方程也可以用另一种形式, 即

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_{k-1} y(n-k+1) + a_k y(n-k) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_{m-1} x(n-m+1) + b_m x(n-m) \quad (3.2.2)$$

或写作

$$\sum_{i=0}^k a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^m b_j x(n-j), \quad m \leq k$$

此式中各序列的序号自 n 以递减的方式给出, 称为后向差分方程。

在常系数线性差分方程中, 各序列的序号都增加或减少同样的数目, 该差分方程所描述的输入和输出关系不变, 因此能够容易地将前向差分方程改写为后向差分方程, 或者反之。例如:

$$y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = x(n+1) + x(n)$$

为常系数线性二阶前向差分方程,如将各序列的序号均减2,即可改写成

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n-1) + x(n-2)$$

而变为常系数线性二阶后向差分方程。在应用中,究竟采用哪种形式的差分方程比较方便,要视具体情况而定。

下面通过几个例子来说明如何建立离散时间系统的差分方程。

例 3.2.1 一质点沿水平方向做直线运动,它在某秒内所走的距离等于前一秒内所走距离的2倍,试列出描述该质点行程的方程。

解: 这里行程是离散时间变量 n 的函数。

设 $y(n)$ 表示质点在第 n 秒末的行程, $y(n+1)$ 表示在第 $n+1$ 秒末的行程,……,则依据题意,有

$$y(n+2) - y(n+1) = 2[y(n+1) - y(n)]$$

整理为

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 0$$

这是一个二阶常系数线性前向差分方程。

例 3.2.2 一信号处理过程是:每当接收到一个数据,就将此数据与前一步的处理结果平均。求这一信号处理过程的输入-输出关系。

解: 设当前序号为 n ,输入为 $x(n)$,输出为 $y(n)$,则前一步的序号为 $n-1$,输出为 $y(n-1)$,按题意,当前输出 $y(n)$ 应是当前输入 $x(n)$ 与前一步输出 $y(n-1)$ 的平均值,即

$$y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + y(n-1)]$$

亦即

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = \frac{1}{2}x(n)$$

这一过程可用图 3.2.1 所示的框图表示。

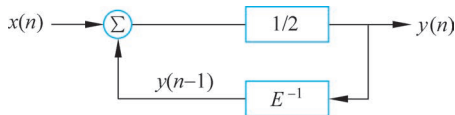


图 3.2.1 一阶后向差分方程系统

例 3.2.3 如图 3.2.2 所示的电阻梯形网络,其各支路电阻都为 R ,各个节点对地的电压记为 $v(n)$, $n=0,1,\dots,N$,求任一节点电压应满足的差分方程。

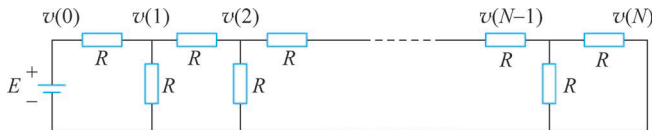


图 3.2.2 电阻梯形网络

解: 对于在节点 $n-1$,运用节点电流定律可得

$$\frac{v(n-1)}{R} = \frac{v(n) - v(n-1)}{R} + \frac{v(n-2) - v(n-1)}{R}$$

整理得

$$v(n) - 3v(n-1) + v(n-2) = 0$$

这是一个二阶常系数线性后向差分方程。很明显对此方程有两个附加条件,即 $v(0)=E, v(N)=0$, 由这个附加条件可以求出该方程的解(是一个零输入的解)。

如果不是对 $n-1$ 点而对 $n+1$ 点列节点电流方程, 则可以得到二阶前向差分方程

$$v(n+2) - 3v(n+1) + v(n) = 0$$

由于两者描述的是同一事物, 所以两个差分方程并无本质不同。

值得注意的是, 本例中离散变量 n 并不代表时间, 而是代表图中节点的序号。由此可见, 差分方程是一种描述离散函数关系的数学工具, 离散变量并不限于是时间变量。 n 作为离散时间信号的变量只不过是到了与连续时间信号和系统的概念相对应而已。

在连续时间系统中, 曾引入微分算子 p 和 $1/p$ 分别表示对信号的微分和积分运算。与此类似, 对于离散系统, 引入移位算子 E 和 E^{-1} 表示将序列超前或延迟一个单位时间的运算, 有时也称为差分算子。

利用移位算子可将式(3.2.1)的 k 阶差分方程改写为

$$\begin{aligned} & (a_k E^k + a_{k-1} E^{k-1} + \cdots + a_1 E + a_0) y(n) \\ & = (b_m E^m + b_{m-1} E^{m-1} + \cdots + b_1 E + b_0) x(n) \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

简记为

$$D(E)y(n) = N(E)x(n) \quad (3.2.4)$$

进一步可记为

$$y(n) = \frac{N(E)}{D(E)} x(n) = H(E)x(n) \quad (3.2.5)$$

这里, $H(E)$ 称为离散时间系统的**传输算子**, 它在离散系统分析中的作用与连续系统中的 $H(p)$ 相同, $H(E)$ 表明了系统对输入作用而产生输出的规则, 是一个算子运算。这样, 离散系统除直接用差分方程表示外, 也可用传输算子来表示, 如图 3.2.3 所示。

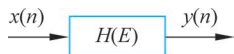


图 3.2.3 离散系统的传输算子表示

对于例 3.2.2 所述系统, 其差分方程的算子形式为

$$y(n) - \frac{1}{2} E^{-1} y(n) = \frac{1}{2} x(n)$$

故其传输算子为

$$H(E) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2} E^{-1}} = \frac{E}{2E - 1}$$

求解差分方程的方法有以下几种。

1. 递推解法

以例 3.2.2 中得到的差分方程

$$y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = \frac{1}{2}x(n)$$

的求解为例, 设 $x(n] = \delta(n)$, 按系统的因果性 $y(-1) = 0$, 从而

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{1}{2}y(-1) + \frac{1}{2}x(0) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \\ y(1) &= \frac{1}{2}y(0) + \frac{1}{2}x(1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ y(2) &= \frac{1}{2}y(1) + \frac{1}{2}x(2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times 0 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

由此得

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

递推解法用计算机较为方便。这种方法简单, 概念清楚, 但一般只能得出数值解而不能直接给出完整的解析解。

2. 时域经典法

这种方法实际上是求差分方程的齐次解与特解, 这种方法虽然是基本的, 但求解较麻烦, 现已较少采用。

3. 零输入响应与零状态响应

利用线性系统的分解性, 将响应分成零输入与零状态两个分量, 用范德蒙矩阵方法求零输入响应, 用卷积和方法求零状态响应。这是目前通行的时域解法, 也是本节需重点讨论的问题之一。

