

第3章

时变电磁场

第2章讨论了静态电磁场的基本规律,归纳如下:

$$\text{静电场的高斯定理: } \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho dv \quad \text{或} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\text{静电场的环路定律: } \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \text{或} \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\text{静磁场的磁通连续性原理: } \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{或} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\text{静磁场的安培环路定律: } \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{或} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\text{反映媒质特性的结构方程: } \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

实验和研究证明,以上方程只能反映静态电磁场的规律和性质,对于随时间变化的电磁场则存在缺陷,应加以修正和推广,而且上述方程没有体现出电场与磁场的相互关系。英国物理学家法拉第1831年发现了法拉第电磁感应定律,揭示了“变磁生电”的规律,开启了对电场、磁场相互作用的研究。之后,英国物理学家麦克斯韦总结前人的研究结论,加以自己创造性的思考,提出了位移电流的概念,证实了“变电生磁”的可能性,麦克斯韦还提出了涡旋电场的概念,使法拉第电磁感应定律更具普适性。麦克斯韦根据前人和自己的研究成果,总结出了全面、准确阐述电磁理论的初始麦克斯韦方程组,这组方程的确立标志着经典电磁理论的建立,它们揭示了电场与磁场的相互关系、变化电场和变化磁场的规律和性质。

本章主要内容是时变电磁场理论,先介绍麦克斯韦方程组,再以此为基础阐述时变电磁场的规律和性质,包括边界条件、辅助位函数、能量与能流密度、波动方程和波动性,最后研究一种具有代表性的时变电磁场——时谐电磁场。

3.1 麦克斯韦方程组



3.1.1 法拉第电磁感应定律与感应电场

法拉第电磁感应定律表述为:若穿过闭合导体回路 L 所张曲面的磁通量 $\Psi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ 发生变化,回路中会出现感应电动势 \mathcal{E} ,如图3-1(a)所示,且感应电动势与磁通量变化率的关系为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (3-1)$$

感应电动势 \mathcal{E} 引起的感应电流 I 力图阻止回路中磁通的变化。

法拉第电磁感应定律说明变化的磁场与电流之间存在密切关系,将磁现象与电现象联系起来。不过,法拉第电磁感应定律没有说明出现感应电动势的真正原因,以及当时变磁场附近不存在导体回路时会发生什么情况。

麦克斯韦在对电磁感应现象进行深入分析后,认识到导体中的电流必然由电场引起。他将这种由变化的磁场激励或者说感应出来的电场称为感应电场,记为 \mathbf{E}_{in} 。 \mathbf{E}_{in} 在

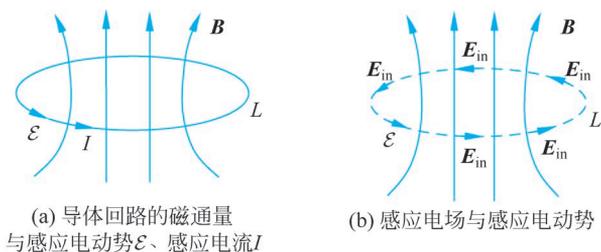


图 3-1 法拉第电磁感应定律

闭合导体回路上的环量等于回路上的感应电动势 \mathcal{E} 。不论有、无导体回路,时变磁场都会激励起感应电场,如图 3-1(b)所示。因此,电磁感应现象的实质是时变磁场在周围空间激励起感应电场,如果该电场中有导体存在,就会在导体上引起感应电流。

根据以上分析,考虑仅有磁场随时间变化、闭合路径及其所张曲面均不随时间变化的情况,式(3-1)可写成

$$\oint_L \mathbf{E}_{\text{in}} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (3-2)$$

式中: L 为任意闭合路径,不一定是导体回路; S 为 L 所张的任意曲面。

式(3-2)是法拉第电磁感应定律的积分形式。

依据旋度定理,有

$$\oint_L \mathbf{E}_{\text{in}} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{E}_{\text{in}}) \cdot d\mathbf{s}$$

将上式代入式(3-2),可得

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{E}_{\text{in}}) \cdot d\mathbf{s} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

