

第 3 章

CHAPTER 3

恒定电场

恒定电场 (steady electric field) 与静电场讨论的对象有很大区别。静电场主要讨论静态电荷产生的电场特性,而恒定电场讨论的是电流稳定时场的特性。虽然对象不同,但两种电场在形式上具有很多相似性。

在静电平衡条件下,导体内部不存在电场。但是在恒定电场条件下,导体内部是存在电场的,只是导体内的稳恒电场必须依靠电源才能维持。在外电源的维持下,导体内部不再是等位体,表面也不再是等位面。在恒定电场条件下,电荷的分布是稳定的,因此电场也是稳定的。这种现象是导致恒定电场与静电场特性相似的原因。

本章将讨论电流密度、电流连续性方程、导电介质的传导方程以及恒定电场与静电场的比拟。



视频 13

3.1 电流密度

3.1.1 电流密度的定义

在实际生活中,电流都是随时间变化的。只是在很多情形下,当电流大小的变化在可接受范围之内时,就认为它是稳定电流,并且用平均电流来表示,如图 3.1.1 所示。

在 Δt 时间内通过的电荷量为 Δq ,则平均电流为

$$\bar{I} = \frac{\Delta q}{\Delta t} (\text{A}) \quad (3.1.1)$$

如果平均电流在任何时候都保持不变,则称其为稳恒电流,

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} (\text{A}) \quad (3.1.2)$$

电流描述了单位时间通过的电荷总量,它没有体现电荷在导体内每一点的流动情况。为了更好地讨论恒定电场,引入 **电流密度 (current density)** 的概念。它定义为流过的电流 ΔI 与在垂直电流流过方向的一小面元 ΔS 之比

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}_n \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} (\text{A/m}^2) \quad (3.1.3)$$

其中,电流密度的方向也就是电荷运动的方向,而 $\mathbf{e}_n$ 为电流密度方向的单位矢量。此时的电流在一空间内流动,如图 3.1.2 所示,对应的电流密度称为 **体电流密度 (volume current density)**

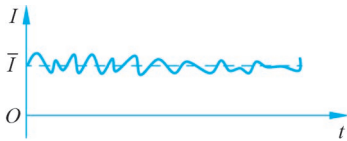


图 3.1.1 平均电流

density), 简称电流密度。注意, 图 3.1.2 中电荷密度为 ρ , 电荷运动速度为 $\boldsymbol{v}$, Δt 时间内的位移为 $\Delta l = \boldsymbol{v} \Delta t$, $\boldsymbol{e}_n$ 与 ΔS 垂直, 且与 $\boldsymbol{v}$ 的方向一致。

由于

$$\Delta I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta l \Delta S}{\Delta t} = \rho v \Delta S$$

故

$$\boldsymbol{J} = \rho v \boldsymbol{e}_n = \rho \boldsymbol{v} \quad (3.1.4)$$

假设存在不同的电荷, 则总电流密度就等于这些电荷所产生的电流密度的矢量和

$$\boldsymbol{J} = \sum_i \rho_i \boldsymbol{v}_i \quad (3.1.5)$$

因此, 对于体分布电流, 流过任意截面 S 的体电流大小与电流密度的关系为

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{dS} \quad (3.1.6)$$

当电流在一表面流动时, 如图 3.1.3(a) 所示, 此时的电流密度称为面电流密度 (surface current density), 定义为流过的电流 ΔI 与在垂直电流流过方向的一小线元 Δl 之比, 且类比体电流密度的计算, 可得

$$J_s = \boldsymbol{e}_n \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} = \rho_s \boldsymbol{v} \quad (\text{A/m}) \quad (3.1.7)$$