4. 其他方法

还有 z 变换法和状态空间分析法, 这两种方法都是通过变换域来求解差分方程, 将在第 6 章讨论。

3.2.2 零输入响应

类似于线性时不变的连续时间系统, 线性时不变的离散时间系统的响应也具有分解性, 即其响应可以分解成零输入响应和零状态响应两部分。在 3.1 节中, 从描述系统的微分方程或传输算子 $H(p)$ 出发, 分别求出系统的零输入响应和零状态响应, 然后把它们叠加起来得到系统的全响应。这种做法同样适用于离散系统的时域分析, 只是在离散时间系统分析中, 讨论问题的出发点是描述系统的差分方程或传输算子 $H(E)$; 此外, 求解系统零状态响应时, 需要进行的不是连续时间信号的卷积积分, 而是离散时间信号的卷积和计算。本节先讨论离散时间系统零输入响应的求解方法。

如前所述, 一个描述 k 阶线性时不变离散系统的差分方程, 若用算子表示, 可写成

$$D(E)y(n) = N(E)x(n) \quad (3.2.6)$$

其中,传输算子为

$$H(E) = \frac{N(E)}{D(E)} = \frac{b_m E^m + b_{m-1} E^{m-1} + \cdots + b_1 E + b_0}{a_k E^k + a_{k-1} E^{k-1} + \cdots + a_1 E + a_0}$$

零输入响应是输入信号 $x(n)$ 加入之前由系统原来的初始状态决定的。由此可见,对于系统差分方程(3.2.6),若令输入信号 $x(n)$ 为零,即可得到零输入响应,记作 $y_{zi}(n)$,它应满足的差分方程的一般形式为

$$(a_k E^k + a_{k-1} E^{k-1} + \cdots + a_1 E + a_0)y_{zi}(n) = 0 \quad (3.2.7)$$

具体地说,离散时间系统的零输入响应就是齐次差分方程满足初始条件时的解。

先考虑一阶差分方程

$$(E - \lambda)y_{zi}(n) = 0 \quad (3.2.8)$$

表明系统传输算子 $H(E)$ 仅含有单个特征根 λ 。式(3.2.8)是一个一阶齐次差分方程,容易验证其解为

$$y_{zi}(n) = c\lambda^n \quad (3.2.9)$$

式中, c 为常数,由系统的零输入初始条件确定。

因此,有以下结论:

$$H(E) = \frac{1}{E - \lambda} \longrightarrow y_{zi}(n) = c\lambda^n \quad (3.2.10)$$

如果系统传输算子 $H(E)$ 仅含有 k 个单特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, 且 $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_k$, 则相应的齐次差分方程可写成

$$(E - \lambda_1)(E - \lambda_2) \cdots (E - \lambda_k)y_{zi}(n) = 0 \quad (3.2.11)$$

其解为

$$y_{zi}(n) = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \cdots + c_k \lambda_k^n \quad (3.2.12)$$

式中, $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 由系统零输入初始条件确定。于是有结论

$$H(E) = \frac{1}{(E - \lambda_1)(E - \lambda_2) \cdots (E - \lambda_k)} \longrightarrow y_{zi}(n) = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^n \quad (3.2.13)$$

例 3.2.4 二阶差分方程系统

$$y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = x(n)$$

的初始值 $y_{zi}(0) = 1, y_{zi}(1) = 5$, 求其零输入响应 $y_{zi}(n)$ 。

解: 由方程可得传输算子为

$$H(E) = \frac{1}{E^2 - 5E + 6} = \frac{1}{(E - 3)(E - 2)}$$

系统的特征根为 $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ 。

所以 $y_{zi}(n) = c_1 3^n + c_2 2^n, n \geq 0$

令 $n = 0, 1$, 代入初始值得

$$\begin{cases} y_{zi}(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y_{zi}(1) = 3c_1 + 2c_2 = 5 \end{cases}$$



仿真求解

联立上述方程,求解得

$$c_1 = 3, \quad c_2 = -2$$

故最终有

$$y_{zi}(n) = 3 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n, \quad n \geq 0$$

n 阶连续时间系统的初始条件是 $t=0^-$ 时刻 $y_{zi}(t)$ 及其直到 $(n-1)$ 阶各阶导数的值,与 $t=0$ 以后情况无关。而 k 阶离散时间系统的初始条件 $y_{zi}(n)$ 在 $n=0, 1, \dots, k-1$ 处的样点值,与 $n=0$ 以后的情况有关。这是两类系统的不同之处。因此,对连续系统,不存在因果输入对初始条件的影响问题;而对离散系统,即使是因果输入,对系统的初始条件都是有影响的,这是由于输入信号一般是 $n=0$ 开始加入系统,当 $n < 0$ 时,零状态响应 $y_{zs}(n)=0$,此时 $y(n)=y_{zi}(n)$,即 $y(-1)=y_{zi}(-1)$;而当 $n \geq 0$ 时 $y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)$,即 $y(0)=y_{zi}(0)+y_{zs}(0), \dots, y(k-1)=y_{zi}(k-1)+y_{zs}(k-1)$ 。

用以求零输入响应的必须是系统的零输入初始条件,这点一定要引起注意。

当系统含有特征根为一个 $q(q \leq k)$ 阶重特征根时,式(3.2.7)将分解成

$$(E - \lambda_1)^q (E - \lambda_{q+1}) \cdots (E - \lambda_k) y_{zi}(n) = 0 \quad (3.2.14)$$

其解将具有如下形式:

$$y_{zi}(n) = (c_1 + c_2 n + \cdots + c_q n^{q-1}) \lambda_1^n + c_{q+1} \lambda_{q+1}^n + \cdots + c_k \lambda_k^n \quad (3.2.15)$$

式中, $c_1, c_2, \dots, c_k$ 由系统的零输入初始条件决定。

例 3.2.5 差分方程系统

$$y(n) - 7y(n-1) + 16y(n-2) - 12y(n-3) = 0$$

的初始值 $y(1)=-1, y(2)=-3, y(3)=-5$, 求其零输入响应 $y_{zi}(n)$ 。

解: 本题方程是后向差分方程,将其变成前向差分方程后,利用上面的结论来解题。

$$y(n+3) - 7y(n+2) + 16y(n+1) - 12y(n) = 0$$

传输算子为

$$H(E) = \frac{1}{E^3 - 7E^2 + 16E - 12} = \frac{1}{(E-3)(E-2)^2}$$

特征根为

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2 \text{ (2重根)}$$

所以

$$y_{zi}(n) = (c_1 + c_2 n) 2^n + c_3 3^n, \quad n \geq 0$$

本题的初始值是

$$y(1) = -1, y(2) = -3, y(3) = -5$$

因为输入信号 $x(n)=0$, 所以 $y_{zi}(n)=y(n)$, 故得

$$y_{zi}(1) = y(1) = -1, \quad y_{zi}(2) = y(2) = -3, \quad y_{zi}(3) = y(3) = -5$$