要使上式对任意曲面 S 都成立,必定有

$$\nabla \times \mathbf{E}_{\text{in}} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3-3)$$

这是法拉第电磁感应定律的微分形式。

式(3-3)说明,时变磁场是感应电场的旋涡源,感应电场是有旋场,也可称为涡旋电场。感应电场的电力线是闭合曲线,与其旋涡源——时变磁场的磁力线相交链。感应电场与静电场的激励源不同,性质也不同,但二者对电荷的作用力相同。

【例 3-1】 已知无源空间中感应电场强度 $\mathbf{E} = 10^{-2} \sin(6.28 \times 10^9 t - 20.9z) \hat{\mathbf{y}}$ (V/m), 求磁感应强度。

解: $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} = -20.9 \times 10^{-2} \cos(6.28 \times 10^9 t - 20.9z) \hat{\mathbf{x}}$

认为静磁场 \mathbf{B}_0 为零,则有

$$\mathbf{B} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt = -3.33 \times 10^{-11} \sin(6.28 \times 10^9 t - 20.9z) \hat{\mathbf{x}} \text{ (T)}$$

3.1.2 位移电流与全电流定律

第2章中得出的有关静态电磁场的结论和方程只适用于静态电磁场,在电磁场随时间变化的情况下,这些结论和方程会出现缺陷和矛盾,不再适用。

以静磁场的安培环路定律 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 为例,对其两边取散度,再依据式(1-45g)可得

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \equiv 0 \quad (3-4)$$

然而,依据电流连续性方程有 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t$,当电荷密度不恒定时有 $\partial \rho / \partial t \neq 0$,因此 $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$,与式(3-4)矛盾。这说明对于电荷密度随时间变化的情况,静磁场的安培环路定律不再适用。也就是说,静磁场的安培环路定律不再适用于时变场,必须加以修正。

考虑到电流连续性方程是依据电荷守恒定律推导出来的,本身不会有错误,因此仍然以电流连续性方程为依据来考虑如何修正静磁场的安培环路定律。电流连续性方程可以写成 $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t \equiv 0$ 的形式,将电场的高斯定理 $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$ (实践和研究证明电场的高斯定理适用于静态场和时变场)代入该式可得

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{D})}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \equiv 0 \quad (3-5)$$

比较式(3-4)和式(3-5)可知,若在安培环路定律 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ 的右边加上一项 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ 作为修正的安培环路定律,即

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3-6)$$

若对上式等号两边均取散度,则有

$$0 \equiv \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \equiv 0$$

依据场论中的恒等式,左边的恒等号始终成立;依据电流连续性方程和式(3-5),右边的恒等号始终成立,不会像静磁场的安培环路定律那样出现矛盾。可见,增加 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ 项后,安培环路定律得以修正,适用于时变电磁场的情况,也适用于静态场的情况(此时 $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$,就是静态场的安培环路定律)。

式(3-6)中, $\partial \mathbf{D} / \partial t$ 项与电流密度 \mathbf{J} 等价,麦克斯韦认为它是由变化的电场引起的另一种电流密度,称为位移电流密度 \mathbf{J}_d ,其对应的电流称为位移电流 i_d ,它与普通电流一样也是磁场的旋涡源。这说明变化的电场也能激励磁场,这就是“变电生磁”的基本规律。应当注意,位移电流与普通电流不同,它不是实际带电粒子定向运动形成的,而是变化电场形成的一种等效电流,其激励磁场的作用与普通电流等效。位移电流是麦克斯韦引入的一个重要概念,它有助于人们理解“变化电场激励磁场”的原理和规律。

普通电流和位移电流一起称为全电流, $\mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$ 称为全电流密度矢量。由式(3-5)可知,全电流密度矢量的散度恒为零,其场是无散场,其矢量线为闭合曲线。这说明在带电粒子形成的电流中断之处必然有位移电流连续,形成闭合的电流线。这是因为在带电粒子形成的电流中断之处电量必然发生变化,会产生时变电场,也就出现了位移电流。

引入位移电流之后的修正的安培环路定律称为全电流定律,式(3-6)是其微分形式。依据旋度定理可推出全电流定律的积分形式为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (3-7)$$