其中, ρ_s 为面电荷密度。此时, 流过任意线段 l 的面电流大小与面电流密度的关系为

$$I = \int_l \boldsymbol{J}_s \cdot \boldsymbol{e}_l dl \quad (3.1.8)$$

其中, ρ_l 为线电荷密度, $\boldsymbol{e}_l$ 为垂直于元线段 dl 方向上的单位矢量。

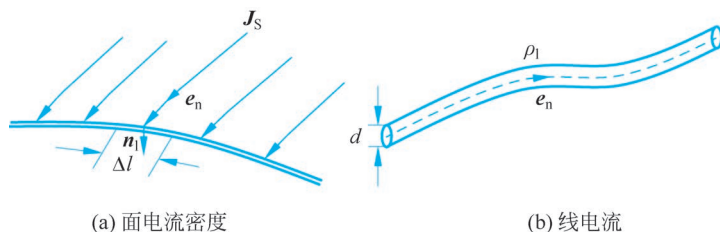


图 3.1.3 面电流密度和线电流示意图

如图 3.1.3(b) 所示, 当电荷在一根很细的导线中流过时, 或电流束的横截面很小时, 可考虑线电流 (line current) 的概念。此时, 电流密度已经无意义。但是线电流的大小和线电荷密度的关系可写为

$$\boldsymbol{e}_n I = \rho_l \boldsymbol{v} \quad (3.1.9)$$

在实际应用中, 线天线的电流可认为是线电流的典型实例。

3.1.2 传导电流和运流电流

传导电流 (conduction current) 是指导电介质中的电流, 用 $\boldsymbol{J}_C$ 表示, 并且有 $\boldsymbol{J}_C = \rho \boldsymbol{v}$ 。通过总结实验还发现, 在电导率为 σ 的导体中, 有 $\boldsymbol{J}_C = \sigma \boldsymbol{E}$ (在 3.1.3 节会继续讨论)。注意, 在大部分情况下, 下标“C”可以忽略不写。在金属导体中, 是带负电的电子在运动; 在半导体

中,是电子空穴对在运动;在导电溶液中,是正负离子对在运动。

运流电流(convection current)又称作对流电流或徙动电流,是指带电粒子在不导电的空间,如真空或极稀薄气体中定向运动所形成的电流,用 $\mathbf{J}_V$ 表示,并且有 $\mathbf{J}_V=\rho\mathbf{v}$ 。由此可以看出,运流电流的方向就是带电粒子运动的方向。例如,等离子体气流就是运流电流的一种。传导电流和运流电流统称为**自由电流(free current)**。

3.1.3 欧姆定律

欧姆定律(Ohm's law)表述的是流过一段导体的电流 I 与导体两端电压 U 之间的关系。下面推导电路理论中的欧姆定律。设一段长为 l 的直导线,横截面均匀且面积为 S ,则导线中的恒定电场 $\mathbf{E}$ 在导线上的电压降为

$$U=\int_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=El=\frac{Jl}{\sigma}=\frac{Il}{S\sigma}=IR$$

该式称为**欧姆定律的积分形式**。其中,

$$R=\frac{l}{S\sigma} \tag{3.1.10}$$

为该段导线的电阻,而 σ 是导体的电导率,单位是S/m(西门子/米)。如果该段导线的横截面不均匀,那么每一段的电阻 dR 可表示为

$$dR=\frac{dl}{S\sigma}$$

此时,该段导线的总电阻可表示为

$$R=\int_l \frac{dl}{S\sigma} \tag{3.1.11}$$

在电磁场理论中,通常需要研究某一点的电流密度与电场之间的关系。在导电介质中维持恒定电流,必须存在一个恒定电场。电流密度与电场强度的函数关系由实验得到,为

$$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E} \tag{3.1.12}$$

该式称为**欧姆定律的微分形式**。它给出了各向同性导电介质中任一点的电流密度与电场强度间的关系。此式具有一般性,不但适用于恒定电场,也适用于非恒定电场。需要说明的是,运流电流不满足欧姆定律。因为运流电流对应的介质不是导体,而这些介质没有等效电导率。部分材料的电导率如表3.1.1所示。

表 3.1.1 部分材料的电导率

材料	电导率/(S/m)	材料	电导率/(S/m)	材料	电导率/(S/m)
银	6.17×10^7	湿土	0.005~0.015	去离子水	2×10^{-4}
铜	5.8×10^7	25%氯化钙	0.178	干土	1×10^{-5}
金	4.1×10^7	参杂硅	2.6×10^3	干木材	$10^{-7}\sim10^{-9}$
铝	3.54×10^7	掺杂砷化镓	2.0×10^3	玻璃	10^{-12}
黄铜	1.57×10^7	掺杂碳化硅	$10^{-4}\sim10$	陶瓷	10^{-13}
青铜	1×10^7	铁氧体	10^2	橡胶	10^{-15}
铁	1×10^7	海水	4	熔融石英	10^{-17}

