

第 3 章

导行电磁波

前面讨论了电磁波在无界空间的传播,以及两种不同媒质分界面处的反射与折射现象。本章将讨论电磁波在有界空间的传播,即导波系统中的电磁波。导波系统是指引导电磁波沿一定方向传输的装置,被引导的电磁波称为导行电磁波,通常也将导波系统称为微波传输线或(广义的)波导。常见的传输线有双导体传输线、同轴线、矩形波导、圆波导、平行板波导、微带线、带线、介质波导等。

导波系统中电磁波的传输问题属于电磁场边值问题,即在给定边界条件下求解由麦克斯韦方程组导出的波动方程,得到导波系统中的电磁场分布和电磁波的传输特性,即所谓的“场方法”。

本章用“场方法”研究常用的几种传输线特性。首先介绍导波系统的一般分析方法,讨论导行波的一般传输特性;然后结合具体的矩形波导、圆波导和同轴线,讨论电磁波在不同种类的传输线中的场分布和传输特性。这三类常用微波传输线的结构简单,相应的边界条件也简单,可以精确求得导行波的严格解析表达式。而带状线、微带线等传输线的边界条件复杂,不易直接得到严格解析表达式,将在第 4 章用“等效电路”方法求解。

3.1 导行波的分析方法和模式

任意截面的均匀导波系统如图 3.1 所示。均匀导波系统是指横截面形状、尺寸和填充材料沿传播方向不变的无限长的直传输线,其特征是具有平行于 z 轴的导体边界,在 z 方向是均匀且无限长的。为了简单起见,假设导体是理想导体,即 $\sigma = \infty$; 填充均匀、线性、各向同性、无耗的理想媒质,媒质参数 ϵ 、 μ 为实常数, $\sigma = 0$; 传输线区域内无源,即 $\mathbf{J} = 0, \rho = 0$ 。

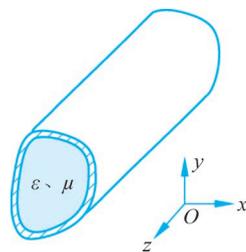


图 3.1 任意截面的均匀导波系统

3.1.1 导行波的分析方法

假定一个时谐场沿 $+z$ 轴方向传输,传播常数 $\gamma = \alpha + j\beta$,并且传输线是均匀无限长的,不会产生反射,只有沿 $+z$ 轴方向传输的单向行波,于是电场和磁场可以写为

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_T(x, y, z) + \hat{\mathbf{z}}E_z(x, y, z) = [\mathbf{e}_T(x, y) + \hat{\mathbf{z}}e_z(x, y)] e^{-\gamma z} \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}_T(x, y, z) + \hat{\mathbf{z}}H_z(x, y, z) = [\mathbf{h}_T(x, y) + \hat{\mathbf{z}}h_z(x, y)] e^{-\gamma z} \quad (3.1b)$$

式中: $\mathbf{e}_T(x, y)$ 、 $\mathbf{h}_T(x, y)$ 分别为横向 (x, y) 电场和磁场分量; e_z 、 h_z 分别为纵向电场和磁场分量。上式的波是沿 $+z$ 轴方向传输的;若波是沿 $-z$ 轴方向传输,可用 $-\gamma$ 代替 γ 得到。

由于传输线区域是无源的,导行电磁波满足时谐麦克斯韦方程组,可以写为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (3.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (3.2b)$$

因为具有 $e^{-\gamma z}$ 随 z 的变化关系,上述每个矢量方程可以简化为三个标量方程,于是有

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega\mu H_x \quad (3.3a)$$

$$-\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \quad (3.3b)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (3.3c)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\epsilon E_x \quad (3.4a)$$

$$-\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y \quad (3.4b)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z \quad (3.4c)$$

利用 E_z 和 H_z ,由上述 6 个方程可以求得 4 个横向场分量 E_x 、 E_y 、 H_x 和 H_y ,则有

$$E_x = \frac{-1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (3.5a)$$

$$E_y = \frac{1}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (3.5b)$$

$$H_x = \frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (3.5c)$$

$$H_y = \frac{-1}{k_c^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (3.5d)$$

式中

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2, \quad k = \omega \sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi/\lambda \quad (3.6)$$

式中: k_c 为截止波数,后面会解释采用这一名称的原因; k 为传输线区域中填充媒质的波数,它与第 2 章中无界空间中填充相同媒质时平面波的波数一致。

显然,如果已知传输线的纵向分量 E_z 和 H_z ,根据式(3.5)便可求出所有的横向场分量,从而得到导行波的全部解,这种求解导行波的方法称为纵向场法。这是非常有用的普遍结果,适用于各种导波系统。

把这些普遍的结果在一定条件下得到特定场结构的导行波称为导行波的模式,简称模,它能够单独在导波系统中存在。根据纵向分量 E_z 和 H_z 是否存在,可将导行波划分为以下三类模式:

- (1) $E_z = 0, H_z = 0$ 的电磁波称为横电磁波,即 TEM 模;
- (2) $E_z = 0, H_z \neq 0$ 的电磁波称为横电波,即 TE 模;
- (3) $E_z \neq 0, H_z = 0$ 的电磁波称为横磁波,即 TM 模。

3.1.2 TEM 模

由于 TEM 模的纵向场分量 $E_z = 0$ 和 $H_z = 0$,所以除非 $k_c^2 = 0$,否则式(3.5)只能得到零解。对于 TEM 模,有

$$k_c^2 = k^2 + \gamma^2 = 0$$

因此,TEM 模的截止波数为零。从而得到 TEM 模的传播参数如下:

传播常数为

$$\gamma = j\beta = jk = j\omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (3.7)$$

相速度为

$$v_p = \omega/\beta = 1/\sqrt{\mu\epsilon} \quad (3.8)$$

对于 TEM 模,由式(3.3a)和式(3.3b)可得

$$\gamma E_y = -j\omega\mu H_x \quad (3.9a)$$

$$\gamma E_x = j\omega\mu H_y \quad (3.9b)$$

导行电磁波的波阻抗定义为横向电场与横向磁场之比。对于 TEM 模,由式(3.9)可得波阻抗为

$$Z_{\text{TEM}} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (3.10)$$

由式(3.9)可得 TEM 模的横向电场与横向磁场之间的关系为

$$\mathbf{H}_T = \frac{1}{Z_{\text{TEM}}} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_T \quad (3.11)$$

从以上分析可知,导波系统中的 TEM 模的传播特性与无界空间中的均匀平面波的传播特性相同。

TEM 模电场 $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{e}_T(x, y)e^{-\gamma z}$, 它满足式(2.4a)的无源波动方程,得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E}(x, y, z) + k^2 \mathbf{E}(x, y, z) = 0 \quad (3.12)$$

对于依赖关系 $e^{-\gamma z}$, $(\partial^2/\partial z^2)\mathbf{E} = \gamma^2\mathbf{E}$, 并运用式(3.7), 可得

$$\nabla_T^2 \mathbf{e}_T(x, y) = 0 \quad (3.13)$$

式中: $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, 是横向二维拉普拉斯算子。

式(3.13)表明, TEM 模的横向电场 $\mathbf{e}_T(x, y)$ 满足拉普拉斯方程, 它与多导体间存在的静电场是相同的。因此, 存在两个或更多的导体时就会存在 TEM 模, 而空心单导体波导中不存在 TEM 模。这是因为假设在单导体波导内存在 TEM 模, 由于磁场只有横向磁场, 磁力线应在横向平面内闭合, 这时就要求波导内存在纵向的传导电流或者位移电流。但是, 因为是单导体波导, 所以其内没有纵向传导电流; 又因为纵向电场 $E_z = 0$, 所以其内没有纵向位移电流。

3.1.3 TE 模和 TM 模

对于 TE 模, 由于 $E_z = 0, H_z \neq 0$, 式(3.5)可简化为

$$E_x = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3.14a)$$

$$E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (3.14b)$$

$$H_x = \frac{-\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (3.14c)$$

$$H_y = \frac{-\gamma}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3.14d)$$

TE 模的波阻抗为

$$Z_{\text{TE}} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (3.15)$$

TE 模的横向电场与横向磁场的关系为

$$\mathbf{H}_T = \frac{1}{Z_{\text{TE}}} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_T \quad (3.16)$$

对于 TM 模, 由于 $E_z \neq 0, H_z = 0$, 式(3.5)可简化为

$$E_x = \frac{-\gamma}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (3.17a)$$

$$E_y = \frac{-\gamma}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (3.17b)$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (3.17c)$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (3.17d)$$

同样, TM 模的波阻抗为

$$Z_{\text{TM}} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \quad (3.18)$$

TM 模的横向电场与横向磁场的关系为

$$\mathbf{H}_T = \frac{1}{Z_{\text{TM}}} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_T \quad (3.19)$$

TE 模和 TM 模可存在于封闭的导体内, 也可以产生于两个或更多导体之间。对于 TE 模和 TM 模, $k_c^2 \neq 0$, 且传播常数 $\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2}$ 一般是工作频率和传输线几何结构的函数。对于给定的传输线和模式, k_c 是常实数, 因此当工作频率变化时, 会出现以下三种情况。

(1) 当 $k > k_c$ 时, 有

$$\gamma = j\beta = j\sqrt{k^2 - k_c^2}$$

式中: γ 为虚数; β 为实数。

将 $\gamma = j\beta$ 代入式(3.1), 可得

$$\mathbf{E}(x, y, z) = [\mathbf{e}_T(x, y) + \hat{\mathbf{z}}e_z(x, y)] e^{-j\beta z} \quad (3.20a)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = [\mathbf{h}_T(x, y) + \hat{\mathbf{z}}h_z(x, y)] e^{-j\beta z} \quad (3.20b)$$

这是沿 $+z$ 轴方向传输的传输模, 它的相位随传播距离的增加而连续滞后。此时 TE 模和 TM 模的波阻抗为

$$Z_{\text{TE}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\omega\mu}{\beta} \quad (3.21a)$$

$$Z_{\text{TM}} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} \quad (3.21b)$$

由式(3.21)可知, TE 和 TM 传输模的波阻抗都是实阻抗, 它们传输的是实功率。

(2) 当 $k < k_c$ 时, 有

$$\gamma = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \alpha$$

γ 为实数 α 。将 $\gamma = \alpha$ 代入式(3.1), 得

$$\mathbf{E}(x, y, z) = [\mathbf{e}_T(x, y) + \hat{\mathbf{z}}e_z(x, y)] e^{-\alpha z} \quad (3.22a)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = [\mathbf{h}_T(x, y) + \hat{z}h_z(x, y)] e^{-\alpha z} \quad (3.22b)$$

电磁波在导波系统中沿 $+z$ 轴方向呈指数衰减, 没有传播, 相位沿传播方向不变化, 这种模称为截止模或消逝模或凋落模。截止模的衰减与导体损耗或电介质损耗引起的衰减有本质上的不同, 它不是导体和介质热损耗引起的, 而是不满足波的传播条件而引起的电抗性衰减。此时 TE 模和 TM 模的波阻抗分别为

$$Z_{\text{TE}} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j\omega\mu}{\alpha} \quad (3.23a)$$

$$Z_{\text{TM}} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} = \frac{\alpha}{j\omega\epsilon} \quad (3.23b)$$

可见, TE 截止模和 TM 截止模的波阻抗为纯电抗, 其中 Z_{TE} 为正虚数、 Z_{TM} 为负虚数, 因此 TE 截止模以储存磁能为主, 表现出感性; 而 TM 截止模以储存电能为主, 表现出容性。

(3) $k = k_c, \gamma = 0$ 。电磁波沿 $+z$ 轴方向的传播常数为零, 导波系统正好处于截止状态。由于 $\gamma = 0$, 此时 $Z_{\text{TE}} \rightarrow \infty$, 相当于开路; $Z_{\text{TM}} \rightarrow 0$, 相当于短路。