令 $n=1, 2, 3$, 代入初始值得

$$y_{zi}(1) = (c_1 + c_2) 2 + c_3 3 = -1$$

$$y_{zi}(2) = (c_1 + 2c_2) \cdot 4 + 9 \cdot c_3 = -3$$

$$y_{zi}(3) = (c_1 + 3c_2) \cdot 8 + 27 \cdot c_3 = -5$$

联立方程组,解得

$$c_1 = -1, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 1$$

最终得

$$y_{zi}(n) = (-1-n) \cdot 2^n + 3^n, \quad n \geq 0$$



仿真求解

与连续系统特征根一样,离散系统特征根中也会出现复根,它们也必定共轭成对出现,设离散系统的共轭根为

$$\lambda = re^{j\phi}, \quad \lambda^* = re^{-j\phi}$$

则其零输入响应为

$$\begin{aligned} y_{zi}(n) &= c_1(re^{j\phi})^n + c_2(re^{-j\phi})^n \\ &= r^n(c_1e^{jn\phi} + c_2e^{-jn\phi}) \\ &= r^n[(c_1 + c_2)\cos(n\phi) + j(c_1 - c_2)\sin(n\phi)] \\ &= r^n[c'_1\cos(n\phi) + c'_2\sin(n\phi)] \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

其中, $c'_1 = c_1 + c_2$; $c'_2 = j(c_1 - c_2)$ 。

具体值由初始状态确定。可见,当系统出现复根时,随 r 的取值不同,系统的零输入响应可能是等幅、增长或衰减的正弦(余弦)序列。

例 3.2.6 差分方程系统

$$y(n+2) + 0.25y(n) = x(n+1) - 2x(n)$$

的初始值为 $y_{zi}(0) = 2, y_{zi}(1) = 3$, 试求其零输入响应 $y_{zi}(n)$ 。

解: 由方程得传输算子为

$$H(E) = \frac{E - 2}{E^2 + 0.25}$$

其特征根是一对共轭复根:

$$\lambda_1 = j0.5 = 0.5e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad \lambda_2 = -j0.5 = 0.5e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

由式(3.2.16)得

$$y_{zi}(n) = (0.5)^n \left[c_1 \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) + jc_2 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

令 $n=0, 1$, 代入初始值, 得

$$y_{zi}(0) = c_1 = 2$$

$$y_{zi}(1) = 0.5 \left[c_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + jc_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = 3$$

联立方程得

$$c_1 = 2, \quad c_2 = -6j$$

所以

$$y_{zi}(n) = (0.5)^n \left(2\cos \frac{n\pi}{2} + 3\sin \frac{n\pi}{2} \right), \quad n \geq 0$$

3.2.3 单位样值响应

离散时间系统对于单位样值信号的响应称为系统的**单位样值响应**, 又称单位冲激响应, 记作 $h(n)$ 。单位样值响应 $h(n)$ 可由系统的传输算子 $H(E)$ 求出, 下面的讨论, 限于讨论因果线性时不变系统的几个具体例子情况。

例 3.2.7 若系统传输算子为 $H(E) = E^k$, 求系统的单位样值响应 $h(n)$ 。

解: 由式(3.2.5)可得



仿真求解

$$\begin{aligned}
 y(n) &= E^k x(n) \\
 \text{令 } x(n) &= \delta(n), \text{ 此时 } y(n) = h(n), \text{ 于是有} \\
 h(n) &= E^k \delta(n) = \delta(n+k) \\
 \text{所以} \quad H(E) &= E^k \\
 \text{可得} \quad h(n) &= \delta(n+k)
 \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

例 3.2.8 若系统的传输算子为

$$H(E) = \frac{E}{E - \lambda}$$

求系统的单位样值响应 $h(n)$ 。

解：由式(3.2.5)可得

$$\begin{aligned}
 (E - \lambda)y(n) &= Ex(n) \\
 \text{令 } x(n) &= \delta(n), y(n) = h(n), \text{ 故有} \\
 (E - \lambda)h(n) &= E\delta(n) \\
 \text{或} \quad h(n+1) - \lambda h(n) &= \delta(n+1) \\
 \text{即} \quad h(n) &= \lambda h(n-1) + \delta(n) \\
 \text{由于} \quad \delta(n+1) &= 0, \quad n \leq -2 \\
 \text{同时, 对于因果系统必有}
 \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

$$h(n+1) = 0, \quad n \leq -2$$

利用上式作为初始条件,用递推法可由式(3.2.18)求得 $h(n)$ 的各个序列项。分别令式(3.2.18)中 $n = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, 可得

$$\begin{aligned}
 h(-1) &= \lambda h(-2) + \delta(-1) = 0 \\
 h(0) &= \lambda h(-1) + \delta(0) = 1 \\
 h(1) &= \lambda h(0) + \delta(1) = \lambda \\
 h(2) &= \lambda h(1) + \delta(2) = \lambda^2 \\
 &\vdots \\
 h(n) &= \lambda h(n-1) + \delta(n) = \lambda \cdot \lambda^{n-1} = \lambda^n
 \end{aligned}$$

即 $h(n) = \lambda^n u(n)$

按式(3.2.18)的算子表示,形式上将有

$$h(n) = \frac{E}{E - \lambda} \delta(n) = \lambda^n u(n)$$

$$\text{即} \quad \frac{E}{E - \lambda} \delta(n) = \lambda^n u(n) \tag{3.2.19}$$

在式(3.2.19)两边对 λ 进行微分运算,有

$$\begin{aligned}
 \frac{E}{(E - \lambda)^2} \delta(n) &= n \lambda^{n-1} u(n) \\
 \frac{E}{(E - \lambda)^3} \delta(n) &= \frac{n(n-1)}{2!} \lambda^{n-2} u(n) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$\frac{E}{(E-\lambda)^m} \delta(n) = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+2)}{(m-1)!} \lambda^{n-m+1} u(n) \quad (3.2.20)$$

现在来总结一下由传输算子 $H(E)$ 求解 $h(n)$ 的一般方法, 设离散时间系统的传输算子为

$$H(E) = \frac{b_m E^m + b_{m-1} E^{m-1} + \cdots + b_1 E + b_0}{a_k E^k + a_{k-1} E^{k-1} + \cdots + a_1 E + a_0}, \quad k \geq m$$

求单位样值响应 $h(n)$ 的方法如下:

(1) 从 $H(E)$ 中提出一个 E , 得到 $H(E) = EH'(E)$ ($H'(E)$ 是提出 E 后 $H(E)$ 的余式);

(2) 将 $H'(E)$ 进行部分分式展开;

(3) 将 E 再乘入部分分式展开式, 得到 $H(E)$ 的部分分式展开式

$$H(E) = \sum_{i=1}^p H_i(E) = \sum_{i=1}^p \frac{A_i E}{(E - \lambda_i)^{q_i}}$$