【例 3-2】 在无源空间中, 磁场强度 $\mathbf{H} = H_0 \sin(\omega t - kz) \hat{\mathbf{y}}$ (A/m), k 为常数。求位移电流密度和电位移矢量。

解: 由于空间中无源, 因此传导电流密度 $\mathbf{J} = 0$, 由全电流定律求出位移电流密度, 即

$$\mathbf{J}_d = \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \hat{\mathbf{x}} = kH_0 \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{x}} \text{ (A/m}^2\text{)}$$

将位移电流密度 \mathbf{J}_d 对时间 t 积分, 求出电位移矢量 \mathbf{D} (认为静态不变的 \mathbf{D}_0 等于零), 即

$$\mathbf{D} = \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dt = \int \mathbf{J}_d dt = \frac{k}{\omega} H_0 \sin(\omega t - kz) \hat{\mathbf{x}} \text{ (C/m}^2\text{)}$$

3.1.3 麦克斯韦方程组的形式及意义

法拉第电磁感应定律和全电流定律适用于静态场、时变场, 它们分别给出了电场、磁场的旋度, 即场与旋涡源的关系。但对矢量场的研究还必须了解它的散度, 即场与散度源的关系。第 2 章推导出了静电场、静磁场与各自散度源的关系, 即高斯定理 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, 磁通连续性原理 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 在时变场情况下至今还没有发现与它们相矛盾的事实, 因此它们也适用于时变场。

高斯定理、磁通连续性原理与法拉第电磁感应定律、全电流定律一起构成宏观电磁场的基本定律, 其数学形式就是电磁场的场方程, 称为麦克斯韦方程组。其微分形式为

$$\text{全电流定律:} \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3-8a)$$

$$\text{法拉第电磁感应定律:} \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3-8b)$$

$$\text{磁通连续性定律:} \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3-8c)$$

$$\text{高斯定理:} \quad \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (3-8d)$$

积分形式的麦克斯韦方程组为

$$\text{全电流定律:} \quad \oint_L \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \left(\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} \quad (3-9a)$$

$$\text{法拉第电磁感应定律:} \quad \oint_L \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \iint_S -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (3-9b)$$

$$\text{磁通连续性定律:} \quad \oiint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (3-9c)$$

$$\text{高斯定理:} \quad \oiint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho(\mathbf{r}, t) dv \quad (3-9d)$$

这些场方程同样也适用于静态电磁场的情况, 此时方程中所有对时间求导的项均等于零, 方程组(3-8)和(3-9)变成与静态电磁场方程组相同的形式。

麦克斯韦方程组揭示了电磁场的各个场矢量与场源的关系, 只要知道了这些关系就可以从场源求出电磁场分布。同时, 依据场论知识也可以由麦克斯韦方程组得知电场、磁场的性质。由麦克斯韦方程组可以得到如下结论:

(1) 电场的散度等于电荷密度,电荷是电场的散度源;由电荷产生的电场是有散场,电力线起始于正电荷,终止于负电荷。

(2) 磁场的散度恒为零,磁场没有散度源,科学界至今没有证实磁荷(即磁单极子)的稳定存在;磁场是无散场,磁力线无头无尾,是闭合曲线。

(3) 时变磁场是感应电场的旋涡源,即时变磁场可以激励出感应电场;感应电场是有旋场,其电力线是闭合曲线,与磁力线相交链。

(4) 全电流是磁场的旋涡源,电流和时变电场都可以激励出磁场;磁场是有旋场,磁力线是闭合曲线,与全电流线相交链。

(5) 时变电场、时变磁场在某些情况下可以不断互相激励,且电力线与磁力线相互交链。

(6) 在某些情况下,场源(电荷或电流)一旦激励起了时变电场或时变磁场,即使去掉场源,时变电场、时变磁场也会互相激励,并向周围的空间传播,如图 3-2 所示,这就是电磁场的传播。