由此可见, TE 模和 TM 模具有传输和截止两种状态, 这是不同于 TEM 模的独有特点。当 $k > k_c$ 时, 导行波处于传输状态; 当 $k < k_c$ 时, 导行波处于截止状态。

除了用截止波数 k_c 来描述导行波的截止状态外, 还可以用截止频率 f_c 和截止波长 λ_c 来描述, 它们与截止波数 k_c 的关系为

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (3.24)$$

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} \quad (3.25)$$

显然, 当 $f > f_c$ 或 $\lambda < \lambda_c$ 时, 导行波处于传输状态; 当 $f < f_c$ 或 $\lambda > \lambda_c$ 时, 导行波处于截止状态。

3.2 矩形波导

矩形波导是最早用于传输微波信号的传输线之一, 而且目前依旧应用广泛, 如高功率系统、低损耗系统、毫米波系统中。本节先用纵向场法求出矩形波导中的 TE 模和 TM 模的场表示式, 讨论这些模式的传输特性, 然后重点讨论矩形波导中主模的场分布及其传输特性。

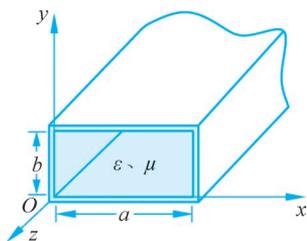


图 3.2 矩形波导及其坐标系

矩形波导结构如图 3.2 所示, 宽边为 a , 窄边为 b , 一般 $a \geq 2b$ 。波导壁是理想导体, 内部填充参数为 ϵ, μ 的理想媒质。由于矩形波导是单导体结构, 它可以传输 TE 模和 TM 模, 但不能传输 TEM 模。矩形波导具有截止频率, 低于这个截止频率就不能传输。

3.2.1 TE 模

对于 TE 模, 因为 $E_z = 0$, 由式(3.14)可知, 波导内的横向电场和横向磁场由 H_z 求得。而 H_z 满足波动方程, 即

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0 \quad (3.26)$$

因为 $H_z = h_z(x, y)e^{-\gamma z}$, 所以式(3.26)可以简化为 h_z 的二维波方程, 即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right)h_z = 0 \quad (3.27)$$

式中: $k_c = \sqrt{k^2 + \gamma^2}$, 为截止波数。

偏微分方程(3.27)可以用分离变量法来求解, 方法是令

$$h_z(x, y) = X(x)Y(y) \quad (3.28)$$

并把它代入式(3.27), 可得

$$\frac{d^2 X}{X dx^2} + \frac{d^2 Y}{Y dy^2} + k_c^2 = 0$$

要使上述方程对波导内所有 (x, y) 都成立, 上式中的每项必须等于一个常数。因此, 定义分离常数 k_x 和 k_y , 得到

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_x^2 X = 0 \quad (3.29a)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0 \quad (3.29b)$$

和

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \quad (3.30)$$

h_z 的通解可以写为

$$h_z(x, y) = (A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y) \quad (3.31)$$

要计算式(3.31)中的常数, 必须在波导壁上应用切向电场为零的边界条件, 即

$$e_x(x, y) = 0 \quad (\text{在 } y = 0, b \text{ 处}) \quad (3.32a)$$

$$e_y(x, y) = 0 \quad (\text{在 } x = 0, a \text{ 处}) \quad (3.32b)$$

不能直接应用式(3.31)中的 h_z , 必须首先用式(3.14a)和式(3.14b)求出 e_x 和 e_y :

$$e_x = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} k_y (A \cos k_x x + B \sin k_x x)(-C \sin k_y y + D \cos k_y y) \quad (3.33a)$$

$$e_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} k_x (-A \sin k_x x + B \cos k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y) \quad (3.33b)$$

然后由式(3.32a)和式(3.33a)以及式(3.32b)和式(3.33b), 得到

$$D = 0, \quad k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.34a)$$

$$B = 0, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.34b)$$

因此, TE 波的 H_z 的最终解为

$$H_z(x, y, z) = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (3.35)$$

式中: A_{mn} 是由式(3.31)中余下的常数 A 和 C 组成的任意振幅常数。

将 H_z 代入式(3.14), 求出 TE 模的四个横向分量后, 最终得到矩形波导中 TE 模的各场分量分别为

$$E_x = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (3.36a)$$

$$E_y = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (3.36b)$$

$$E_z = 0 \quad (3.36c)$$

$$H_x = \frac{\gamma}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (3.36d)$$

$$H_y = \frac{\gamma}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (3.36e)$$

$$H_z = A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} \quad (3.36f)$$

式(3.36)表征了矩形波导中 TE 模的场结构,对应 m 和 n 的每一组取值,表征了一种场模式,记为 TE_{mn} 模($m, n=0, 1, 2, \dots$)。可见,矩形波导中有无穷多个 TE_{mn} 模。需要注意的是, m 和 n 可以取零,但是不能同时为零,否则会得到除 $H_z \neq 0$ 外其余分量全为零的无意义的解,因此存在 TE_{m0} 和 TE_{0n} 模,不存在 TE_{00} 模。

式(3.36)还表明,矩形波导中 TE 模的任何一个分量在横向 x 和 y 方向都呈驻波分布, m 和 n 分别表示 x 和 y 方向半波长的个数。例如,对于 x 方向,其波数 $k_x = m\pi/a$,对应的 x 方向波长 $\lambda_x = 2\pi/k_x = 2a/m$,因此波导宽边 a 对应的半波长个数为 $a/(0.5\lambda_x) = m$ 。若 $m=0$ 或 $n=0$,则表示在 x 或 y 方向该模式的场分量均匀分布。

根据以上场分析结果,下面讨论 TE 模的一般传输特性和传输参数。

1. 截止参数

由式(3.30)和式(3.34)可得截止波数为

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (3.37)$$

可见,截止波数与波导横截面尺寸 a 、 b 和模式数 m 、 n 有关,记作 k_{cmn} 。相应的截止频率和截止波长为

$$f_{cmn} = \frac{k_{cmn}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (3.38a)$$

$$\lambda_{cmn} = \frac{2\pi}{k_{cmn}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (3.38b)$$

当 $k > k_c$ 或 $f > f_c$ 或 $\lambda < \lambda_c$ 时导行波处于传输状态,当 $k < k_c$ 或 $f < f_c$ 或 $\lambda > \lambda_c$ 时导行波处于截止状态,这说明矩形波导具有类似于高通滤波器的传输特性。式(3.38a)又说明,填充媒质可以降低矩形波导的截止频率,这种方法在微波工程中常被采用。例如,对于给定尺寸的矩形波导,若某个给定频率的电磁波在其中不能传播,则可通过在其中填充 ϵ_r 或 μ_r 适当的媒质来降低其截止频率,使得 $f > f_c$,就可使该频率的电磁波在其中传播。

将截止频率最低的模式称为主模,其他的模式称为高次模。因为已经假定 $a \geq 2b$,所以矩形波导最低的截止频率出现在 TE_{10} ($m=1, n=0$) 模中,有

$$f_{c10} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad \lambda_{c10} = 2a \quad (3.39)$$

因此, TE_{10} 模是矩形波导的主模。由于主模的重要性,将在后面小节详细介绍。

2. 相移常数和相速度

由于 $k_c^2 = k^2 + \gamma^2$,对于传输模, $k > k_c$, $\gamma = j\beta$, TE 模的相移常数为

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} < k \quad (3.40)$$

式中: β 为实数。

导行电磁波的相速度是导行电磁波等相位面的运动速度。TE 模的相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} > \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = v \quad (3.41)$$

它大于无界填充媒质空间中电磁波的光速, $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 。将式(3.40)代入式(3.41), 可得波导中 TE 模的相速度为

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (3.42)$$

式中: λ 为无界填充媒质空间中电磁波的波长。

可见, 矩形波导中 TE 模的相速度与频率有关, 因此 TE 模是色散模, 矩形波导是色散传输线。需要注意的是, 矩形波导色散并不是填充媒质造成的, 而是矩形波导本身结构造成的。这种色散与导电媒质中的色散有本质不同, 称为结构色散。结构色散与媒质色散一样, 宽带微波信号在其中传输会引起失真。

3. 导波波长

导波波长定义为相位差 2π 的相邻等相位面间的距离。导波波长为

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} > \lambda \quad (3.43)$$

显然, 导波波长大于相应无界媒质中的电磁波波长 λ 。

4. 波阻抗

由式(3.21a), TE 模的波阻抗 $Z_{TE} = j\omega\mu/\gamma$ 。对于传输模, $\gamma = j\beta$, TE 模的波阻抗为

$$Z_{TE} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{k}{\beta}\eta > \eta \quad (3.44)$$

式中: $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$, 为波导填充媒质的本征阻抗。对于传输模, Z_{TE} 是实数, TE 模传输实功率。

对于截止模, $\gamma = \alpha$, TE 模的波阻抗为

$$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\alpha} \quad (3.45)$$

Z_{TE} 是虚数, TE 模不能传输实功率, 主要存储磁能。

3.2.2 TM 模

对于 TM 模, $H_z = 0$, 而 E_z 满足简化后的二维波方程, 即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_c^2\right)e_z = 0 \quad (3.46)$$

式中

$$E_z = e_z(x, y)e^{-\gamma z}, \quad k_c^2 = k^2 + \gamma^2$$

式(3.46)可以用分离变量法来求解, 其通解为

$$e_z(x, y) = (A \cos k_x x + B \sin k_x x)(C \cos k_y y + D \sin k_y y) \quad (3.47)$$

边界条件直接应用到 e_z , 可得

$$e_z(x, y) = 0 \quad (\text{在 } y = 0, b \text{ 处}) \quad (3.48a)$$

$$e_z(x, y) = 0 \quad (\text{在 } x = 0, a \text{ 处}) \quad (3.48b)$$

由式(3.47)和式(3.48a)得 $A = 0$ 和 $k_x = m\pi/a$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), 由式(3.47)和式(3.48b)得到 $C = 0$ 和 $k_y = n\pi/b$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)。于是, E_z 的解化简为

$$E_z(x, y, z) = B_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-\gamma z} \quad (3.49)$$

将式(3.49)代入式(3.17), 求出 TM 模的 4 个横向分量后, 最终得到矩形波导中 TM 模电磁场的 6 个分量分别为

$$E_x = -\frac{\gamma}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) B_{mn} \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-\gamma z} \quad (3.50a)$$

$$E_y = -\frac{\gamma}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) B_{mn} \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-\gamma z} \quad (3.50b)$$

$$E_z = B_{mn} \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-\gamma z} \quad (3.50c)$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) B_{mn} \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-\gamma z} \quad (3.50d)$$

$$H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) B_{mn} \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-\gamma z} \quad (3.50e)$$

$$H_z = 0 \quad (3.50f)$$

式(3.50)表征了矩形波导中 TM 模的场结构, 对应 m 和 n 的每一组取值, 表征了一种场模式, 记为 TM_{mn} 模 ($m, n = 1, 2, 3, \dots$)。可见, 矩形波导中有无穷多个 TM_{mn} 模, 同时可以看到, 若 $m = 0$ 或 $n = 0$, 则式(3.50)中 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的场表达式恒等于零。因此, 不存在 TM_{00} 模、 TM_{m0} 和 TM_{0n} 模, 而可以传播的最低阶的 TM 模是 TM_{11} 模。与 TE 模类似, 矩形波导中 TM 模的任何一个分量在横向 x 和 y 方向都呈驻波分布, m 和 n 分别表示 x 和 y 方向的半个驻波波长的数目。