式中, λ_i 为系统的特征根; q_i 为该特征根的重数; A_i 为部分分式项系数; p 为 $H(E)$ 相异特征根个数;

(4) 利用式(3.2.19)和式(3.2.20), 求出每个 $H_i(E)$ 对应的单位样值响应分量 $h_i(n)$;

(5) 相加, 求出系统的单位样值响应

$$h(n) = \sum_{i=1}^p h_i(n)$$

例 3.2.9 一系统的差分方程为

$$y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = 2x(n+1) + x(n)$$

求其单位样值响应 $h(n)$ 。

解: 由方程可得传输算子为

$$\begin{aligned} H(E) &= \frac{2E+1}{E^2+3E+2} \\ &= E \cdot \frac{2E+1}{E(E+1)(E+2)} \\ &= E \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{E} + \frac{1}{E+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{E+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{E}{E+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{E}{E+2} \end{aligned}$$

利用式(3.2.19), 有

$$h(n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{E}{E+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{E}{E+2} \right) \delta(n) = \frac{1}{2} \delta(n) + (-1)^n u(n) - \frac{3}{2} (-2)^n u(n)$$

例 3.2.10 系统的传输算子为

$$H(E) = \frac{2E^3 - 4E + 1}{(E-1)^2(E-2)}$$



仿真求解

求其单位样值响应 $h(n)$ 。

解:

$$\begin{aligned} h(n) &= H(E)\delta(n) \\ &= E \cdot \frac{2E^2 - 4E + 1}{(E-1)^2(E-2)}\delta(n) \\ &= \left(\frac{E}{(E-1)^2} + \frac{E}{E-1} + \frac{E}{E-2} \right)\delta(n) \end{aligned}$$

由式(3.2.19)和式(3.2.20)可得

$$h(n) = nu(n) + u(n) + 2^n u(n)$$

3.2.4 零状态响应

设系统的起始观察时间为 n_0 , 离散时间系统的**零状态响应**是指该系统在 n_0 时刻的状态为零或者 $n < n_0$ 时的输入为零时, 仅由 $n \geq n_0$ 时加入的输入所引起的响应, 记为 $y_{zs}(n)$, 通常取观察时间 $n_0 = 0$, 所以表达式 $y_{zs}(n)$ 之后一般要乘以 $u(n)$ 。

在连续时间系统分析中, 先求出系统对单位冲激信号 $\delta(t)$ 的零状态响应, 即单位冲激响应 $h(t)$, 然后利用信号的分解特性和系统的线性时不变特性, 导出系统对于任意信号作用时的零状态响应的求解方法。对于离散时间系统也是如此。

设离散时间系统的输入为 $x(n)$, 对应的零状态响应为 $y_{zs}(n)$ 。输入 $x(n)$ 可以表示成无穷多个单位样值信号的线性组合, 即

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

根据离散时间线性系统特性, 可利用单位样值响应 $h(n)$, 分别求出每个位移样值信号 $x(k)\delta(n-k)$ 作用于系统的零状态响应, 把它们叠加起来就可以得到系统对输入 $x(n)$ 的零状态响应 $y_{zs}(n)$ 。因此, 也可采用连续时间系统中类似的做法推导出离散时间系统零状态响应的计算公式。对于离散时间线性时不变系统, 有如下输入-零状态响应关系。

由单位样值响应定义得

$$\delta(n) \rightarrow h(n)$$

由时不变特性

$$\delta(n-k) \rightarrow h(n-k)$$

由零状态响应齐次性

$$x(k)\delta(n-k) \rightarrow x(k)h(n-k)$$

由零状态响应可加性

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

由式(2.5.25)序列卷积和定义可得

$$x(n) \rightarrow y_{zs}(n)$$

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$y_{zs}(n) = x(n) * h(n) \quad (3.2.21)$$

这就表明线性时不变离散时间**系统的零状态响应等于输入信号和单位样值响应的卷积和**。



动画

物理可实现的系统是因果的,其单位样值序列应满足

$$h(n) = h(n)u(n)$$

因此,因果系统的零状态响应为

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)u(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^n x(k)h(n-k) \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

对于因果系统,若输入的是单边序列 $x(n) = x(n)u(n)$,其零状态响应为

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= \sum_{k=-\infty}^n x(k)u(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

例 3.2.11 已知离散时间系统的输入信号 $x(n) = u(n) - u(n-5)$,单位样值响应

$$h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), \text{ 试求系统的零状态响应 } y_{zs}(n)。$$

解: 由式(3.2.21)知

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= x(n) * h(n) \\ &= [u(n) - u(n-5)] * h(n) \end{aligned}$$

由卷积和的分配律

$$y_{zs}(n) = u(n) * h(n) - u(n-5) * h(n)$$

利用例 2.5.3 的结果

$$y_{zs1}(n) = u(n) * h(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n)$$

由线性系统的时不变特性

$$y_{zs2}(n) = u(n-5) * h(n) = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\right] u(n-5)$$

于是有

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= y_{zs1}(n) + y_{zs2}(n) \\ &= \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u(n) - \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}\right] u(n-5) \end{aligned}$$

3.2.5 离散时间线性时不变系统响应模式分析

本节分析一种典型情况,设离散系统的传输算子 $H(E) = N(E)/D(E)$ 是有理式,输入信号 $x(n)$ 也可看作某一个传输算子是有理分式的系统的单位样值响应,即

$$x(n) = \frac{N_x(E)}{D_x(E)} \delta(n)$$



仿真求解

很明显,零输入响应的分量应具有 λ_i^n 的形式,这里 $\lambda_i (i=1,2,\cdots,k)$ 是 k 阶系统的特征根,即 $D(E)=0$ 的根(假定都是单根)。令模式向量

$$\mathbf{E}_\lambda = [\lambda_1^n, \lambda_2^n, \cdots, \lambda_k^n]^T$$

系数向量

$$\mathbf{A} = [a_1, a_2, \cdots, a_k]^T$$

则零输入响应可以写成

$$y_{zi}(n) = \mathbf{E}_\lambda^T \cdot \mathbf{A} \quad (3.2.24)$$

系统的零状态响应则为

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= H(E)x(n) \\ &= \frac{N_y(E)}{D_y(E)} \cdot \frac{N_x(E)}{D_x(E)} \cdot \delta(n) \\ &= \frac{N_y(E) \cdot N_x(E)}{D_y(E) \cdot D_x(E)} \delta(n) \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

按式(3.2.24), $y_{zs}(n)$ 除了有 λ_i^n 的模式外,还应有 ξ_i^n 的模式, $\xi_i (i=1,2,\cdots,m)$ 是输入信号的特征根,即方程

$$D_x(E) = 0$$

的根,并假定为单根。令模式向量

$$\mathbf{E}_\xi = [\xi_1^n, \xi_2^n, \cdots, \xi_m^n]^T$$

并令系数向量

$$\mathbf{B} = [b_1, b_2, \cdots, b_k]^T$$

$$\mathbf{C} = [c_1, c_2, \cdots, c_m]^T$$

则零状态响应可以写成

$$y_{zs}(n) = \mathbf{E}_\lambda^T \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E}_\xi^T \cdot \mathbf{C} \quad (3.2.26)$$