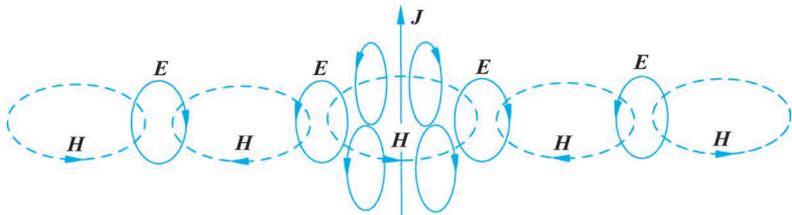


图 3-2 相互交链的闭合电力线、闭合磁力线

(7) 在线性介质中,麦克斯韦方程组是线性方程组,满足叠加原理,即多个场源各自产生的场可以在空间同时存在,空间任一点的场等于所有场源在该点产生的场的叠加。

以上几点说明了电磁场与源的关系、电磁场的性质以及传播机理,也就是麦克斯韦方程组的物理意义。

麦克斯韦方程组含有 5 个矢量 \mathbf{E} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{J} 和一个标量 ρ , 只由 4 个麦克斯韦方程无法确定地求出所有未知量,因此还需要辅助方程。在第 2 章中得出了描述媒质中场矢量 \mathbf{E} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{J} 之间相互关系的结构方程,即

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (3-10a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3-10b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (3-10c)$$

推出这些方程时并没有规定场是静态的还是时变的,因此它们也适用于时变电磁场。这三个结构方程是麦克斯韦方程组的辅助方程。

结构方程中系数 ϵ 、 μ 、 σ 分别是媒质的介电常数、磁导率和电导率,称为媒质的电磁参数。真空中, $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, $\sigma = 0$ 。其他媒质的 ϵ 、 μ 、 σ 参数由媒质的物质成分、微观结构决定。电导率 $\sigma = 0$ 的媒质称为理想介质, $\sigma = \infty$ 的媒质称为理想导体, σ 为非零有限值的媒质称为导电媒质。

电磁参数值与空间位置无关的媒质称为均匀媒质;电磁参数不随电磁场矢量的模值

变化的媒质称为线性媒质；电磁参数不随电磁场矢量的方向变化的媒质称为各向同性媒质，否则称为各向异性媒质，其电磁参数是张量。本书中若非特别指明，讨论的一般是均匀、线性、各向同性媒质。本书中，将 $\sigma=0$ 、 ϵ 和 μ 均为实常数的均匀、线性、各向同性媒质称为理想媒质，研究电磁问题时往往先考虑理想媒质中的简单情况，再考虑其他媒质中的情况。

【例 3-3】 在无源、均匀、线性、各向同性介质中， $\mathbf{E} = A \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}}$ (V/m)，其中 A 、 β 为常数。若要这种场存在， β 、 ω 之间应该满足何种关系？其他场矢量等于多少？

解：任意一种电磁场存在的条件是它的所有场矢量必须同时满足麦克斯韦方程组。应用麦克斯韦方程组及结构方程，可以由 \mathbf{E} 导出另 3 个场矢量 \mathbf{H} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{B} 及 β 、 ω 之间的关系。

首先由结构方程得电位移矢量：

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} = A \epsilon \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}} \text{ (V/m)} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \frac{\partial [A \epsilon \cos(\omega t - \beta z)]}{\partial x} = 0\end{aligned}$$

在无源区域中 $\rho=0$ ，上述 \mathbf{D} 满足 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0$ 。

再由法拉第定律求出磁场 \mathbf{B} 、 \mathbf{H} ：

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{\mathbf{y}} = -A \beta \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{y}} \\ \Rightarrow \mathbf{B} &= \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt = \frac{A \beta}{\omega} \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{y}} \text{ (T)}, \text{ 满足 } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \frac{A \beta}{\omega \mu} \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{y}} \text{ (A/m)}\end{aligned}$$

由无源情况下 ($\mathbf{J}=0$) 的全电流定律， \mathbf{D} 、 \mathbf{H} 应满足

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

将前面求得的 \mathbf{D} 、 \mathbf{H} 代入上式可得

$$-\frac{A}{\mu \omega} \beta^2 \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}} = -A \epsilon \omega \sin(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}}$$