由上面分析可知, TM 模的截止波数为

$$k_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} \quad (3.51)$$

可见, TM_{mn} 模的截止波数与 TE_{mn} 模的截止波数相同。因此, TM_{mn} 模的截止频率、截止波长与 TE_{mn} 模的相同。把具有相同截止频率的 TE 模和 TM 模称为简并模。 TM_{mn} 模和 TE_{mn} 模是一对简并模。但是, 由于矩形波导中不存在 TM_{m0} 模和 TM_{0n} 模, 因此 TE_{m0} 模和 TE_{0n} 模不存在简并模。

由于 TE 模和 TM 模具有相同的截止频率, 因此 TM 模的相移常数 β 、相速度 v_p 、导波波长 λ_g 也与 TE 模相同。TM 模的波阻抗 $Z_{\text{TM}} = \gamma/j\omega\epsilon$, 对于传播模, $\gamma = j\beta$, TM 模的波阻抗为

$$Z_{\text{TM}} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \frac{\beta}{k} \eta < \eta \quad (3.52)$$

式中: $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$, 为波导填充媒质的本征阻抗。对于传播模, Z_{TM} 是实数, TM 模传输实功率。

对于截止模, $\gamma = \alpha$, TM 模的波阻抗为

$$Z_{\text{TM}} = \frac{\alpha}{j\omega\epsilon} \quad (3.53)$$

Z_{TM} 是虚数, TM 模不能传输实功率, 主要存储电能。

例 3.1 已知空气填充矩形波导的横截面尺寸 $a=7.2\text{cm}$, $b=3.4\text{cm}$ 。

- (1) 求其前 10 个模式的截止波长;
- (2) 确定所有模式均不能传播(截止)的工作波长;
- (3) 当 $\lambda=5.5\text{cm}$ 时, 求该波导中能够传输的模式;
- (4) 确定单模工作区。

解: (1) 由矩形波导的截止波长表达式

$$\lambda_{c_{mn}} = \frac{2\pi}{k_{c_{mn}}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

可以计算出前 10 个模式的截止波长, 如表 3.1 和图 3.3 所示。

表 3.1 矩形波导的截止波长 ($a=7.2\text{cm}$, $b=3.4\text{cm}$)

模式	TE ₁₀	TE ₂₀	TE ₃₀	TE ₀₁	TE ₀₂	TE ₁₁	TE ₂₁	TE ₃₁	TE ₂₂
$\lambda_{c_{mn}}/\text{cm}$	14.40	7.20	4.80	6.80	3.40	TM ₁₁	TM ₂₁	TM ₃₁	TM ₂₂
	14.40	7.20	4.80	6.80	3.40	6.16	4.95	3.93	2.80

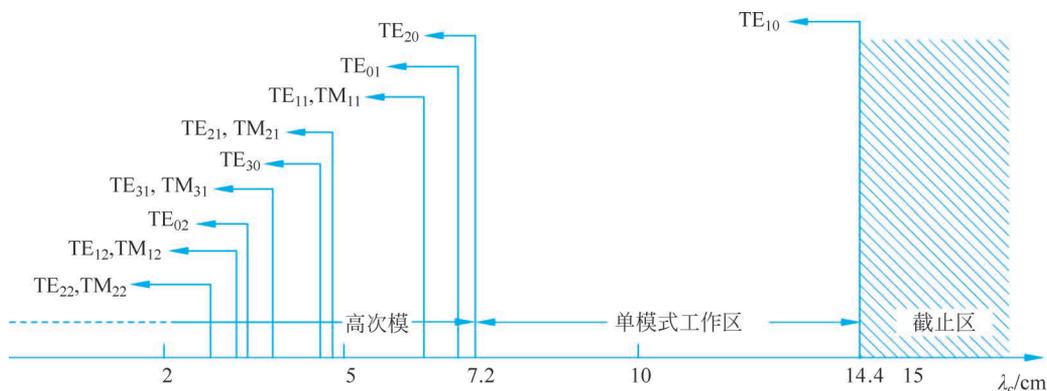


图 3.3 矩形波导的截止波长分布 ($a=7.2\text{cm}$, $b=3.4\text{cm}$)

(2) 由图 3.3 可见, 当 $\lambda > \lambda_{c\text{TE}_{10}} = 14.40\text{cm}$ 时, 所有模式是截止的。

(3) 当 $\lambda = 5.5\text{cm}$ 时, 由于 $\lambda < \lambda_c$ 可以传输, 因此 TE₁₀、TE₂₀、TE₀₁、TE₁₁、TM₁₁ 模可以传输。

(4) 单模工作区是指只有主模 (TE₁₀ 模) 可以传输, 其余模式都不能传播的工作波长的范围。由于主模的截止波长 $\lambda_{c\text{TE}_{10}} = 2a$, 高次模的最长截止波长 $\lambda_{c\text{TE}_{20}} = a$, 因此单模工作区为 $a < \lambda < 2a$, 即 $7.2\text{cm} < \lambda < 14.4\text{cm}$ 。

3.2.3 TE₁₀ 主模

TE₁₀ 模是矩形波导中的主模。在绝大多数应用中选择工作频率和波导尺寸, 使得其中只有主模 TE₁₀ 才能传输。下面对 TE₁₀ 模进行重点分析。

1. 传播参数

对于 TE₁₀ 模, $m=1, n=0$, 可得波导中 TE₁₀ 模的传播参数为

$$k_{c10} = \frac{\pi}{a}, \quad f_{c10} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}, \quad \lambda_{c10} = 2a \quad (3.54a)$$

$$\beta_{10} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (3.54b)$$

$$Z_{10} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \quad (3.54c)$$

2. 场分布图

对于 TE_{10} 模, 将 $m=1, n=0$ 代入式(3.36), 对于传输模, $\gamma=j\beta_{10}$, 则波导中 TE_{10} 模的场表示式为

$$E_y = \frac{-j\omega\mu a}{\pi} A_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_{10}z} \quad (3.55a)$$

$$H_x = \frac{j\beta_{10}a}{\pi} A_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_{10}z} \quad (3.55b)$$

$$H_z = A_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_{10}z} \quad (3.55c)$$

$$E_x = E_z = H_y = 0 \quad (3.55d)$$

其瞬时表达式为

$$E_y = \frac{\omega\mu a}{\pi} A_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta_{10}z) \quad (3.56a)$$

$$H_x = \frac{-\beta_{10}a}{\pi} A_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta_{10}z) \quad (3.56b)$$

$$H_z = A_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta_{10}z) \quad (3.56c)$$

根据式(3.56)可画出 $t=0$ 时 TE_{10} 模的三维场图, 如图 3.4 所示。由式(3.56)和图 3.4

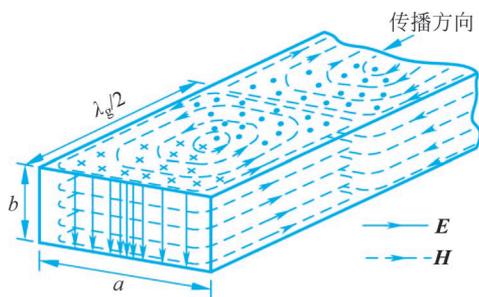


图 3.4 矩形波导 TE_{10} 模的场结构

可知, TE_{10} 模的电场只有 E_y 分量, 在 x 方向呈正弦分布, 在 y 方向均匀分布, 在 z 方向是传播的, 以导波波长为周期而变化。 TE_{10} 模的磁场只有 H_x 和 H_z 两个分量, 磁力线在 xOy 平面内是闭合的, 电场 E_y 对应的位移电流 \mathbf{J}_d 是磁场的旋涡源, 闭合磁力线旋转方向都与 \mathbf{J}_d 呈右手螺旋关系。

3. 内壁电流

当波导中存在电磁波时, 由于电磁感应, 在波导内壁上会产生感应电流。假设波导壁由理想导体构成, 该电流为面电流, 称为内壁电流。由式(1.52)表示的理想导体边界条件, 内壁电流密度为

$$\mathbf{J}_s = \hat{n} \times \mathbf{H} \quad (3.57)$$

式中: \hat{n} 为波导管内表面上的单位法向矢量; \mathbf{H} 为波导管内壁处的磁场强度。

对于 TE_{10} 模, 将式(3.56)代入式(3.57), 在 $x=0, a$ 左、右内壁的面电流密度为

$$\mathbf{J}_s |_{x=0} = \hat{x} \times \mathbf{H} |_{x=0} = -\hat{y} H_z |_{x=0} = -\hat{y} A_{10} \cos(\omega t - \beta_{10}z) \quad (3.58a)$$

$$\mathbf{J}_s |_{x=a} = -\hat{x} \times \mathbf{H} |_{x=a} = \hat{y} H_z |_{x=a} = -\hat{y} A_{10} \cos(\omega t - \beta_{10}z) = \mathbf{J}_s |_{x=0} \quad (3.58b)$$

可见, 左、右内壁的面电流密度相同。

在 $y=0, b$ 上、下内壁的面电流密度为



实践

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s |_{y=0} &= \hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{H} |_{y=0} = (\hat{\mathbf{x}}H_z - \hat{\mathbf{z}}H_x) |_{y=0} \\ &= \hat{\mathbf{x}}A_{10} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta_{10}z) + \hat{\mathbf{z}}\frac{\beta_{10}a}{\pi}A_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin(\omega t - \beta_{10}z) \quad (3.59a) \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}_s |_{y=b} = -\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{H} |_{y=b} = -\mathbf{J}_s |_{y=0} \quad (3.59b)$$

可见,上、下内壁的面电流密度大小相等、方向相反。

根据式(3.58)和式(3.59)可画出 $t=0$ 时 TE_{10} 模的内壁电流分布,如图 3.5 所示。可见,在左、右内壁电流密度只有 J_{sy} ,并且沿 y 方向均匀分布,沿 z 方向按余弦规律变化。在上、下内壁面电流密度有纵向电流密度 J_{sz} 和横向电流密度 J_{sx} 两个分量。纵向电流密度 J_{sz} 在波导宽边中心线 $x=a/2$ 处最强,随着偏离波导宽边中心线的距离(偏移量)变大, J_{sz} 逐渐变小,直至在左、右波导壁为零。横向电流密度 J_{sx} 在波导宽边中心线 $x=a/2$ 处为零,随着偏移量变大, J_{sx} 逐渐变大,直至在左、右波导壁最大。

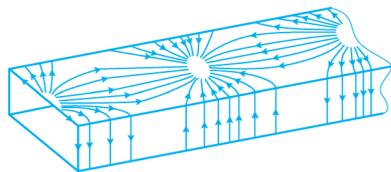


图 3.5 矩形波导传输 TE_{10} 模时的内壁电流分布

在微波工程中,熟悉波导内壁电流分布很重要。在实际应用中常需要在波导壁上开缝或者开孔,完成波导的激励和耦合,或者测量波导内的场分布,或者向外辐射能量。由图 3.5 可知,如果在波导宽壁的中心线上开纵向缝或者在波导窄壁上开横向缝。由于缝隙一般较窄,不会切断电流线,因此不会影响波导内的场分布,也不会产生辐射,如图 3.6(a)所示。利用这一特性可以制成波导测量线,在波导宽壁中心线上开的纵向长缝内插入探针来测量波导内的场分布和传输特性。

在微波工程中,有时需要在波导壁上开强辐射缝,以便向外辐射电磁能量。强辐射缝都应切断波导壁上传导电流的通路,这样在窄缝两边有时变正、负电荷的堆积,在缝隙中形成与缝隙两边垂直的时变电场以及与缝隙平行的时变磁场,它们在空间互相激励就形成了向外的电磁辐射。图 3.6(b)画出了波导壁上的 4 种强辐射缝,分别是宽边横向缝、宽边纵向缝、宽边倾斜缝和窄边纵向缝。利用这一特性,可以制成波导缝隙天线。