例 3.1.1 假设铜导线和铝导线的直径均为1mm,长度为1km。铜的电导率为 5.8×10^7 S/m,铝的电导率为 3.54×10^7 S/m。求两种导线的直流电阻 R 。

解: 由于 $R = \frac{l}{S\sigma}$, 对于铜导线

$$R = \frac{10^3}{\pi(10^{-3}/2)^2 \times 5.8 \times 10^7} \approx 21.95(\Omega)$$

而对于铝导线

$$R = \frac{10^3}{\pi(10^{-3}/2)^2 \times 3.54 \times 10^7} \approx 35.96(\Omega)$$

3.1.4 焦耳定律

在导体介质中, 需要电源去维持恒定电场, 这意味着导体会存在损耗。这种损耗称为焦耳损耗。实际上, 焦耳损耗的微观机制是自由电子在运动过程中与原子碰撞, 从而造成电子能量损耗, 而使得原子的热运动加剧。

在电路理论中, 焦耳损耗是通过导体内电场力所做的功来计算的。假设导体两端的电压为 U , 当电荷 Q 通过这段导线时, 电场力所做的功为

$$W = QU(\text{J}) \quad (3.1.13)$$

功的单位为 J(焦耳)。考虑到电荷 $Q = \int_0^t I dt$, 因此可得

$$W = \int_0^t IU dt \quad (3.1.14)$$

这是**焦耳定律(Joule's law)**的积分形式。对于稳恒电流, 可得 $W = IUt$ 。由此可以定义单位时间内所做的功, 即功率 $P = IU$ 。

在电磁场理论中, 通常考虑利用电场去表达焦耳定律。设电荷 $\rho\Delta V$ 在 Δt 时间内在电场作用下沿电场方向位移 Δl , 电场对电荷做的功 W 为

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{l} = \mathbf{QE} \cdot \Delta \mathbf{l} = \rho \Delta V E \Delta l$$

单位体积内的功率为

$$p = \frac{W}{\Delta V \Delta t} = \rho E \frac{\Delta l}{\Delta t} = \rho v E = \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 (\text{W/m}^3) \quad (3.1.15)$$

这就是**焦耳定律的微分形式**。理想导体内部的电场强度为 0, 因此功率损耗为 0。但是对于非理想导体, 其内部是存在功率损耗的。

需要说明的是, 对于运流电流, 电场力对电荷所做的功会被转换成电荷的动能。因此, 焦耳定律对运流电流也不成立。

3.1.5 电动势

电源的作用是把电荷从势能低处往势能高处移动。考查电荷沿闭合路径所做的功

$$A = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.3.16)$$

如图 3.1.4 所示, 在电源外部和内部, 电场力分别为 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E}' + \mathbf{E})$, 其中, $\mathbf{E}$ 为库仑场, $\mathbf{E}' = \mathbf{f}_e/q$ 为局外场, 可以通过电源将正负电荷分离开的局外力 $\mathbf{f}_e$ 等效得到, 故

$$A = q \int_{\text{电源内}} (\mathbf{E}' + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} + q \int_{\text{电源外}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

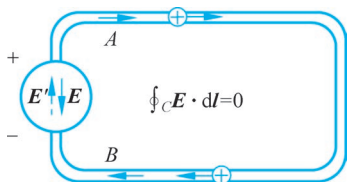


图 3.1.4 电动势示意图

$$= q \int_{\text{电源内}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} + q \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$= q \int_{\text{电源内}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}$$

这里,利用了 $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。由于电源外 $\mathbf{E}' = 0$,故有

$$\mathcal{A} = q \int_{\text{电源内}} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = q \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}$$

说明电源内部的电场为非保守场,电源外部的电场是保守场。因此,定义电动势为

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{A}}{q} = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \quad (3.1.17)$$



视频 14

3.2 电流连续性方程

要讨论电流的恒定电场条件,首先要研究电流与电荷的关系。根据电荷守恒原理,电流密度对闭合曲面的积分等于闭合曲面内电荷的减少量,即

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}$$

利用散度定理,可以得到

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

亦即

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

或表示为

$$\int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \quad (3.2.1)$$

式(3.2.1)便是**电流连续性方程**。

将电流连续性方程写成微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.2.2)$$

这是任何电流都必须满足的形式。对于稳恒电流,由于要求电流不随时间变化,因此电场亦不能随时间变化。电场归根到底是由电荷产生的,因此恒定电场要求电荷分布不能随时间变化,即要求 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 。由此,稳恒电流的特性为