比较等式两边，可得

$$\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

因此，若 β 、 ω 满足这个关系，则以上求出的 4 个场矢量同时满足麦克斯韦方程组。

3.2 边界条件



媒质边界指的是媒质电磁参数 ϵ 、 μ 、 σ 发生变化处的分界面。媒质电磁参数变化导致边界两侧的电磁场也发生变化，其变化规律也就是边界两侧电磁场之间的关系，称为电磁场的边界条件。

边界两侧的电磁场分布情况都满足麦克斯韦方程组，因此边界条件可由麦克斯韦方程组推导出来。在边界上电磁场发生突变时，只能用麦克斯韦积分方程组来推导边界条

件。为推导方便起见,在边界上选取规整的闭曲面或闭曲线,并在这些闭曲面或闭曲线上应用麦克斯韦积分方程组,就可推导出电磁场的边界条件。下面就依照这个思路推导电磁场的一般边界条件,然后再讨论一些特殊情况下的边界条件。

3.2.1 边界条件的一般形式

1. 电场的边界条件

在边界面上取一条规整的闭曲线,在其上应用法拉第电磁感应定律(式(3-9b)),可推导出电场强度矢量 \mathbf{E} 的切向分量的边界条件。

如图 3-3 所示,环绕边界上任意一点 O ,取高度为 Δh (其值趋于 0)、宽度足够小的矩形回路 L ,矩形回路所张的曲面记为 S 。回路上、下底边 ΔL_2 、 ΔL_1 分别处于媒质 2 和媒质 1 中并无限贴近边界,且与 O 点处的某个方向的切向单位矢量 $\hat{\mathbf{i}}$ 平行。记回路上、下底边的有向线段长度分别为 ΔL_2 、 ΔL_1 ,根据几何关系,不妨令 $\Delta L_2 = \Delta L_1 \approx \Delta L$ (ΔL 很小)。

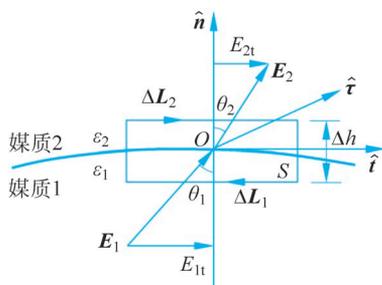


图 3-3 边界面上的矩形回路

在此矩形回路 L 上应用法拉第电磁感应定律,有

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Delta L_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta L_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{侧边}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

当矩形回路高度 Δh 趋于 0 时,在回路两侧边上的线积分 $\int_{\text{侧边}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 趋于 0;又由于此时矩形回路所张曲面 S 的面积趋于 0,且 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 为有限值,故 $\partial \mathbf{B} / \partial t$ 在曲面 S 上的面积分 $\iint_S (-\partial \mathbf{B} / \partial t) \cdot d\mathbf{s}$ 也趋于 0。因此,上式可以写为

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\Delta L_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta L_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{侧边}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Delta L_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta L_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \iint_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = 0 \end{aligned}$$

由于 ΔL_1 、 ΔL_2 足够小,可以认为 ΔL_1 、 ΔL_2 上的 \mathbf{E} 分别为常矢量 \mathbf{E}_1 、 \mathbf{E}_2 ,上式可写为

$$\mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{i}} \Delta L_2 - \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{i}} \Delta L_1 = \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{i}} \Delta L - \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{i}} \Delta L = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{i}} \Delta L = 0$$

即

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \hat{\mathbf{i}} = 0 \quad \text{或} \quad E_{2t} = E_{1t} \quad (3-11a)$$

可见,边界面两侧的 \mathbf{E} 的切向分量相等,即边界面处 \mathbf{E} 的切向分量连续。

设 $\hat{\mathbf{n}}$ 为边界面上 O 点处的法向单位矢量, $\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{i}}$ 是与矩形回路平面垂直的另一切向单位矢量,则有 $\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$ 。应用矢量恒等式 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$,式(3-11a)又可写为

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{t}} \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] = 0$$

因 $\hat{\mathbf{i}}$ 是边界面上该点处任意方向的切向单位矢量,故 $\hat{\mathbf{t}}$ 的方向也是任意的。若要上式对任意方向的 $\hat{\mathbf{t}}$ 都成立,则必有