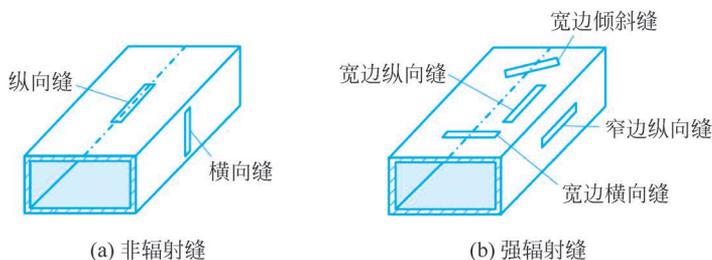


图 3.6 矩形波导管壁上开缝

4. 传输功率

对于矩形波导的 TE_{10} 模,传输功率等于该模式的平均坡印廷矢量 \mathbf{S}_{av} 在波导横截面 S 上积分,可得

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{2} \text{Re} \left(\iint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \hat{\mathbf{z}} \, ds \right) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\int_0^a \int_0^b (E_x H_y^* - E_y H_x^*) \, dx \, dy \right] \\ &= -\frac{1}{2} \text{Re} \left(\int_0^a \int_0^b E_y H_x^* \, dx \, dy \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\text{Re}(Z_{10}^*)} \int_0^a \int_0^b |E_y|^2 \, dx \, dy \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z_{10}) \int_0^a \int_0^b |H_x|^2 dx dy \quad (3.60a)$$

式中：对于传输模， $Z_{10} = \omega\mu/\beta_{10}$ 是实数， TE_{10} 模传输实功率；对于截止模， $Z_{10} = j\omega\mu/\alpha$ ，是虚数， TE_{10} 模不能传输实功率，只储存磁能。

将式(3.55a)代入式(3.60)，矩形波导中 TE_{10} 模通常是传输的，可求出其传输功率为

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{Re}(Z_{10}^*)} \int_0^a \int_0^b |E_y|^2 dx dy = \frac{1}{2Z_{10}} \int_0^a \int_0^b \left| E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right|^2 dx dy \\ &= \frac{ab}{4Z_{10}} E_0^2 \end{aligned} \quad (3.60b)$$

式中： E_0 为电场 E_y 分量在波导宽边中心处的振幅，由式(3.56a)可知， $E_0 = \omega\mu a A_{10}/\pi$ 。

5. 波导模的平面波分解

式(3.55)所示的场表达式也可以写为

$$\mathbf{E} = -\hat{y} \frac{k\eta}{k_{x10}} \frac{A_{10}}{2} [e^{j(k_{x10}x - \beta_{10}z)} - e^{-j(k_{x10}x + \beta_{10}z)}] \quad (3.61a)$$

$$\mathbf{H} = \left(\hat{x} \frac{\beta_{10}}{k_{x10}} + \hat{z} \right) \frac{A_{10}}{2} e^{j(k_{x10}x - \beta_{10}z)} - \left(\hat{x} \frac{\beta_{10}}{k_{x10}} - \hat{z} \right) \frac{A_{10}}{2} e^{-j(k_{x10}x + \beta_{10}z)} \quad (3.61b)$$

式中： $k_{x10} = \pi/a$ 。

式(3.61)表明， TE_{10} 模可以分解成两个幅度相等、在 xOz 平面上沿不同方向传播的平面波，如图 3.7 所示。平面波传播方向与 z 轴的夹角 $\theta = \arctan(k_{x10}/\beta_{10})$ ，平面波在 θ 角方向上的相速度 $v_p = \omega/k = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ 。然而，这些平面波在 z 方向的相速度 $v_{pz} = \omega/\beta_{10} = v_p/\cos\theta > v_p$ ，它大于该材料中的光速。当频率接近截止频率时， $\beta_{10} \rightarrow 0$ ，因而 $\theta \rightarrow 90^\circ$ 。在截止时，这两个平面波只在横向来回反射，因而功率并不沿 z 方向传输。对于每个波导模式，都可以得到类似的波传播射线示意图，不过平面波的传播方向不在限定在 xOz 平面。

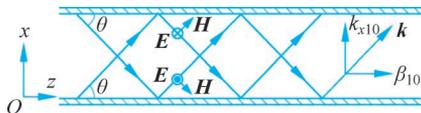


图 3.7 矩形波导 TE_{10} 模的波传播射线示意图

3.3 圆波导

圆波导是内半径为 a 、横截面为圆形的空心金属波导管，如图 3.8 所示。因为涉及圆柱几何结构，所以采用圆柱坐标系是合适的。与矩形波导直角坐标系的情况一样，圆波导的 TE 模和 TM 模横向场分量可以分别从 E_z 或 H_z 导出。对应于 3.1 节的展开，圆波导的横向分量可以由纵向分量导出，即

$$E_\rho = -\frac{1}{k_c^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\rho \partial \phi} \right) \quad (3.62a)$$

$$E_\phi = \frac{1}{k_c^2} \left(-\gamma \frac{\partial E_z}{\rho \partial \phi} + j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \quad (3.62b)$$

$$H_\rho = \frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\rho \partial \phi} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \quad (3.62c)$$



视频

$$H_\phi = -\frac{1}{k_c^2} \left(j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \gamma \frac{\partial H_z}{\rho \partial \phi} \right) \quad (3.62d)$$

式中: $k_c^2 = \gamma^2 + k^2$, 且假定是 $e^{-\gamma z}$ 传播。

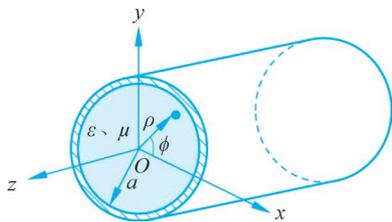


图 3.8 圆波导及其圆柱坐标系

3.3.1 TE 模

圆波导是空心金属波导管, 只能传输 TE 模和 TM 模, 不能传输 TEM 模。对于 TE 模, $E_z = 0$, 而 H_z 由波动方程

$$\nabla^2 H_z(\rho, \phi, z) + k^2 H_z(\rho, \phi, z) = 0 \quad (3.63)$$

求解。若 $H_z = h_z(\rho, \phi)e^{-\gamma z}$, 则式(3.63)可以用圆柱坐标系表示成

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k_c^2 \right) h_z(\rho, \phi) = 0 \quad (3.64)$$

同理, 应用分离变量法求解方程(3.64), 令

$$h_z(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$$

将上式代入式(3.64), 整理后可得

$$\frac{\rho^2}{R} \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R} \frac{dR}{d\rho} + k_c^2 \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2}$$

上式的左边仅是变量 ρ 的函数(与 ϕ 无关), 右边只与 ϕ 有关。因此, 两边必须等于一个常数, 令常数为 m^2 , 上述方程可分离为

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (3.65a)$$

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + (\rho^2 k_c^2 - m^2)R = 0 \quad (3.65b)$$

式中: m 为分离常数。

式(3.65a)是谐波方程, 其通解为

$$\Phi(\phi) = A \sin m\phi + B \cos m\phi \quad (3.66)$$

式中: A 和 B 均为常数。

因为圆波导 h_z 的解必定是 ϕ 的周期函数, 即 $h_z(\rho, \phi) = h_z(\rho, \phi \pm 2m\pi)$, 所以 m 必须取整数, $m = 0, 1, 2, \dots$ 。

式(3.65b)是 m 阶贝塞尔方程, 其通解为

$$R(\rho) = C J_m(k_c \rho) + D Y_m(k_c \rho) \quad (3.67)$$

式中: $J_m(k_c \rho)$ 为 m 阶第一类贝塞尔函数; $Y_m(k_c \rho)$ 为 m 阶第二类贝塞尔函数。附录 H 中给出了贝塞尔函数的特性。因为 $Y_m(k_c \rho)$ 在 $\rho = 0$ 时趋于无穷, 所以该项对于圆波导而言是不存在的, 所以 $D = 0$ 。

这样, H_z 的解为

$$H_z = J_m(k_c \rho)(A \sin m\phi + B \cos m\phi)e^{-\gamma z} \quad (3.68)$$

式(3.67)中的常数 C 已经被吸纳在式(3.68)中的 A 和 B 中。

通过在圆波导壁上施加切向电场等于零的边界条件来确定截止波数:

$$E_\phi(\rho, \phi, z) = 0 \quad (\text{在 } \rho = a \text{ 处}) \quad (3.69)$$

根据式(3.62b), 由 H_z 求得 E_ϕ 为

$$E_\phi(\rho, \phi, z) = \frac{j\omega\mu}{k_c} J'_m(k_c \rho)(A \sin m\phi + B \cos m\phi)e^{-\gamma z} \quad (3.70)$$

式中: $J'_m(k_c \rho)$ 为 J_m 对其自变量的导数。

因为 E_ϕ 在 $\rho = a$ 处为零, 所以有

$$J'_m(k_c a) = 0 \quad (3.71)$$

假设 $J'_m(x)$ 的第 n 个根为 p'_{mn} , 即 $J'_m(p'_{mn}) = 0$, 则 k_c 的值为

$$k_{cnn} = \frac{p'_{mn}}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.72)$$

圆波导 TE 模的 p'_{mn} 值列于表 3.2。

表 3.2 圆波导 TE 模的 p'_{mn} 值

m	p'_{m1}	p'_{m2}	p'_{m3}
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.965

将式(3.70)和 $E_z = 0$ 代入式(3.62), 可得圆波导中 TE 模的各个场分量分别为

$$E_\rho = -\frac{j\omega\mu m}{k_c^2 \rho} J_m(k_c \rho)(A \cos m\phi - B \sin m\phi)e^{-\gamma z} \quad (3.73a)$$

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu}{k_c} J'_m(k_c \rho)(A \sin m\phi + B \cos m\phi)e^{-\gamma z} \quad (3.73b)$$

$$E_z = 0 \quad (3.73c)$$

$$H_\rho = -\frac{\gamma}{k_c} J'_m(k_c \rho)(A \sin m\phi + B \cos m\phi)e^{-\gamma z} \quad (3.73d)$$

$$H_\phi = -\frac{\gamma m}{k_c^2 \rho} J_m(k_c \rho)(A \cos m\phi - B \sin m\phi)e^{-\gamma z} \quad (3.73e)$$

$$H_z = J_m(k_c \rho)(A \sin m\phi + B \cos m\phi)e^{-\gamma z} \quad (3.73f)$$

式(3.73)表明, 圆波导与矩形波导一样, 有无穷多个 TE 模, 记作 TE_{mn} , 其中 m 为轴向(ϕ)的变化数量, n 为径向(ρ)的变化数量。圆波导 TE_{mn} 模的波阻抗为

$$Z_{TE} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = -\frac{E_\phi}{H_\rho} = \frac{k}{\beta} \eta \quad (3.74)$$

TE_{mn} 模的相移常数为

$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - k_{cnn}^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p'_{mn}}{a}\right)^2} \quad (3.75)$$

截止频率为

$$f_{cnn} = \frac{k_{cnn}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{p'_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (3.76)$$

截止频率最低的 TE 模具有最小的 p'_{mn} , 由表 3.2 可以看出, $p'_{11}=1.841$, 是圆波导的最低次 TE 模, 次低的 TE 模是 TE₂₁ 模, $p'_{21}=3.054$ 。由于 $n \geq 1$, 不存在 TE_{m0} 模。

3.3.2 TM 模

对于 TM 模, $H_z=0$, 而 E_z 必须用圆柱坐标系的波动方程来求解:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k_c^2\right) e_z(\rho, \phi) = 0 \quad (3.77)$$