从而系统的全响应为

$$\begin{aligned} y(n) &= y_{zi}(n) + y_{zs}(n) \\ &= \underbrace{\mathbf{E}_\lambda^T \cdot \mathbf{A}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\mathbf{E}_\lambda^T \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E}_\xi^T \cdot \mathbf{C}}_{\text{零状态响应}} \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

其中, $\mathbf{E}_\lambda$ 是系统固有的响应模式,不管有无信号,以什么样的信号输入,模式向量 $\mathbf{E}_\lambda$ 都是不变的,因此, $\mathbf{E}_\lambda^T \cdot \mathbf{A} + \mathbf{E}_\lambda^T \cdot \mathbf{B}$ 称为**自然响应**。而 $\mathbf{E}_\xi$ 是由输入信号决定的,是外界强加系统的,因此, $\mathbf{E}_\xi^T \cdot \mathbf{C}$ 称为**强迫响应**。

类似于连续时间系统的情况,如果系统或信号的特征根的模不小于1(连续系统是实部不小于零),则响应模式就成为**稳态的**,如果小于1,则该响应模式就将成为**瞬态的**(当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\lambda_i^n \rightarrow 0$ 或 $\xi_i^n \rightarrow 0$)。

例 3.2.12 二阶系统的差分方程为

$$y(n+2) - 2.5y(n+1) + y(n) = u(n)$$

已知 $y(-2)=0, y(-1)=4$, 求其全响应 $y(n)$, 并分析响应模式。

解: 先求零输入响应,已知初始条件不是零输入响应的初始值,但由于 $n < 0$ 时,输入信号 $u(n)=0$,故有 $y_{zi}(-2)=y(-2)=0, y_{zi}(-1)=y(-1)=4$ 。



仿真求解

由方程可得传输算子为

$$H(E) = \frac{1}{E^2 - 2.5E + 1}$$

特征根为

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

所以零输入响应为

$$y_{zi}(n) = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

令 $n = -2, -1$, 代入初始条件:

$$y_{zi}(-2) = c_1 \cdot \frac{1}{4} + c_2 \cdot 4 = 0$$

$$y_{zi}(-1) = c_1 \cdot \frac{1}{2} + c_2 \cdot 2 = 4$$

联立方程解得

$$c_1 = \frac{32}{3}, \quad c_2 = -\frac{2}{3}$$

所以

$$y_{zi}(n) = \frac{32}{3} \cdot 2^n - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

由于

$$u(n) = \frac{E}{E-1} \delta(n)$$

故零状态响应为

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= \frac{1}{(E-2)(E-0.5)} \cdot \frac{E}{E-1} \delta(n) \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{E}{E-0.5} \delta(n) + \frac{2}{3} \cdot \frac{E}{E-2} \cdot \delta(n) - \frac{2E}{E-1} \cdot \delta(n) \\ &= \left[\frac{2}{3} \cdot 2^n + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \right] u(n) \end{aligned}$$

从而系统的全响应为

$$\begin{aligned} y(n) &= y_{zi}(n) + y_{zs}(n) \\ &= \underbrace{\frac{34}{3} \cdot 2^n u(n) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)}_{\text{自然响应}} - \underbrace{2u(n)}_{\text{强迫响应}} \end{aligned}$$

其中, $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 是系统的瞬态响应, $\frac{34}{3} \cdot 2^n - 2$ 是系统的稳态响应, 此系统是一个不稳定系统, 因为自然响应中包含了 $(2)^n$ 这一随 n 的增大而增长的分量。

3.3 案例：通感一体系统中的线性时不变性

通感一体化系统具备信息传递和目标探测的功能, 其信息传递的一般模型可以参照通信系统进行建模, 如图 3.3.1 所示, 由信源、发射设备、信道、接收设备和信宿构成。



动画

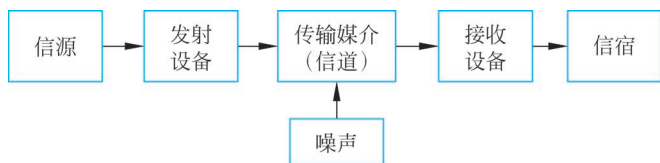


图 3.3.1 通信系统的一般模型

信道是指传输信号的通道，是从发射设备到接收设备之间信号传递所经过的媒质。因为传播环境中存在建筑、树木等物体，电磁波发射出来后，经过多个物体的反射从不同路径到达接收机，这种现象称为多径现象。信道模型是对信号输入和输出之间的变换关系进行的描述，可以分成线性时不变信道和线性时变信道。

无线信道对传输信号各个频率成分的响应不同，此时接收信号可以看作发送信号 $s(t)$ 通过信道产生衰减和延迟后所输出的结果。如果信道对信号衰减和延迟的参数不随时间发生变化，则这种信道为线性时不变信道，如图 3.3.2 所示。设发送信号为 $s(t)$ ，信道输出信号 $r(t)$ 为多个延迟信号加权叠加：

$$r(t) = \int h(\tau) s(t - \tau) d\tau \quad (3.3.1)$$

式中， $s(t - \tau)$ 为发送信号延迟时间 τ 的结果， $h(\tau)$ 为电磁波传播信道对延迟信号 $s(t - \tau)$ 的衰减系数。从上面的式子可以看出，该信道只对输入信号进行了延迟和加权求积分的操作，因此是一个典型的线性系统；并且当输入产生了延迟 Δt 后，信道输出为

$$\tilde{r}(t) = \int h(\tau) s(t - \Delta t - \tau) d\tau = r(t - \Delta t) \quad (3.3.2)$$