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (3-11b)$$

上式实际上是(3-11a)的矢量表示形式。

以上推出的式(3-11a)、式(3-11b)给出了边界面两侧 \mathbf{E} 的切向分量的关系,也就是 \mathbf{E} 的切向分量在边界面处的边界条件。

将 $D_{1t} = \epsilon_1 E_{1t}$, $D_{2t} = \epsilon_2 E_{2t}$ 代入式(3-11a),可得

$$\frac{D_{2t}}{\epsilon_2} = \frac{D_{1t}}{\epsilon_1} \quad (3-12)$$

可见,在边界面两侧 \mathbf{D} 的切向分量不连续。

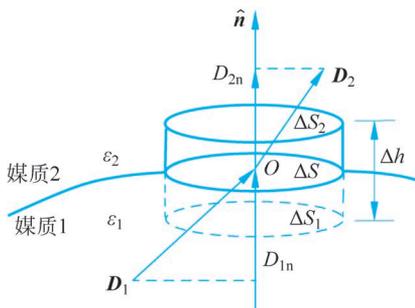


图 3-4 边界面上的圆柱面

下面再由高斯定律(式(3-9d))推出电位移矢量 \mathbf{D} 的法向分量的边界条件。如图 3-4 所示, \hat{n} 是边界面上任意点 O 处的法向单位矢量,由媒质 1 指向媒质 2。环绕该点,跨边界两侧,取高度为 Δh (其值趋于零)、横截面足够小的扁圆柱面 S ,其上、下底面 ΔS_2 、 ΔS_1 分别处于媒质 2 和媒质 1 中并无限贴近边界,且都垂直于 \hat{n} 。圆柱面在边界上截取的小曲面为 ΔS ,可认为 $\Delta S_1 = \Delta S_2 \approx \Delta S$ 。

在此圆柱闭曲面 S 上应用高斯定律可得

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Delta S_1} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \iint_{\Delta S_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} + \iint_{\text{侧面}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho dv \quad (3-13)$$

当 Δh 趋于 0 时,侧面面积也趋于零,因此 $\iint_{\text{侧面}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$ 趋于 0。且由于闭曲面 S 无限薄,其包围的体积 V 中的电荷 $\iiint_V \rho dv$ 就等于边界上的小曲面 ΔS 上分布的自由面电荷。由于 ΔS_1 、 ΔS_2 、 ΔS 足够小,可认为 ΔS_1 、 ΔS_2 上的 \mathbf{D} 分别为常矢量 \mathbf{D}_1 、 \mathbf{D}_2 , ΔS 上的面电荷密度也等于常数 ρ_s ,于是式(3-13)可改写为

$$\mathbf{D}_2 \cdot \hat{n} \Delta S_2 - \mathbf{D}_1 \cdot \hat{n} \Delta S_1 = \mathbf{D}_2 \cdot \hat{n} \Delta S - \mathbf{D}_1 \cdot \hat{n} \Delta S = \rho_s \Delta S$$

即

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \quad (3-14a)$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \quad (3-14b)$$

式中: D_{1n} 、 D_{2n} 分别为 \mathbf{D}_1 、 \mathbf{D}_2 的法向分量。上式就是 \mathbf{D} 的法向分量的边界条件。可见,当边界面上分布有自由面电荷时, \mathbf{D} 的法向分量不连续,其突变量等于边界面上的自由面电荷密度 ρ_s 。

将 $D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n}$, $D_{2n} = \epsilon_2 E_{2n}$ 代入式(3-14b),可得

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \begin{cases} \rho_s, & \rho_s \neq 0 \\ 0, & \rho_s = 0 \end{cases} \quad (3-15)$$

可见,无论边界面上有无自由面电荷, \mathbf{E} 的法向分量都不连续。

2. 磁场的边界条件

由全电流定律(式(3-9a))可以推导出磁场强度 \mathbf{H} 的切向分量边界条件。在如图 3-5

所示的边界面处的无限小矩形回路 L 上应用全电流定律, 可得

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\Delta L_1} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta L_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\text{侧边}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (3-16)$$