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.2.3)$$

或写为微分形式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3.2.4)$$

注意: 电荷分布不随时间变化并不意味着没有电荷运动,而是进入封闭区域的电荷等于离开的电荷。因此这是一种动态平衡,从宏观上看也就是电荷分布不随时间变化。恒定电场示意图如图 3.2.1 所示,不管电荷如何运动,曲面 S 所包围区域中的电荷分布不变。

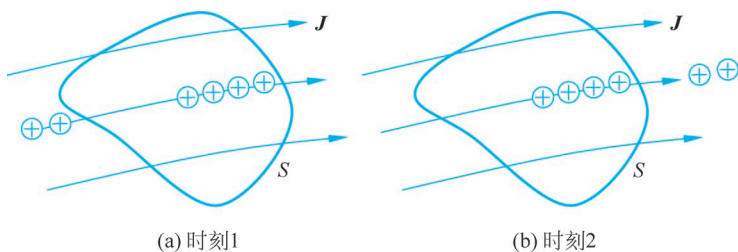


图 3.2.1 恒定电场示意图

如果电荷分布不随时间变化,那么这种状态就如同静电场。静电场的保守场特性也就适用于恒定电场,即

$$\begin{cases} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad (3.2.5)$$

同样,恒定电场可以用电位梯度表示

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (3.2.6)$$

3.3 恒定电场的边界条件

在导体边界,取厚度为 h 、面积为 ΔS 的小体积元,如图 3.3.1 所示。当厚度 h 趋近于无穷小时,根据恒定电流的特性方程 $\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$,可得 $J_{1n}\Delta S - J_{2n}\Delta S = 0$,亦即 $J_{1n} = J_{2n}$ 。另外,根据电位移矢量的边界条件,可以得到

$$\begin{cases} J_{1n} = J_{2n} \\ \mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \end{cases} \quad (3.3.1)$$

说明电流密度的法向分量是相等的,另外也说明两种导体的交界面可能存在表面电荷。

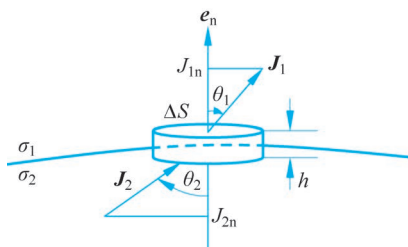


图 3.3.1 边界条件示意图

此外,根据 $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$,以及导体分界面两侧的电位相等,可得

$$\begin{cases} \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n} \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

再利用电位与电场的关系,可将上式写为

$$\begin{cases} \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{cases} \quad (3.3.3)$$



视频 15

由于切向电场在分界面需相等,故有

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ \mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \end{cases} \quad (3.3.4)$$

于是得到

$$\frac{E_{1t}}{\sigma_1 E_{1n}} = \frac{E_{2t}}{\sigma_2 E_{2n}} \quad (3.3.5)$$

也就是

$$\frac{\tan\theta_1}{\sigma_1} = \frac{\tan\theta_2}{\sigma_2} \quad (3.3.6)$$

或者

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (3.3.7)$$

例 3.3.1 如图 3.3.2 所示的单位面积平行板,求该结构的电阻。另外求两种介质的交界面是否有自由电荷存在,电荷密度为多少?



图 3.3.2 例 3.3.1 示意图

解: 忽略极板边缘效应,设导体 1 和导体 2 内部电场强度分别为 E_1 和 E_2 ,则极板电压

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

又因为 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$,可以得到

$$U = \frac{J_1}{\sigma_1} d_1 + \frac{J_2}{\sigma_2} d_2$$

在本例中,电流垂直交界面,故 $J_1 = J_{1n} = J_{2n} = J_2 = J$ 。又由于该结构为单位面积,故该结构的电阻 R 为

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{J} = \frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2}$$