式中: $E_z = e_z(\rho, \phi)e^{-\gamma z}$ 。

因为式(3.77)与式(3.64)一致, 其通解也相同。这样, E_z 的解为

$$E_z = J_m(k_c \rho)(A \sin m\phi + B \cos m\phi)e^{-\gamma z} \quad (3.78)$$

TE 解与这里解的差别是, 现在可以直接把边界条件应用到式(3.78)中的 E_z , 因为

$$E_z(\rho, \phi, z) = 0 \quad (\text{在 } \rho = a \text{ 处}) \quad (3.79)$$

因此, 必定有

$$J_m(k_c a) = 0 \quad (3.80)$$

故有

$$k_{cmn} = \frac{p_{mn}}{a} \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.81)$$

式中: p_{mn} 为 $J_m(x)$ 的第 n 个根, 即 $J_m(p_{mn})=0$ 。圆波导 TM 模的 p_{mn} 值列于表 3.3。

表 3.3 圆波导 TM 模的 p_{mn} 值

m	p_{m1}	p_{m2}	p_{m3}
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.139	8.417	11.620

将式(3.78)和 $H_z=0$ 代入式(3.62), 可得圆波导中 TM 模的各分量分别为

$$E_\rho = -\frac{\gamma}{k_c} J'_m(k_c \rho)(A \sin m\phi + B \cos m\phi)e^{-\gamma z} \quad (3.82a)$$

$$E_\phi = -\frac{\gamma m}{k_c^2 \rho} J_m(k_c \rho)(A \cos m\phi - B \sin m\phi)e^{-\gamma z} \quad (3.82b)$$

$$E_z = J_m(k_c \rho)(A \sin m\phi + B \cos m\phi)e^{-\gamma z} \quad (3.82c)$$

$$H_\rho = \frac{j\omega\epsilon m}{k_c^2 \rho} J_m(k_c \rho)(A \cos m\phi - B \sin m\phi)e^{-\gamma z} \quad (3.82d)$$

$$H_\phi = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c} J'_m(k_c \rho)(A \sin m\phi + B \cos m\phi)e^{-\gamma z} \quad (3.82e)$$

$$H_z = 0 \quad (3.82f)$$

式(3.82)表明, 圆波导与矩形波导一样, 有无穷多 TM 模, 记作 TM_{mn}, 其中 m 是轴向(ϕ)的变化数量, n 是径向(ρ)的变化数量。圆波导 TM_{mn} 模的波阻抗为

$$Z_{\text{TM}} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = -\frac{E_\phi}{H_\rho} = \frac{\beta}{k} \eta \quad (3.83)$$

TM_{mn} 模的传播常数为

$$\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - k_{c_{mn}}^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p_{mn}}{a}\right)^2} \quad (3.84)$$

截止频率为

$$f_{c_{mn}} = \frac{k_{c_{mn}}}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{p_{mn}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (3.85)$$

因此,第一个 TM 传输模是 TM_{01} 模,它有 $p_{01} = 2.405$ 。因为这个值大于最低阶 TE_{11} 模的 $p'_{11} = 1.841$,所以 TE_{11} 是圆波导的主模。因为 $n \geq 1$,所以不存在 TM_{m0} 模。

从 TE 模和 TM 模的场分量表达式可以看出,当 $m \neq 0$ 时,对于同一个 TE_{mn} 模或 TM_{mn} 模都有两个场结构,它们分别是 $\sin m\phi$ 和 $\cos m\phi$,这种称为极化简并,是圆波导特有的。因为圆波导在周向是对称的,它们都是有效解,实际结构依赖于波导的激励情况。从另一个角度看,坐标系可以绕 z 轴旋转,从而得到 $A=0$ 或 $B=0$ 的解。

图 3.9 给出了圆波导的 TE 模和 TM 模的截止频率的相对值。 TE_{11} 主模单模工作频率范围是 $f_{c_{TE_{11}}} < f < f_{c_{TM_{01}}}$,可以看出,其工作频带比矩形波导中 TE_{10} 模的单模工作频带窄,并且 TE_{01} 模和 TM_{11} 模是简并模。

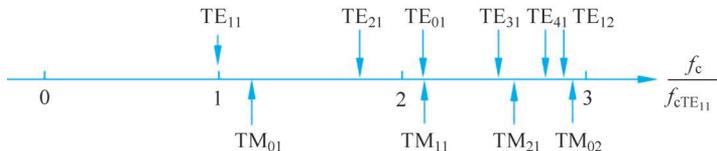


图 3.9 圆波导的几个 TE 模和 TM 模的截止频率

3.3.3 三种常用模式

圆波导中常用的工作模式是 TE_{11} 、 TE_{01} 和 TM_{01} 模,它们的截止波长 $\lambda_{c_{TE_{11}}} = 3.413a$, $\lambda_{c_{TM_{01}}} = 2.613a$, $\lambda_{c_{TE_{01}}} = 1.640a$ 。

1. 主模—— TE_{11} 模

TE_{11} 模具有最低的截止频率,它是圆波导中的主模,其场分布如图 3.10 所示。由于 TE_{11} 模存在极化简并,只要圆波导中存在不均匀性,当 TE_{11} 模在圆波导中传输时,其极化面就会旋转而分裂成一对极化简并模。另外,圆波导中 TE_{11} 模的单模工作频带窄,因此圆波导的 TE_{11} 模一般不适于中远距离微波信号传输。然而,一些特殊的情况下,例如极化衰减器、铁氧体移相器、极化变换器等,采用圆波导 TE_{11} 模是最合适的。由于圆波导中 TE_{11} 模的场结构与矩形波导中 TE_{10} 主模的场结构相似,因此很容易实现矩形波导到圆波导的转换。

2. 圆对称模—— TM_{01} 模

TM_{01} 模是圆波导的第一高次模,不存在极化简并,也不存在简并模式,其场分布如图 3.11 所示,它具有轴对称性。利用这一特性, TM_{01} 模适合作为机械扫描微波天线馈电系统中旋转关节的工作模式。但是, TM_{01} 不是圆波导的主模,在应用过程中应设法抑制 TE_{11} 主模。

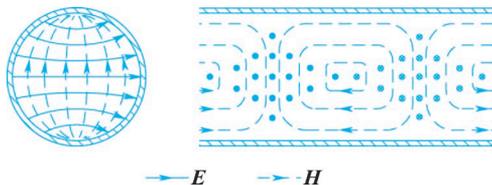


图 3.10 圆波导 TE_{11} 模的场图

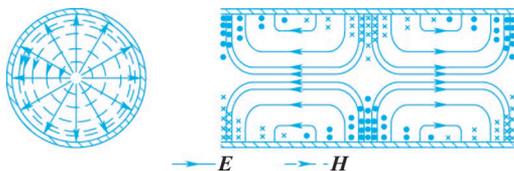


图 3.11 圆波导 TM_{01} 模的场图

3. 低损耗模——TE₀₁ 模

TE₀₁ 模是圆波导中的高次模,不存在极化简并,但与 TM₁₁ 模存在模式简并,其场分布如图 3.12 所示。TE₀₁ 模也是轴对称的,电场只有 E_ϕ 分量,圆波导壁处磁场只有切向分量 H_z ,因此内壁电流只在圆周方向流动,而无纵向壁电流。因此,TE₀₁ 模的衰减随频率的增加而减小。利用这一特性,适合用于高 Q 值谐振腔,以及毫米波远距离传输。同样,TE₀₁ 模不是圆波导的主模,在应用过程中需要设法抑制其他模式。

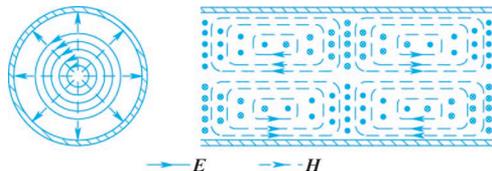


图 3.12 圆波导 TE₀₁ 模的场图

3.4 同轴线

同轴线是一种双导体构成的导波系统,如图 3.13 所示。它的内导体半径为 a ,外导体的内半径为 b 。假设内、外导体是理想导体,内、外导体之间填充参数为 μ 和 ϵ 的理想媒质, μ 和 ϵ 为实常数。实际同轴线的导体是良导体,填充媒质是聚四氟乙烯、聚乙烯等低损耗的电介质,所以实际的同轴线有衰减,存在导体损耗和介质损耗。由于同轴线是双导体结构,因此它既可以传输 TEM 模,也可以传输 TE 模和 TM 模。

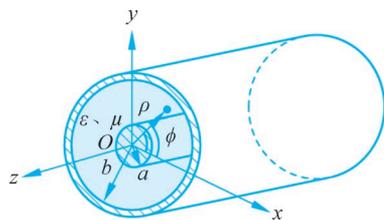


图 3.13 同轴线及其坐标系

3.4.1 TEM 模

TEM 模的纵向分量为零,即 $E_z = 0$ 和 $H_z = 0$ 。显然,TEM 模不能用 3.1 节介绍的纵向法求解。下面从麦克斯韦方程组出发求解。同轴线中的场满足麦克斯韦旋度方程组:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (3.86a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (3.86b)$$

由于同轴线周向对称,场不随 ϕ 改变,因此 $\partial/\partial\phi = 0$ 。将式(3.86)在圆柱坐标系下展开,得到

$$-\hat{\rho} \frac{\partial E_\phi}{\partial z} + \hat{\phi} \frac{\partial E_\rho}{\partial z} + \hat{z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\phi) = -j\omega\mu (\hat{\rho} H_\rho + \hat{\phi} H_\phi) \quad (3.87a)$$

$$-\hat{\rho} \frac{\partial H_\phi}{\partial z} + \hat{\phi} \frac{\partial H_\rho}{\partial z} + \hat{z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\phi) = j\omega\epsilon (\hat{\rho} E_\rho + \hat{\phi} E_\phi) \quad (3.87b)$$

因为这两个方程的 \hat{z} 分量必须为零,所以 E_ϕ 和 H_ϕ 必定具有形式

$$E_\phi = \frac{f(z)}{\rho} \quad (3.88a)$$

$$H_\phi = \frac{g(z)}{\rho} \quad (3.88b)$$

为了满足 $\rho = a, b$ 的边界条件 $E_\phi = 0$,由于 E_ϕ 的表达式为式(3.88a),因此必定处处有 $E_\phi = 0$ 。然后,由式(3.87a)的 $\hat{\phi}$ 分量可以看出, $H_\rho = 0$ 。利用这些结果,式(3.87)可简化为

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} = -j\omega\mu H_\phi \quad (3.89a)$$

$$\frac{\partial H_\phi}{\partial z} = -j\omega\epsilon E_\rho \quad (3.89b)$$

由式(3.88b)中 H_ϕ 和式(3.89a)可知, E_ρ 必定具有形式

$$E_\rho = \frac{h(z)}{\rho} \quad (3.90)$$

对 E_ρ 和 H_ϕ 的方程(3.89a)和方程(3.89b)联立求解,可以得到 E_ρ 或 H_ϕ 的波动方程:

$$\frac{\partial^2 E_\rho}{\partial z^2} + \omega^2 \mu\epsilon E_\rho = 0 \quad (3.91)$$

从式(3.91)可以看出,传播常数 $\gamma^2 = -\omega^2 \mu\epsilon$; 对于理想媒质,它可以简化为

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad (3.92)$$

可以看出,同轴线中的传播常数与无界理想媒质中的平面波的传播常数是相同的,这是 TEM 传输线的普遍结果。

将式(3.90)代入式(3.91)中,得到谐波方程为

$$\frac{\partial^2 h(z)}{\partial z^2} + \beta^2 h(z) = 0 \quad (3.93)$$

它的解是 $e^{\pm j\beta z}$ 。现考虑沿 $+z$ 方向传播的 TEM 波,并运用式(3.90)和式(3.89b),得到同轴线中电场和磁场分别为

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \hat{\rho} \frac{E_0}{\rho} e^{-j\beta z} \quad (3.94a)$$

$$\mathbf{H}(\rho, \phi, z) = \hat{\phi} \frac{\omega\epsilon}{\beta} \frac{E_0}{\rho} e^{-j\beta z} \quad (3.94b)$$