式中: S 为 L 所张的曲面, 矩形回路在边界面上截取的曲线段记为 ΔL 。当 Δh 趋于 0 时, S 的面积也趋于零,

有 $\iint_S (\partial \mathbf{D} / \partial t) \cdot d\mathbf{s}$ 趋于零。而且, 当 Δh 趋于 0 时, 穿过

S 曲面的电流等于边界面上流过线段 ΔL 的面电流, 即当媒质分界面上存在自由电流密度 \mathbf{J} 时, 有

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \iint_{\Delta S} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Delta L} (\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \Delta h \mathbf{J}) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} dl = \int_{\Delta L} \mathbf{J}_s \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} dl$$

由于 ΔL_1 、 ΔL_2 、 ΔL 足够小, 可认为 ΔL_1 、 ΔL_2 上的 \mathbf{H} 分别为常矢量 \mathbf{H}_1 、 \mathbf{H}_2 , ΔL 上的面电流密度也等于常矢量 \mathbf{J}_s , 再考虑到 $\Delta L_1 = \Delta L_2 \approx \Delta L$, 因此式(3-16)可改写为

$$\mathbf{H}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \Delta L_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \Delta L_1 = \mathbf{H}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \Delta L - \mathbf{H}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \Delta L = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \Delta L = \mathbf{J}_s \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \Delta L$$

即

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{J}_s \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}$$

将 $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\boldsymbol{\tau}} \times \hat{\mathbf{n}}$ 代入上式, 可得

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \mathbf{J}_s \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}$$

应用矢量恒等式 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$, 上式可以改写为

$$[\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)] \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{J}_s \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}$$

因 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 是任意方向的, 故 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 也是任意方向的, 要使上式对任意方向的 $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ 均成立, 必然有

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \quad (3-17a)$$

即

$$H_{2t} - H_{1t} = J_s \quad (3-17b)$$

这就是磁场强度的切向分量满足的边界条件, 说明当边界上分布有传导面电流时, \mathbf{H} 的切向分量不连续, 突变量等于边界面上的传导面电流密度 J_s 。

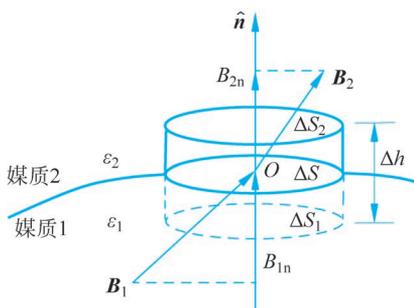


图 3-6 边界面上的圆柱面

将 $B_{1t} = \mu_1 H_{1t}$, $B_{2t} = \mu_2 H_{2t}$ 代入式(3-17b), 得

$$\frac{B_{2t}}{\mu_2} - \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \begin{cases} J_s, & J_s \neq 0 \\ 0, & J_s = 0 \end{cases} \quad (3-18)$$

可见, 不管边界面上有没有传导面电流, \mathbf{B} 的切向分量都不连续。

下面从磁通连续性定律(式(3-9c))出发, 推导磁感应强度 \mathbf{B} 的法向分量边界条件。在图 3-6 所示边界处的小圆柱面 S 上应用磁通连续性定律, 可得

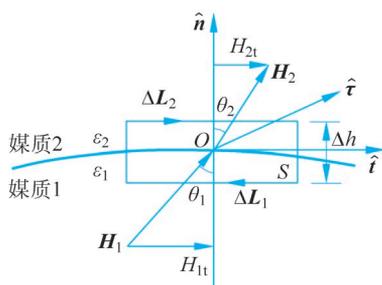


图 3-5 边界面上的矩形回路

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Delta S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \iint_{\Delta S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \iint_{\text{侧面}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