在导体 1 和导体 2 内, $D_1 = \epsilon_1 E_1$ 、 $D_2 = \epsilon_2 E_2$,则分界面的自由电荷密度为

$$\rho_s = D_1 - D_2 = \epsilon_1 E_1 - \epsilon_2 E_2 = \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) J = \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) \frac{U}{R} = \frac{\left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) U}{\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2}}$$



视频 16

3.4 导体中恒定电场与静电场的比拟

恒定电场与静电场有很多相似的地方,可以把这些相似的地方称为类比或者比拟。表 3.4.1 和表 3.4.2 总结了两种情形的比拟量、比拟关系和边界条件。利用这种比拟关系,可以求比拟量。

表 3.4.1 静电场与恒定电场各比拟量

静电场(E - D)		恒定电场(E - J)	
电位移矢量	D	电流密度	J
介电常数	ϵ	直流电导率	σ
电位	φ	电位	φ
电压	U	电压	U
电荷	q	电流	I
电容	C	电导	G

表 3.4.2 静电场与恒定电场各比拟量的表达式和边界条件

静电场(E - D)	恒定电场(E - J)
$\left\{\begin{array}{l}\nabla\times E=0(E=-\nabla\varphi)\\ \nabla\cdot D=0\\ \nabla^2\varphi=0\\ D_{1n}=D_{2n}\\ E_{1t}=E_{2t}\\ q=\oint_S D\cdot dS\\ D=\epsilon E\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}\nabla\times E=0(E=-\nabla\varphi)\\ \nabla\cdot J=0\\ \nabla^2\varphi=0\\ J_{1n}=J_{2n}\\ E_{1t}=E_{2t}\\ I=\int_S J\cdot dS\\ J=\sigma E\end{array}\right.$

例如,电容的求解公式为

$$C=\frac{q}{U}=\frac{\oint_S D\cdot dS}{\int_1^2 E\cdot dl}=\frac{\epsilon\oint_S E\cdot dS}{\int_1^2 E\cdot dl}\tag{3.4.1}$$

而电导的计算公式为

$$G=\frac{I}{U}=\frac{\int_S J\cdot dS}{\int_1^2 E\cdot dl}=\frac{\sigma\int_S E\cdot dS}{\int_1^2 E\cdot dl}\tag{3.4.2}$$

假设两种结构相似,在已知一个比拟量表达式的情形下,可以采用类比的方法求解另一对应的量。

例 3.4.1 如图 3.4.1 所示的同轴线,外加电源电压为 U , 内外导体半径为 a 和 b , 填充非理想介质 $\sigma\neq 0$, 因而有漏电流, 求单位长度的漏电导。

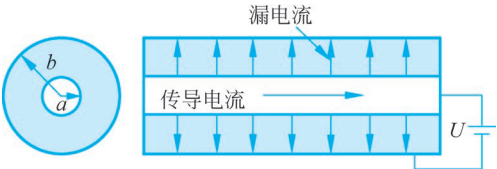


图 3.4.1 例 3.4.1 示意图

解：假设单位长度的漏电流为 I , 则介质中离对称轴 r 的地方电流密度 J 为

$$J=\frac{I}{2\pi r}$$

于是得到

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{2\pi r\sigma}$$

取外导体为电位 0 点, 则电压为

$$U = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{I}{2\pi r\sigma} dr = \frac{I}{2\pi\sigma} \ln \frac{b}{a}$$

则单位长度的漏电导为

$$G = \frac{I}{U} = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}}$$

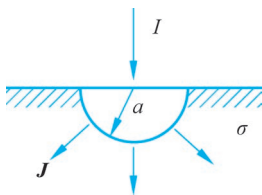


图 3.4.2 例 3.4.2 示意图

例 3.4.2 如图 3.4.2 所示的半径为 a 的金属半球埋入电导率为 σ 的土壤中, 求金属半球的接地电阻。

解: 土壤中任意一点离球心为 r 时, 电流密度为

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}$$

因此该点的电场强度为

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{2\pi r^2\sigma}$$

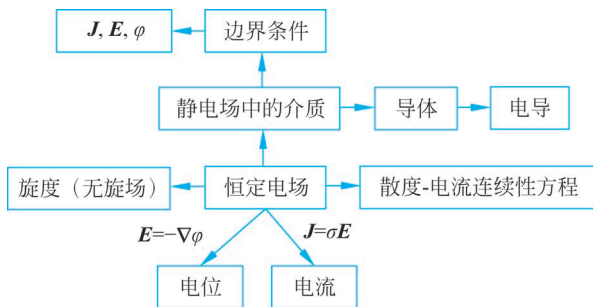
取无限远处为电位 0 点, 则球面上的电位为

$$U = \int_a^{+\infty} E dr = \int_a^{+\infty} \frac{I}{2\pi r^2\sigma} dr = \frac{I}{2\pi a\sigma}$$