式中: E_0 为常数。

可见,同轴线中的 TEM 模电场只有 E_ρ 分量,磁场只有 H_ϕ 分量,场分布如图 3.14 所示。

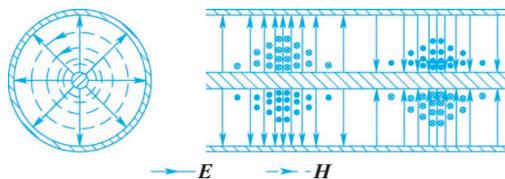


图 3.14 同轴线 TEM 模的场分布

波阻抗定义为 $Z_w = E_\rho / H_\phi$,它可由式(3.94)得到:

$$Z_w = \frac{E_\rho}{H_\phi} = \frac{\beta}{\omega\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta \quad (3.95)$$

可以看出,同轴线的波阻抗与媒质的本征阻抗是一致的,这也是 TEM 传输线的普遍结果。

内、外导体间的电压可以由电场的积分得到,即

$$V(z) = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\hat{\rho} = \int_a^b \frac{E_0}{\rho} e^{-j\beta z} d\rho = E_0 \ln \frac{b}{a} e^{-j\beta z} \quad (3.96)$$

导体上的电流可由安培定律求得,具体为

$$I(z) = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{E_0}{Z_w \rho} e^{-j\beta z} \rho d\phi = \frac{2\pi E_0}{\eta} e^{-j\beta z} \quad (3.97)$$

可见,同轴线上的电压和电流也是沿 $+z$ 方向传播的行波,同时也说明电场 \mathbf{E} 与电压 V 、磁场 \mathbf{H} 与电流 I 具有“场-路”相通性,为第 4 章用“化场为路”的方法进一步分析传输线特性奠定了基础。

同轴线的特性阻抗定义为行波电压与行波电流之比,即

$$Z_c = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{\eta \ln(b/a)}{2\pi} \quad (3.98)$$

这个特性阻抗仅与传输线结构和填充媒质有关,是同轴线所固有的参数。

同轴线沿 $+z$ 方向的传输功率可由平均坡印廷矢量计算得到

$$P_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_s \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{|E_0|^2}{\eta \rho^2} 2\pi \rho d\rho = \frac{\pi |E_0|^2}{\eta} \ln \frac{b}{a} = \frac{1}{2} VI^* \quad (3.99)$$

这个结果与电路理论的结果一致,再次说明同轴线具有“场-路”相通性。

3.4.2 高次模和尺寸选择

实际工作中,同轴线以 TEM 模作为单模工作。但是,当尺寸选择不当时,同轴线中除了 TEM 模之外,还可能出现 TE 模和 TM 模等高次模。讨论同轴线高次模的意义在于了解高次模的截止波长与同轴线横向尺寸间的关系,以便在频率给定时选择合适的同轴线尺寸,保证同轴线只传输 TEM 模。

1. TE 模和 TM 模的截止波长

分析同轴线中 TE 模和 TM 模的方法与分析圆波导中 TE 模和 TM 模的方法相似,这里不做具体的分析与推导,只给出同轴线中最低次 TM_{01} 模和最低次 TE_{11} 模的截止波长,它们分别为

$$\lambda_{c,\text{TM}_{01}} \approx 2(b-a) \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (3.100a)$$

$$\lambda_{c,\text{TE}_{11}} \approx \pi(b+a) \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (3.100b)$$

由此可见,同轴线内高次模中最低次模是 TE_{11} 模。

2. 同轴线的尺寸选择

为了保证同轴线只传输 TEM 模,必须使最短工作波长 λ_{\min} 大于最低次高次模 TE_{11} 模的截止波长,即应使

$$\lambda_{\min} > \pi(b+a) \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$$

或

$$b+a < \frac{\lambda_{\min}}{\pi \sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (3.101)$$

上式确定了 $b+a$ 的取值范围。为了最终确定尺寸 a 和 b ,还需要功率容量最大或损耗最小来确定。

由式(3.94a)可知,同轴线 TEM 模在 $\rho=a$ 处电场最强,令该处电场强度值 $|E_0|/a$ 等于同轴线填充媒质的击穿强度 E_{br} ,则击穿时 $|E_0| = E_{br}a$,将其代入式(3.99)得同轴线传输 TEM 模时的功率容量为

$$P_{\max} = \frac{\sqrt{\epsilon_r} a^2 E_{br}^2}{120} \ln \frac{b}{a} \quad (3.102)$$

由功率容量最大的条件 $dP_{\max}/da = 0$,可得

$$\frac{b}{a} = 1.65 \quad (3.103)$$

此时,由式(3.98)可得空气填充同轴线的特性阻抗约为 30Ω 。由损耗最小的条件 $da/da = 0$,可得

$$\frac{b}{a} = 3.59 \quad (3.104)$$

由式(3.98)可得空气填充同轴线的特性阻抗约为 77Ω 。

以上分析说明,对于同轴线不能同时兼顾功率容量最大和损耗最小这两个要求。如果两者都有要求,只能折中。对于空气填充的同轴线,一般取 $b/a = 2.30$,此时空气填充同轴线的特性阻抗约为 50Ω ,衰减比最小情况约大 10% ,功率容量比最大功率容量约小 15% 。

同轴线尺寸已经标准化,附录 F 中列出了部分标准同轴线的参数。

3.5 案例 1: 矩形波导及其尺寸选择

尽管矩形波导体积大、较重、不易加工和集成,但是由于其耐功率高、损耗小,仍在高功率系统、低损耗系统、毫米波系统中有广泛应用。理论上,它工作在单模工作区,即 $a < \lambda < 2a$,只能够传输主模,其他高次模都截止。但在实际应用中,波导尺寸选择还需考虑功率容量、损耗等多种因素。

3.5.1 矩形波导的功率容量

空气填充的传输线或波导的功率容量受限于击穿电压,在室温及海平面大气压下,电场强度 $E_{br} \approx 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ 时就会发生电压击穿。

由式(3.60b)可知,矩形波导中 TE_{10} 模的传输功率为

$$P_{10} = \frac{ab}{4Z_{10}} E_0^2 = \frac{ab}{480\pi} E_0^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.105)$$

矩形波导中 TE_{10} 模的电场按 $E_0 \sin(\pi x/a)$ 变化,它在 $x = a/2$ 处电场强度值最大。因此,击穿前的最大功率容量为

$$P_{\max} = \frac{ab}{480\pi} E_{br}^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.106)$$

上式表明,矩形波导的功率容量与波导尺寸、击穿场强以及工作波长密切相关。显然,波导尺寸越大,功率容量也越大。波导的功率容量可通过填充惰性气体或电介质来增加,因为绝大多数电介质的击穿场强大于空气的击穿场强。图 3.15 给出了 $P_{\max} - \lambda/2a$ 的关系曲线。由图可知:当 $\lambda/2a \geq 0.9$ 时, P_{\max} 从最大值的 50% 急剧下降到零;当 $\lambda/2a < 0.5$ 时,可能会出现高次模。因此,在矩形波导中用 TE_{10} 模传输功率时,应使 $0.5 < \lambda/2a < 0.9$,即应使

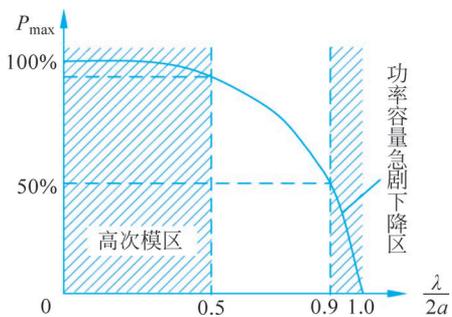


图 3.15 功率容量 P_{\max} 与 $\lambda/2a$ 的关系

$a < \lambda < 1.8a$ 。

因为电弧放电和电压击穿是非常迅速的效应,所以上述功率极限是峰值量。此外,良好的工程环境需要提供一个至少为 2 的安全因子,所以能够安全传输的最大功率应为最大功率容量的一半。同时,当波导中存在反射时,波导中最大电场值会增加,功率容量将会进一步减小。在最坏情况下,波导中最大电场值会增加到原来的 2 倍,因此功率容量减小因子为 4。

为了保证微波大功率设备的安全运行,通常规定波导的传输功率为

$$P_t = \left(\frac{1}{3} \sim \frac{1}{5} \right) P_{\max} \quad (3.107)$$

3.5.2 矩形波导的衰减

实际的波导并不是由理想导体制成的,填充的也不是理想介质,因此电磁波在波导中传播时总伴随着导体损耗和电介质损耗等热损耗,使得沿波导轴向传输的电磁波振幅呈指数函数衰减。波导一般用良导体制成,填充的电介质也是低损耗的,所以实际的波导一般是低损耗传输线。

严格计算有耗传输线是非常困难的,这里介绍一种通用的方法来计算低损耗传输线的衰减常数。其基本思路是假定有耗线上的场与无耗线上的场差别不大,即用无耗线上的场代替有耗线上的场,这种计算方法称为微扰法。

低损耗传输线传播常数为复数,即 $\gamma = \alpha + j\beta$, 这里 α 为衰减常数, β 为相移常数。于是线上沿 $+z$ 方向传播的导行电磁波可表示成

$$\mathbf{E}(x, y, z) = [\mathbf{E}_T(x, y) + \hat{\mathbf{z}}E_z(x, y)]e^{-\gamma z} \quad (3.108a)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = [\mathbf{H}_T(x, y) + \hat{\mathbf{z}}H_z(x, y)]e^{-\gamma z} \quad (3.108b)$$

线上的传输功率为

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\iint_S \mathbf{E}(x, y, z) \times \mathbf{H}^*(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{z}} ds \right) \\ &= \left[\frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_S \mathbf{E}_T(x, y) \times \mathbf{H}_T^*(x, y) \cdot \hat{\mathbf{z}} ds \right] e^{-2\alpha z} \\ &= P_0 e^{-2\alpha z} \end{aligned} \quad (3.109)$$

上式表明,线上功率是按衰减因子 $e^{-2\alpha z}$ 指数衰减的。式中 P_0 是 $z=0$ 处的功率,可表示为

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_S \mathbf{E}_T(x, y) \times \mathbf{H}_T^*(x, y) \cdot \hat{\mathbf{z}} ds \\ &= \frac{1}{2} Z_w \iint_S |\mathbf{H}_T(x, y)|^2 ds \end{aligned} \quad (3.110)$$

式中: Z_w 为波阻抗(TEM 模或 TE 模或 TM 模)。

线上单位长度功率损耗为

$$P_l = P_0 - P(1) = P_0(1 - e^{-2\alpha}) \approx 2\alpha P_0$$

上式已采用 $e^{-2\alpha} \approx 1 - 2\alpha$ 近似,这对于低损耗传输线是合适的。

导行电磁波的衰减常数为

$$\alpha = \frac{P_l}{2P_0} \quad (3.111)$$

上式表明,衰减常数 α 可由线上的传输功率 P_0 和线上单位长度的功率损耗 P_l 确定。这个方法适合所有低耗传输线。重要的是,可根据无耗线上的场来计算,而且可以计及导体损耗 P_c 和电介质损耗 P_d 。

下面考虑矩形波导中导体损耗引起的主模的衰减常数 α_c 。根据式(2.69)可以求得单位长度的矩形波导的导体损耗为

$$P_c = \frac{R_s}{2} \int_S |\mathbf{H}_t|^2 ds = \frac{R_s}{2} \int_{z=0}^1 \oint_C |\mathbf{H}_t|^2 dl = \frac{R_s}{2} \oint_C |\mathbf{H}_t|^2 dl = \frac{R_s}{2} \oint_C |\mathbf{J}_s|^2 dl \quad (3.112)$$