因此该信道系统属于时不变系统。

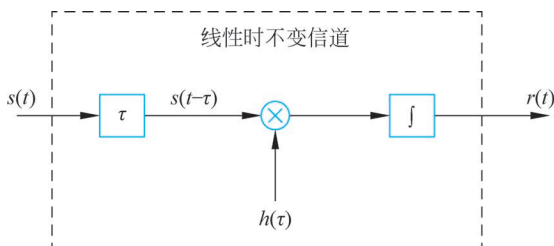


图 3.3.2 线性时不变信道模型

除了线性时不变信道之外，还有一些物理信道具有随时间变化的传输特性。如用户快速移动条件下的蜂窝移动通信信道，在用户快速移动时，接收端接收到的多个多径分量也在不断变化，因而信道响应特性具有时变特征。这种类型的物理信道虽然可以表征为对不同延迟信号的加权叠加，但是该系统对不同延迟信号的加权值会随着时间变化。线性时变滤波器信道模型如图 3.3.3 所示。对于信道输入信号 $s(t)$ ，信道输出信号 $r(t)$ 为

$$r(t) = \int h(\tau, t) s(t - \tau) d\tau \quad (3.3.3)$$

对比式 (3.3.3) 与式 (3.3.2) 可以发现，时变信道模型在衰减系数上是时变的，因此它是一个线性时变系统。

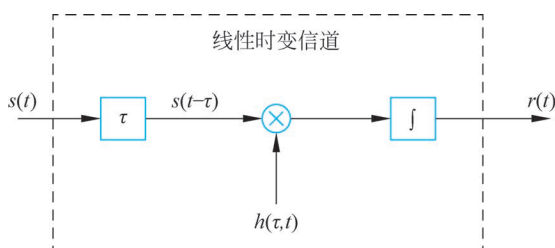


图 3.3.3 线性时变信道模型

雷达虽然是信息获取而不是信息传输系统,但也可以建立与通信系统类似的信道模型。下面通过分析雷达接收 $r(t)$ 与发射信号 $s(t)$ 之间的关系,建立与通信系统类似的信道模型。式(2.6.1)给出了一个静止的点目标的回波模型。雷达应用中所关注的目标(如车辆、飞机、舰船等)都有一定的尺寸和特定的形状结构。这些目标的尺寸往往远大于雷达波长,在该条件下,根据电磁散射的局部性原理,目标散射的电磁波可以等效为由目标上若干强散射结构产生。直观地理解,一个大目标可以用若干强度、位置不同的点目标来描述。图 3.3.4 给出了目标等效散射模型的示意图。

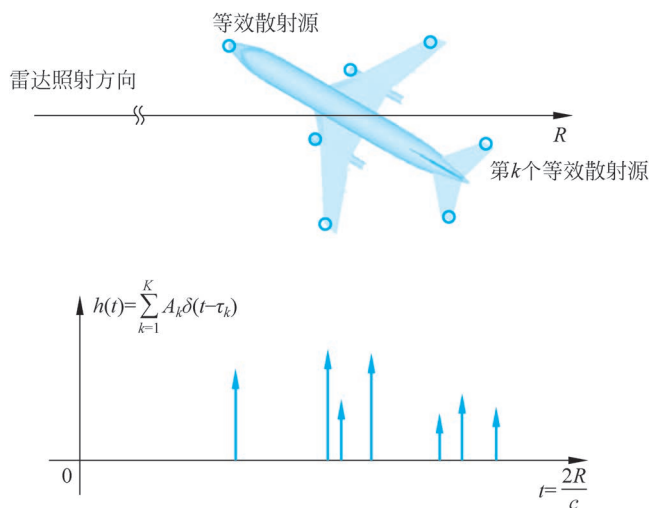


图 3.3.4 目标的等效散射模型及其单位冲激响应

因此,一个实际目标的回波具有以下形式:

$$r(t) = \sum_{k=1}^K A_k s(t - \tau_k) \quad (3.3.4)$$

式中, K 是这个目标上强散射源的数目, A_k 是第 k 个散射源的回波强度, $\tau_k = \frac{2R_k}{c}$ 是第 k 个散射源的延迟时间,它与散射源的径向距离 R_k (径向距离是指在电磁波传播方向上的投影距离,以下所说距离都指径向距离)有关。

利用单位冲激信号的卷积特性,表征散射特性的目标单位冲激响应可以表示为

$$h(t) = \sum_{k=1}^K A_k \delta(t - \tau_k) \quad (3.3.5)$$

$$\text{由于 } \int \sum_{k=1}^K A_k \delta(\tau - \tau_k) s(t - \tau) d\tau = \sum_{k=1}^K A_k \int s(t - \tau) \delta(\tau - \tau_k) d\tau = \sum_{k=1}^K A_k s(t - \tau_k)$$

因此,

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) s(t - \tau) d\tau \quad (3.3.6)$$

可以发现式(3.3.6)表示的信息感知信道模型与式(3.3.1)表示的信息传输信道模型具有统一的形式,即为通感一体化系统的信道模型。

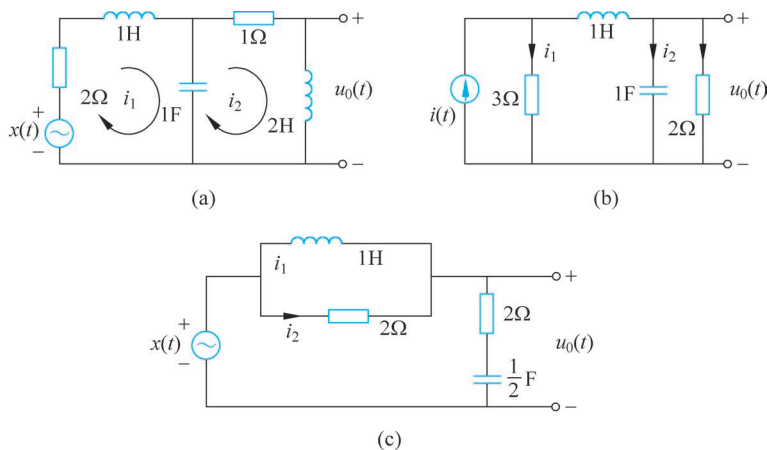
习 题



自测题

基础题

3-1 列写题图 3-1 中, $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 、 $u_0(t)$ 的算子过程。



题图 3-1

3-2 已知描述系统的微分方程如下:

$$(1) y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) = x(t)$$

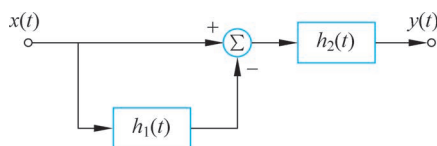
$$(2) y'''(t) + 2y''(t) + y'(t) = x(t)$$

当初始状态为 $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$ 时,求零输入响应 $y_{zi}(t)$ 。

3-3 已知 $H(p) = \frac{2p^2 + 8p + 3}{(p+1)(p+3)^2}$, $y_{zi}(0) = 2$, $y'_{zi}(0) = y''_{zi}(0) = 0$,求零输入响应 $y_{zi}(t)$ 。

$y_{zi}(t)$ 。

3-4 题图 3-2 所示系统中, $h_1(t) = \delta(t-1)$, $h_2(t) = u(t)$,求该系统的单位冲激响应。

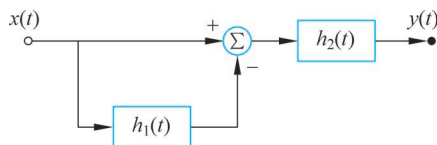


题图 3-2

3-5 证明: 如果一个线性时不变系统, 对于 $x(t)$ 的响应是 $y(t)$, 那么该系统对于 $\frac{d}{dt}x(t)$ 的响应为 $\frac{d}{dt}y(t)$ 。