于是得到

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi a\sigma}$$

本章知识结构



习题

3.1 半导体器件中存在电子和空穴两种载流子。假设单个电子和空穴的带电量分别为 $-q$ 和 q , 且本征半导体的载流子密度为 n_i , 电子和空穴在电压 U 作用下的运动速度分别为

v_e 和 v_h 。请推导出半导体材料中在电压 U 作用下的电流密度表达式。

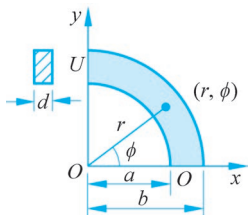
3.2 设一段环形导电介质,电导率为 σ ,其尺寸和形状如题 3.2 图所示,求两个端面的电阻。

3.3 求例 3.3.1 的功率损耗。

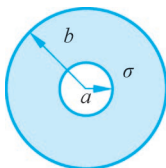
3.4 利用类比法求解例 3.4.1 的电导。

3.5 利用类比法求解例 3.4.2 的接地电阻。

3.6 同心球面如题 3.6 图所示,求同心球面之间的电阻,其中 $\sigma=\sigma_0(1+k/r)$ 。



题 3.2 图



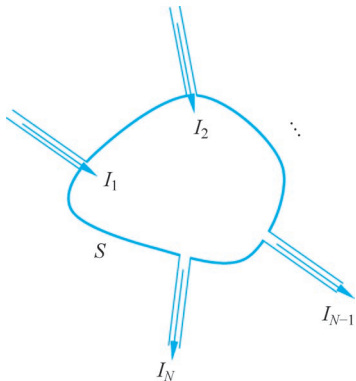
题 3.6 图

3.7 请从电流连续性方程推导基尔霍夫电流定律,见题 3.7 图。推导前请自行复习电路原理相关知识。

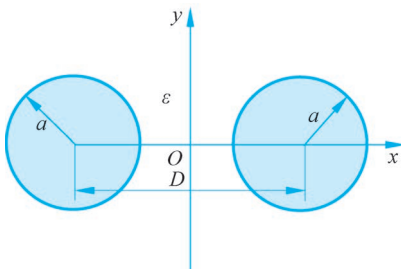
3.8 请计算如题 3.8 图所示的平行双导线的单位长度的电导,导线半径为 a ,导线中心距离为 D ,导向位于介电常数为 ϵ 、电导率为 σ 的介质中。

3.9 存在恒定电场的情况下,分析两种不同导电介质分界面上的衔接条件,说明在什么情况下分界面上自由电荷面密度为 0。

3.10 金属球形电极 A 和平板电极 B 的周围为空气,已知其电容为 C 。若将该系统周围的空气全部换为电导率为 σ 的均匀导电介质,且在两极间加直流电压 U_0 ,则极板间导电介质损耗的功率是多少?



题 3.7 图



题 3.8 图

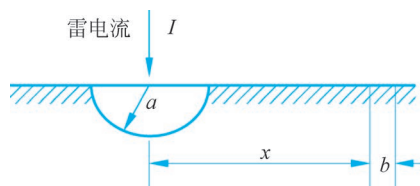
3.11 对于半径为 a 的深埋球形接地器,假设地的电导率为 σ 。

(1) 求接地电阻,并给出减少接地电阻的措施;

(2) 若为浅埋接地器,说明分析方法。

3.12 如题 3.12 图所示的浅埋接地器,由于其附近存在接地电阻,人在附近行走时,两

腿间会存在一定的电势差,称为跨步电压。随着人不断靠近接地器的过程中,跨步电压会变大。为了安全起见,有必要在接地器的附近划定安全区域。请分析影响安全区域大小的因素。



题 3.12 图

3.13 恒定电场和静电场有何相同点和不同点?