式中:积分路径 C 包围了波导横截面 S 的周界。

把式(3.59)代入式(3.112)可得

$$P_c = R_s \int_{y=0}^b |J_{sy}|^2 dy + R_s \int_{x=0}^a (|J_{sx}|^2 + |J_{sz}|^2) dx = R_s |A_{10}|^2 \left(b + \frac{a}{2} + \frac{\beta^2 a^3}{2\pi^2} \right) \quad (3.113)$$

由式(3.60)可得到传输功率为

$$P_0 = \frac{\omega\mu\beta a^3 b |A_{10}|^2}{4\pi^2} \quad (3.114)$$

TE₁₀ 模由于导体损耗产生的衰减为

$$\begin{aligned} \alpha_c &= \frac{P_c}{2P_0} = \frac{2\pi^2 R_s (b + a/2 + \beta^2 a^3 / 2\pi^2)}{\omega\mu\beta a^3 b} = \frac{R_s}{a^3 b \beta k \eta} (2b\pi^2 + a^3 k^2) \\ &= \frac{R_s}{b\eta \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 \right] \quad (\text{Np/m}) \end{aligned} \quad (3.115)$$

式中：第一项是波导上、下两宽壁面电流 J_{sx} 和 J_{sz} 引起的导体损耗，它随频率的升高而增大；第二项是波导左、右两窄壁面电流 J_{sy} 引起的导体损耗，它随频率的升高而减小。这两项与频率不同的依从关系，使得矩形波导在传输 TE₁₀ 模时，衰减常数有最小值。

3.5.3 矩形波导的尺寸选择

当用波导传输功率时，通常的基本要求：在给定工作频带内只传输单模；损耗尽可能小；必须有足够的功率容量；横向尺寸尽可能小、制造工艺简单。

对于空气填充的矩形波导，为保证单模传输，应选 TE₁₀ 模 ($\lambda_c = 2a$) 作为工作模式。在工作频带 $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ 上，要保证 TE₁₀ 模能够传输， $\lambda_{\max} < 2a$ ，即 $a > \lambda_{\max}/2$ 。同时，为保证整个频带范围内不出现最靠近主模的 TE₂₀ 和 TE₀₁ 等高次模， λ_{\min} 应大于 TE₂₀ 模和 TE₀₁ 模的截止波长 a 和 $2b$ ，即 $\lambda_{\min} > a$ 和 $\lambda_{\min} > 2b$ 。由以上两个要求可得矩形波导单模工作时波导尺寸应满足的条件为

$$\lambda_{\max}/2 < a < \lambda_{\min}, \quad 0 < b < \lambda_{\min}/2$$

从减小衰减考虑， b 应选得大一些，但 b 又不能大于 $\lambda_{\min}/2$ ，否则会出现高次模；从要有尽可能宽的单模工作频带来考虑，应使 $2b < a$ ，但 b 又不能过小，否则功率容量会减小。

综合上面各方面的要求并结合实际经验，一般选择

$$a = 0.7\lambda_0, \quad b = (0.4 \sim 0.5)a \quad (3.116)$$

式中： λ_0 为导行电磁波的中心工作波长。

在要求波导体积小、重量轻，对衰减和功率容量要求不高时，可用减高波导，这时窄边尺寸可取 $b = (0.1 \sim 0.2)a$ 。

对于给定尺寸的矩形波导，其最佳工作波长范围为

$$1.05\lambda_{c\text{TE}_{20}} < \lambda < 0.8\lambda_{c\text{TE}_{10}}, \quad 1.05a < \lambda < 1.6a \quad (3.117)$$

矩形波导尺寸已经标准化了，附录 E 中列出了部分标准波导的参数^[36]。

3.6 案例 2：间隙波导及其应用

矩形波导具有耐功率高、损耗小的优点，因此在高功率系统、低损耗系统、毫米波系统中有广泛应用。但是对于波导缝隙阵列天线等复杂的应用，往往需要进行分片加工，并用真空电弧焊或扩散焊接工艺进行分层组装。因为它对连接处的电接触有着很高的要求，否则细微的间隙就可能造成较大能量的泄漏，影响其性能。

2009年, Kildal等提出了一种新型的间隙波导(GW)技术^[37], 它除了具有矩形波导的优点外, 其最大特点是上、下金属板有一定的空气间隙, 不需要任何电接触, 依然能够束缚电磁波使其达到定向传输的目的, 大幅降低加工难度。本案例讲述间隙波导原理及其应用。

3.6.1 间隙波导的原理

间隙波导的原理来源于平行板波导的特性。如图 3.16(a)所示的空气填充的平行板波导, 假设平行板为理想导体(PEC), 板间距为 d 。由于平行板波导是双导体结构, 它可以传输 TEM 模, 也可能传输 TE 模或 TM 模, 并且 TE 模和 TM 模的截止波长 $\lambda_c = 2d$, 因此当 $d > \lambda/2$ (λ 为工作波长) 时, 所有模式均可传输, 当 $d < \lambda/2$ 时, TEM 模可以传输, TE 模和 TM 模不能传输。如果在平行板波导的中央 $d/2$ 处插入理想磁体(PMC), 并且 PEC-PMC 间距 $h = d/2 < \lambda/4$, 则所有的模式都不能传输, 如图 3.16(b)所示。这是由于 TEM 模不满足 PMC 边界条件而不能存在, 而 TE 模和 TM 模虽然满足 PMC 边界条件, 但是由于工作波长大于截止波长 λ_c 而不能传输, 因此 PEC-PMC 平行板波导在 $h < \lambda/4$ 条件下具有完全的电磁阻带特性。

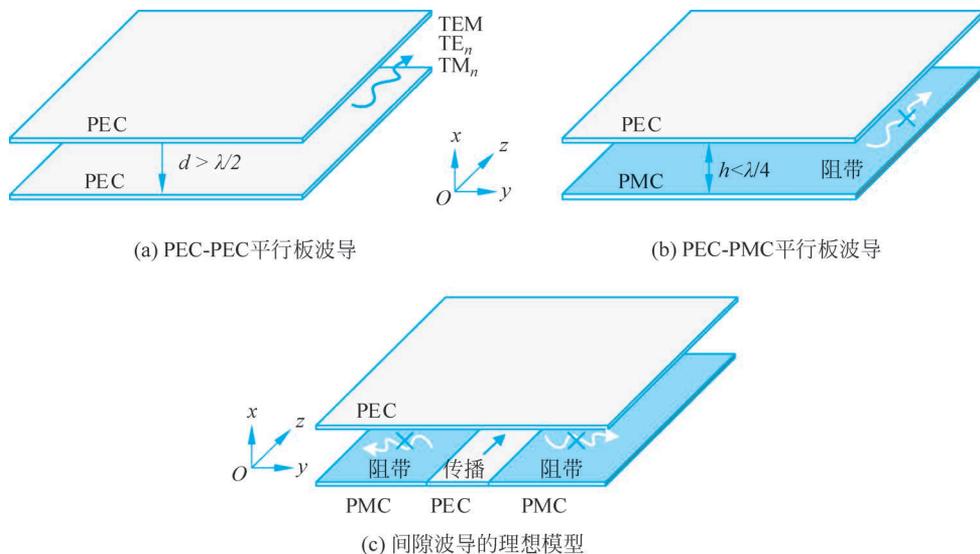


图 3.16 间隙波导的原理

如果在 PMC 表面上添加一条 PEC 导带, 而两侧依然为 PEC-PMC 结构, 如图 3.16(c)所示, 这样 PEC-PEC 结构可以导引电磁波沿导带传输, 而两侧的 PEC-PMC 结构所形成的电磁阻带使得电磁场被束缚在导带周围, 因此即使两侧没有物理的金属侧壁, 电磁波仍然无法向两侧传播, 只能沿着导带传播, 从而形成波导结构。由于该结构上、下两板存在着小的空气间隙, 因此称为间隙波导。

PMC 在自然界中并不存在, 上述仅为间隙波导的理想化模型。实际应用中, PMC 边界往往用人工磁导体(AMC)来近似, 如周期性的金属销钉床或蘑菇结构。这类结构在特定频带内拥有很高的表面阻抗, 存在所有模式均不能传输的阻带, 因此又称为电磁带隙(EBG)结构。本案例选取的金属销钉床的周期单元如图 3.17(a)所示, 其典型参数为 $H_{\text{pin}} = \lambda/4$, $W_{\text{pin}} = \lambda/8$, $d_{\text{pin}} = \lambda/8$, $H_{\text{gap}} = \lambda/8$ 。当 $H_{\text{pin}} = \lambda/4$ 时, 由四分之一波长阻抗变换可知, 销钉柱顶端等效为开路, 其等效阻抗无穷大, 从而可以等效为理想磁体。图 3.17(b)是该结构的色散图, 可以看出, 存在一个所有模式场均不存在的频率范围, 在此频率范围内, 电磁带隙结构能够抑制所有模式的传播。因此, 销钉床可以等效为理想磁体表面。

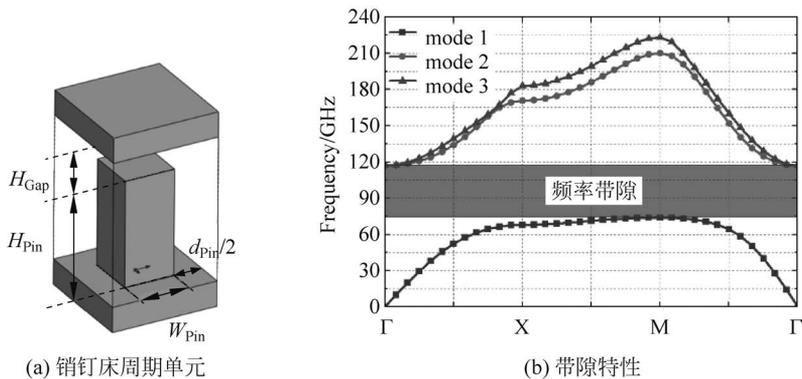


图 3.17 销钉床的周期单元结构和特性

3.6.2 间隙波导的结构和性能

将图 3.17(a)中的销钉床替换图 3.16(c)中的 PMC 表面,便可以构造不同类型的间隙波导,如图 3.18 所示。两侧是周期性金属销钉床,中间形成槽结构,引导电磁波在槽中间传输,便可以得到槽间隙波导(GGW)。在槽间隙波导基础上,中间加入金属脊,便构成脊间隙波导(RGW)^[38]。



实践

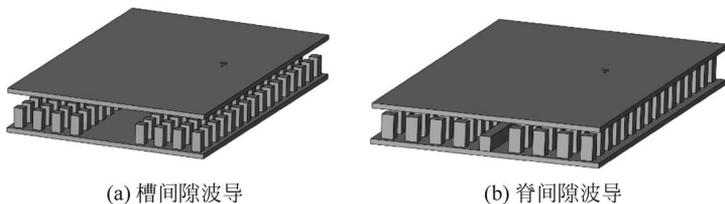


图 3.18 间隙波导的结构

槽间隙波导和脊间隙波导的场分布如图 3.19 所示。由图可见:槽间隙波导特性与矩形波导类似,传输准 TE 模式,主模近似于矩形波导的 TE₁₀ 模;脊间隙波导特性与脊波导类似,实现了准 TEM 模式的传输线。两种传输线的电磁场被电磁带隙结构有效地束缚在传输线内,仅有少部分场向两侧传播,与金属柱耦合,且迅速衰减。