3-6 某系统对输入 $x(t) = e^{-5t}u(t)$ 的响应是 $y(t) = \sin\omega_0 t u(t)$, 借助题 3-5 结论, 试求该系统的冲激响应 $h(t)$ 。

3-7 某连续时间线性时不变系统如题图 3-3 所示。各子系统的冲激响应分别为 $h_1(t) = \delta(t-1)$, $h_2(t) = u(t)$, 求系统的冲激响应 $h(t)$ 。



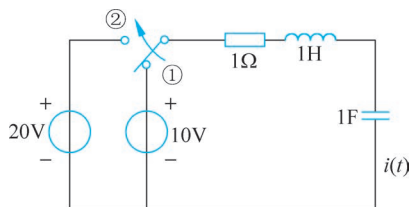
题图 3-3

3-8 已知某连续时间线性时不变系统对输入信号 $\delta'(t)$ 的零状态响应为 $y_{zs}(t) = 2e^{-3t}u(t)$, 试求:

- (1) 系统的单位冲激响应 $h(t)$;
- (2) 系统对输入信号 $x(t) = u(t) - u(t-2)$ 产生的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 。

3-9 已知系统微分方程为 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 6x(t)$, 输入信号 $x(t) = (1 + e^{-t})u(t)$, 初始条件 $y(0^-) = 1$, $y'(0^-) = 0$, 试求系统的全响应、零输入响应、零状态响应、自然响应和强迫响应。

3-10 电路如题图 3-4 所示, $t=0$ 以前开关位于①且系统处于稳态。当 $t=0$ 时, 开关从①扳到②, 求全响应电流 $i(t)$ 。



题图 3-4

3-11 某线性系统有两个初始状态 $y_1(0)$ 和 $y_2(0)$, 当初始状态为 $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$ 时, 若输入为 $x(t) = u(t)$, 则全响应为 $y_1(t) = (6e^{-2t} - 5e^{-3t})u(t)$; 若输入为 $3u(t)$, 则全响应 $y_2(t) = (8e^{-2t} - 7e^{-3t})u(t)$ 。求:

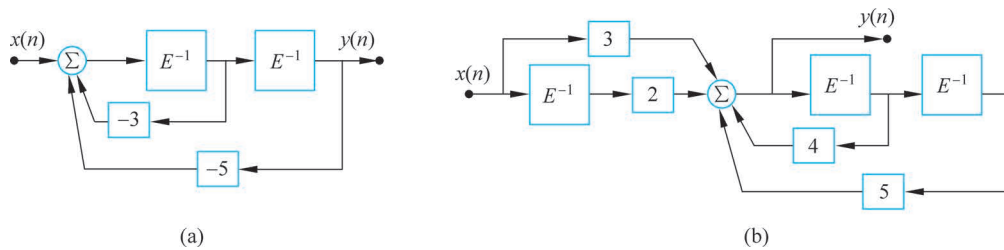
- (1) $x(t) = 0$, $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$ 时的全响应 $y(t)$;

- (2) $x(t)=2u(t)$, $y_1(0)=y_2(0)=0$ 时的全响应 $y(t)$;
 (3) $x(t)=4\delta(t)$, $y_1(0)=y_2(0)=0$ 时的全响应 $y(t)$;
 (4) $x(t)=\delta(t)$, $y_1(0)=1$, $y_2(0)=2$ 时的全响应 $y(t)$;
 (5) $x(t)=u(t)$, $y_1(0)=2$, $y_2(0)=4$ 时的全响应 $y(t)$ 。

3-12 给定系统微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x'(t)+3x(t)$, 当输入为 $x(t)=e^{-4t}u(t)$ 时, 系统的全响应为 $\left(\frac{14}{3}e^{-t}-\frac{7}{2}e^{-2t}-\frac{1}{6}e^{-4t}\right)u(t)$ 。试确定系统的零输入响应和零状态响应, 自然响应和强迫响应, 瞬态响应和稳态响应。

3-13 已知二阶微分方程为 $\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2x(t)$, 初始条件 $y(0)=0$, $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0}=3$, 抽样间隔或步长 $T=0.1$, 试导出其差分方程。

3-14 题图 3-5 所示是系统的模拟框图, 请列出其差分方程。



题图 3-5

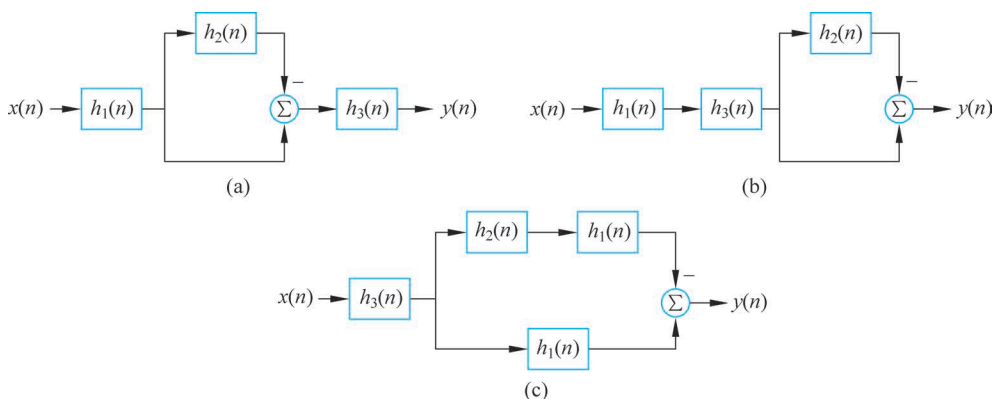
3-15 试求下列离散线性时不变系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$:

- (1) $y(n)+\frac{1}{3}y(n-1)=x(n)$, $y(-1)=-1$
 (2) $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$, $y(-1)=0$, $y(-2)=1$
 (3) $y(n)+2y(n-1)+y(n-2)=x(n)$, $y(0)=y(-1)=1$
 (4) $y(n)-2y(n-1)=x(n)$, $y(1)=1$
 (5) $y(n)+y(n-2)=x(n)$, $y(0)=1$, $y(1)=2$

3-16 试求下列离散系统的单位样值响应:

- (1) $y(n+2)-5y(n+1)+6y(n)=x(n)$;
 (2) $y(n)-2y(n-1)-5y(n-2)+6y(n-3)=x(n)$;
 (3) $H(E)=\frac{1}{E^2-E+0.25}$;
 (4) $H(E)=\frac{E^2}{E^2+\frac{1}{2}}$ 。

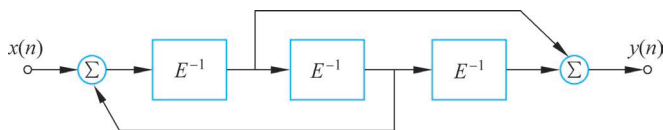
3-17 题图 3-6 所示三个系统, 均由子系统组成, 各子系统的单位样值响应分别为 $h_1(n)=u(n)$; $h_2(n)=\delta(n-3)$; $h_3(n)=(0.8)^nu(n)$ 。试证明这三个系统是等效的, 并求出系统的单位样值响应。



题图 3-6

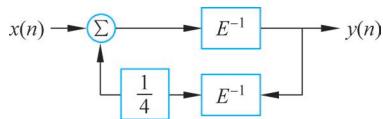
3-18 离散时间系统的模拟框图如题图 3-7 所示,试求:

- (1) 系统的差分方程及传输算子;
- (2) 单位样值响应 $h(n)$;
- (3) 单位阶跃响应 $s(n)$,即系统输入 $x(n)=u(n)$ 时的零状态响应。



题图 3-7

3-19 系统如题图 3-8 所示,求: (1) 系统的传输算子; (2) 单位样值响应; (3) 当 $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ 时的零状态响应。



题图 3-8

3-20 设离散时间系统的差分方程为 $y(n+2) - y(n+1) - y(n) = x(n+2)$ 。系统的初始条件 $y(1)=5, y(0)=4$, 输入 $x(n)=u(n)$, 试求系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

3-21 某系统的差分方程为 $y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = x(n)$ 。已知 $x(n) = u(n)$, 初始条件 $y_{zi}(0)=2, y_{zi}(1)=1$, 求系统响应 $y(n)$ 。

3-22 有一工厂, 原有资金 200 万元, 由于生产所得利润, 工厂每年资金能够翻一番, 次年开国家每年初再向工厂投资 100 万元, 求第 n 年工厂的资金 $y(n)$ 。

3-23 如果在第 n 个月初向银行存款 $x(n)$ 元, 月息为 a , 月利息不取, 试用差分方程写出第 n 月初的本利和 $y(n)$ 。设 $x(n)=1000$ 元, $a=0.03\%$, $y(0)=2000$ 元, 求 $y(n)$; 若 $n=12$, 求 $y(12)$ 。

3-24 已知系统的差分方程为 $y(n]-0.7y(n-1)+0.1y(n-2)=2x(n)-x(n-2)$, 若输入 $x(n)=u(n)$, 初始状态 $y(-1)=-26, y(-2)=-202$, 求该系统全响应, 并指出其中的自然响应和强迫响应, 瞬态响应和稳态响应。

提高/拓展题

T3-1 针对下述线性时不变系统的输入输出关系, 分别计算系统的单位冲激响应 $h(t)$ 。

$$(1) y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-1-\tau)} x(\tau-2) d\tau; \quad (2) y(t) = \int_{t-3}^{\infty} e^{t-\tau} x(\tau-1) d\tau.$$

T3-2 某连续时间线性时不变系统, 当输入为 $G_1(t-0.5)$ 时, 输出为 $\Lambda_2(t-2)$ 。试画出当输入为 $G_2(t-1)$ 时的输出 $y(t)$ 。

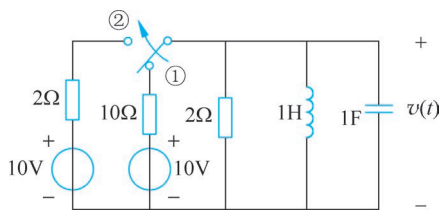
T3-3 已知某连续时间线性时不变系统的输入信号为 $x(t)$, 系统的阶跃响应为 $s(t)$, 试证明系统的零状态响应可以表示为

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x'(\tau) s(t-\tau) d\tau$$

上式称为杜阿美尔 (Duhamel) 积分。

T3-4 已知某连续时间线性时不变系统的单位阶跃信号 $u(t)$ 产生的阶跃响应 $s(t) = (2e^{-2t} - 1)u(t)$, 试求系统在输入信号为 $x(t) = e^{-3t}u(t)$ 激励下产生的零状态响应 $y_{zs}(t)$ 。

T3-5 电路如题图 T3-1 所示, $t=0$ 以前开关位于①且系统处于稳态。当 $t=0$ 时, 开关从①扳到②, 求电压 $v(t)$ 。



题图 T3-1

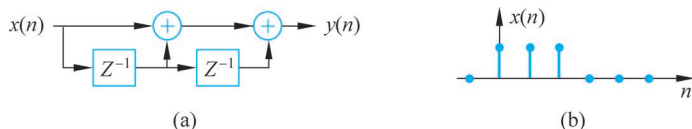
T3-6 已知某因果连续时间线性时不变系统的微分方程为

$$y''(t) + 7y'(t) + 10y(t) = 2x'(t) + 3x(t)$$

已知 $y(0^-) = 1, y'(0^-) = 0$, 输入信号为 $x(t) = 10\cos(t)u(t)$ 。

- (1) 试求系统的单位冲激响应 $h(t)$;
- (2) 求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ 、零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和全响应 $y(t)$;
- (3) 指出系统响应中的瞬态响应和稳态响应, 以及自然响应和强迫响应。

T3-7 某系统框图如题图 T3-2(a) 所示, 计算题图 T3-2(b) 所示信号通过该系统后的输出。



题图 T3-2

T3-8 某离散时间线性时不变系统的输入 $x(n) = u(n) - u(n-3)$, 输出为 $y(n) = \{3, 5, 6, 3, 1\}_1$, 求该系统的单位样值响应 $h(n)$ 。

T3-9 离散时间线性时不变系统的阶跃响应 $s(n) = a^n u(n)$, $0 < a < 1$, 试求该系统的单位样值响应 $h(n)$ 。

T3-10 根据下列差分方程写出系统的传输算子 $H(E)$, 并画出系统的模拟框图:

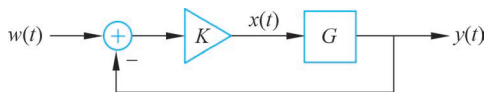
(1) $y(n+2) = ay(n+1) + by(n) + cx(n+1) + dx(n)$

(2) $y(n+3) = 2y(n+1) + x(n+1) - 3x(n)$

(3) $y(n) = y(n-1) - 2y(n-2) + 5x(n)$

T3-11 题图 T3-3 所示反馈系统框图中, G 所对应的微分方程为 $y'(t) + y(t) = x'(t) - x(t)$ 。(1) 当 $K=10$ 时, 确定该系统 $w(t) \rightarrow y(t)$ 的微分方程;

(2) 若系统为稳定系统, 确定 K 的取值范围。



题图 T3-3

T3-12 判断下列线性时不变系统的因果、稳定性。

(1) $h(t) = e^{2t} u(t)$

(2) $h(t) = e^{-2t} u(t)$

(3) $h(t) = u(t)$

(4) $h(t) = u(t+1) - u(t-1)$

(5) $h(n) = 2^n u(n)$

(6) $h(n) = 2^{-n} u(n)$

(7) $h(n) = \cos \frac{\pi n}{2} u(n)$

(8) $h(n) = u(n+1) - u(n-2)$