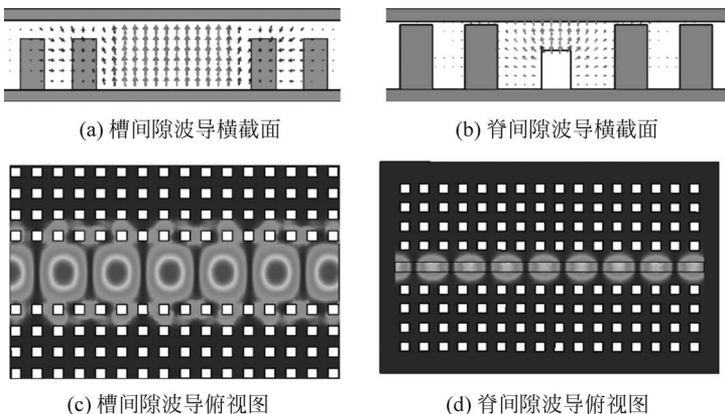


图 3.19 槽间隙波导和脊间隙波导的场分布

3.6.3 间隙波导的应用

间隙波导技术一经提出,便被人们广泛研究,在微波毫米波电路、天线等领域有着巨大的研究前景。本案例结合作者科研成果列举一个毫米波间隙波导缝隙阵列天线的应用实例^[39,40]。

设计的槽间隙波导缝隙阵列天线的整体结构如图 3.20 所示。天线分成三层：最下层包含中心馈电的槽间隙波导和标准矩形波导到槽间隙波导的转换结构，标准矩形波导是 BJ900 标准型号， $a=2.54\text{mm}$ ， $b=1.27\text{mm}$ 。

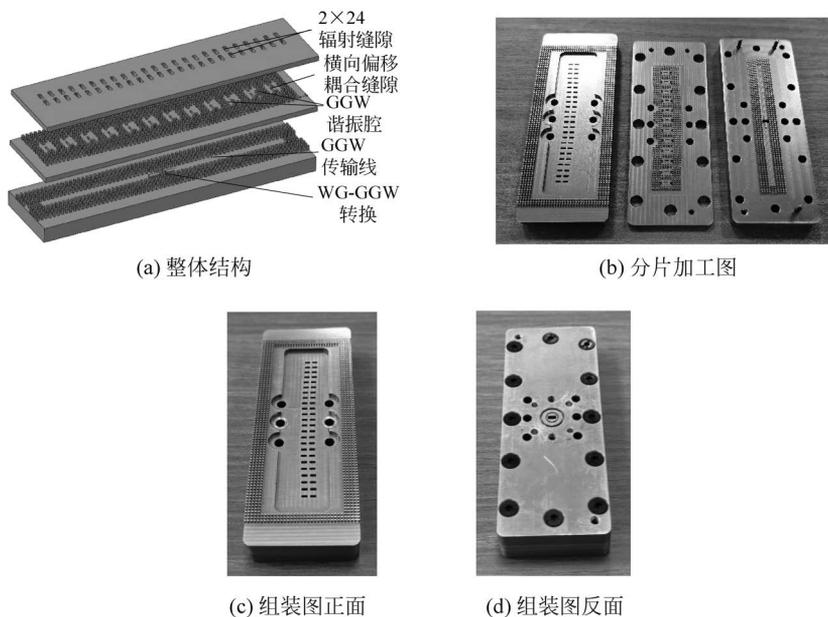


图 3.20 槽间隙波导缝隙阵列天线

中间层包含了 12 个横向偏移缝隙耦合的槽间隙波导谐振腔，缝隙间距等于槽间隙波导的波导波长 λ_g ，以确保各缝隙的相位保持一致。间隙波导谐振腔工作在 TE_{120} 模式，每个谐振腔再激励最上层的 4 个辐射缝隙，这样一来，辐射缝隙的间距等于 $\lambda_g/2$ ，从而能够有效避免栅瓣的出现。为了实现低副瓣特性，不同的耦合缝、谐振腔，以及对应辐射缝隙相对于底层槽间隙波导中心线存在着不同的偏移，以实现幅度加权。

整个天线分成三片进行数控机械加工，各层之间通过定位销定位，并用螺钉紧固，而不需要复杂的焊接工艺，体现了间隙波导组装的优越性。在微波暗室内对天线进行了测试，测量和仿真的反射系数、增益和方向图如图 3.21 所示。结果表明，天线实测结果与仿真结果非常吻合，在 93GHz 时天线 E 面副瓣电平 (SLL) 为 -25dB ，实测增益高于 23.3dBi ，E 面波束宽度 4.2° ，天线效率达到 85% ，体现了间隙波导的低损耗特性。

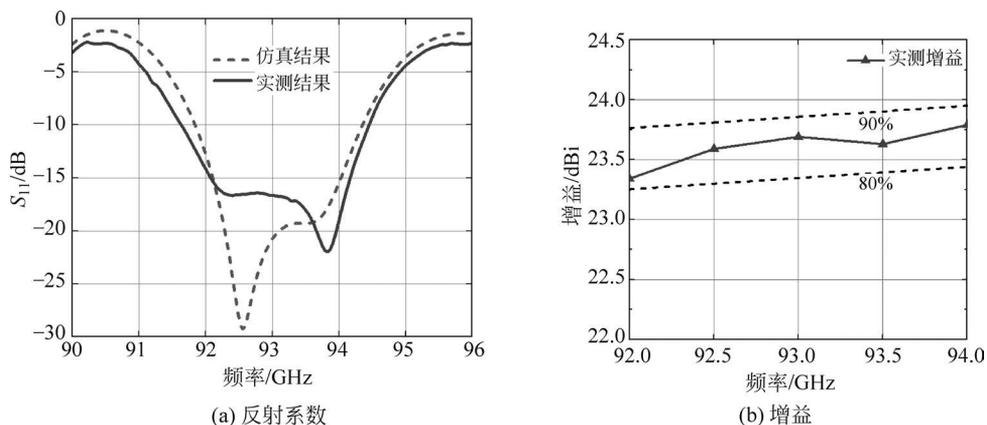


图 3.21 槽间隙波导缝隙阵列天线

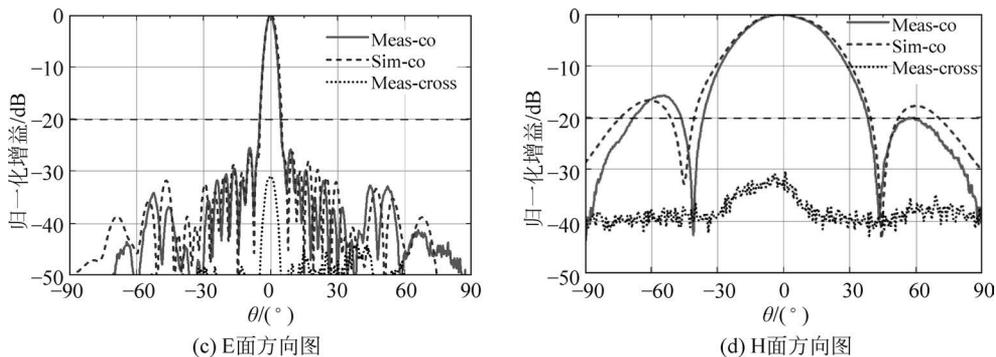


图 3.21 (续)

习题

- 在直角坐标系中,由无源麦克斯韦方程组推导导行电磁波中利用纵向场推导横向场分量的表达式(3.5a)~式(3.5d)(提示:如 H_x 可由式(3.3a)和式(3.4b)中消去 E_y 得出)。
- 什么是截止波长?为什么只有波长小于截止波长的波才能在传输线中传输?
- 何谓传输线的色散特性?传输线为何有色散特性?
- 矩形波导中的 v_p 、 λ_c 和 λ_g 有何区别和联系?它们与哪些因素有关?
- 为什么传输线中要保证单一模式传输?若 λ_0 为 8mm、3cm、10cm,如何保证矩形波导中只有单一模传输?
- 空气填充的矩形波导, $a=22.86\text{mm}$, $b=10.16\text{mm}$,微波频率为 10GHz,求 TE_{10} 、 TE_{01} 、 TE_{11} 、 TM_{11} 4 种模式的截止波数、截止频率、截止波长、波导波长、相移常数和波阻抗。如果波导填充介质, $\epsilon_r=2.5$,求上述量值。
- 空气填充的矩形波导, $a=7.2\text{cm}$, $b=3.4\text{cm}$,工作在 TE_{10} 模式,若沿轴向测得波导中的电场强度最大值与相邻的最小值之间的距离为 4.47cm,求工作频率。
- 空气填充矩形波导, $a=22.86\text{mm}$, $b=10.16\text{mm}$,求工作波长为 3cm 的 TE_{10} 模的传输功率。
- 空气填充矩形波导, $a=22.86\text{mm}$, $b=10.16\text{mm}$,传输 TE_{10} 模,当工作频率为 10GHz 时,
 - 求 λ_c 、 λ_g 、 β 和 $Z_{\text{TE}_{10}}$ 。
 - 若波导宽边尺寸增大 1 倍,上述各参量将如何变化?
 - 若波导窄边尺寸增大 1 倍,上述各参量将如何变化?
 - 若波导尺寸不变,工作频率变为 15GHz,上述各参量将如何变化?
- 某发射机的工作波长的范围为 $7.6\text{cm} < \lambda_0 < 11.8\text{cm}$ 。若用矩形波导作馈线,该波导尺寸应如何选取?
- 为什么一般矩形波导测量线的纵槽开在波导宽边的中心线上?
- 用尺寸 $a=22.86\text{mm}$, $b=10.16\text{mm}$ 的波导作馈线,试问:
 - 当工作波长分别为 1.5cm、3cm、4cm 时,波导中可能出现哪些模式?
 - 为保证只传输 TE_{10} 模,其波长范围应为多少?
- 频率 $f=3\text{GHz}$ 的 TE_{10} 模式在空气填充的矩形波导中传输,要求 $1.3f_{c\text{TE}_{10}} < f < 0.7f_{c\text{TE}_{20}}$,试确定该波导的尺寸。
- 矩形波导 $a=8\text{cm}$, $b=4\text{cm}$,求 TE_{10} 和 TE_{01} 模式的截止波长。

15. 在圆柱坐标系中,推导利用纵向场导出横向场分量的表达式(3.61)。
16. 圆波导中的模式指数 m, n 有何含义? 为什么不存在 $n=0$ 的模式?
17. 推导圆波导中主模 TE_{11} 模的传输功率、单位长度功率损耗和衰减常数。
18. 在有限导电率的圆波导中,推导 TE_{01} 模的衰减常数,说明其随频率的变化规律。
19. 空气填充的同轴线内导体半径为 2mm、外导体半径为 4mm,求同轴线中主模的截止波长、波导波长、相速度和波阻抗。
20. 介质填充的同轴线内导体半径为 2mm、外导体半径为 4mm,介质为 $\mu_r=1$ 和 $\epsilon_r=2.5$,求同轴线中主模的截止波长、波导波长、相速度和波阻抗。
21. 空气填充的同轴线内导体半径为 a 、外导体半径为 b ,表面电阻为 R_s ,利用微扰法证明同轴线由有限导电率产生的衰减常数为

$$\alpha = \frac{R_s}{4\pi Z_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

式中: Z_0 为同轴线的特性阻抗。

22. 空气填充的同轴线传输 TEM 模时的功率容量为

$$P_{\max} = \frac{\pi a^2 E_{\text{br}}^2}{\eta_0} \ln \frac{b}{a}$$

式中: E_{br} 为击穿电场强度。求使功率容量最大的 b/a 值,并证明对应的特性阻抗约为 30Ω 。

23. 空气填充的同轴线内导体半径为 a 、外导体半径为 b ,表面电阻为 R_s ,同轴线由有限导电率产生的衰减常数为

$$\alpha = \frac{R_s}{2\eta_0 \ln b/a} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

证明导体半径满足 $x \ln x = 1 + x$ (其中 $x = b/a$) 时,取最小值。求解这个关于 x 的方程,并证明对应的特性阻抗约为 77Ω 。