与推导电场的法向分量的边界条件的过程类似,当 Δh 趋于零时,上式可以写为

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (3-19a)$$

即

$$B_{2n} = B_{1n} \quad (3-19b)$$

可见,边界面处 \mathbf{B} 的法向分量连续。

将 $B_{1n} = \mu_1 H_{1n}$, $B_{2n} = \mu_2 H_{2n}$ 代入式(3-19b),可得

$$\mu_2 H_{2n} = \mu_1 H_{1n} \quad (3-20)$$

显然,边界面处 \mathbf{H} 的法向分量不连续。

由 4 个麦克斯韦积分方程出发,经过前述推导最终得到电磁场的边界条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \end{array} \right. \quad \text{或} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{2t} - H_{1t} = J_s \\ E_{2t} = E_{1t} \\ B_{2n} = B_{1n} \\ D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \end{array} \right. \quad (3-21)$$

式中: \mathbf{J}_s 为边界面上的传导面电流; ρ_s 边界面上的自由面电荷。式(3-21)是电磁场的一般边界条件。

根据边界条件,可以由边界面一侧的电磁场,结合边界面上的自由电荷、传导电流分布情况,推出边界面另一侧的电磁场;也可以推出边界面两侧电磁场满足的一些关系式,例如在分析电磁场传播入射到不同媒质交界面上的反射、折射问题时,就可以利用边界条件推出反射系数和折射系数,得到入射场、反射场、折射场的场矢量模值之间的关系式。

下面考虑一些特殊情况下的边界条件。

3.2.2 理想导体表面的边界条件

设理想导体为媒质 1,理想介质为媒质 2。理想导体 $\sigma = \infty$,若理想导体中存在非零电场,必导致 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \infty$,与“电流强度为有限值”的物理事实矛盾,因此理想导体中必定没有电场,也没有时变磁场(若存在时变磁场,必定会感应出电场),故理想导体中不存在时变电磁场,即 \mathbf{E}_1 、 \mathbf{D}_1 、 \mathbf{H}_1 、 \mathbf{B}_1 均为零。而理想介质中的场矢量 \mathbf{E}_2 、 \mathbf{D}_2 、 \mathbf{H}_2 、 \mathbf{B}_2 可以去掉下标“2”,记为 \mathbf{E} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{B} 。因此,在理想导体与理想介质边界情况下,电磁场的边界条件为

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D} = \rho_s \end{array} \right. \quad \text{或} \quad \left\{ \begin{array}{l} H_t = J_s \\ E_t = 0 \\ B_n = 0 \\ D_n = \rho_s \end{array} \right. \quad (3-22)$$

式中: $\hat{\mathbf{n}}$ 为理想导体表面上的法向单位矢量,指向理想导体外侧。

以上边界条件说明:理想导体表面上,电场切向分量、磁场法向分量均等于零,电场

矢量、电力线必然垂直于理想导体表面,磁场矢量、磁力线必然平行于理想导体表面;理想导体表面的自由电荷密度等于电位移矢量的法向分量,传导电流密度的模值等于磁场强度的切向分量。由此,可以根据理想导体表面处的电磁场求出理想导体表面的自由电荷、传导电流密度的分布情况。

【例 3-4】 如图 3-7 所示,在间距为 d 的两无限大导电平板之间充满空气,其中电场强度 $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}}$ (β 为常数),求两导电平板表面上的面电荷密度和面电流密度。

解: 空气近似为介电常数、磁导率分别等于 ϵ_0 、 μ_0 的理想介质。上、下导电板内侧的外法线方向分别为 $\hat{\mathbf{n}}_d = -\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{n}}_0 = \hat{\mathbf{x}}$ 。 ρ_s 、 J_s 分别由 \mathbf{D} 、 \mathbf{H} 确定,故先由 \mathbf{E} 求出 \mathbf{D} 、 \mathbf{H} 。

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 E_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}}$$

$$\rho_{s0} = \hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 E_0 \cos(\omega t - \beta z), \quad x = 0$$

$$\rho_{sd} = \hat{\mathbf{n}}_d \cdot \mathbf{D} = -\epsilon_0 E_0 \cos(\omega t - \beta z), \quad x = d$$

可见,上、下两导电平板内侧的面电荷密度等值异号,电力线从正电荷指向负电荷。

由 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 可知 $\mathbf{B} = -\int (\nabla \times \mathbf{E}) dt$, 再由 $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$ 可求出

$$\mathbf{H} = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{J}_{s0} = \hat{\mathbf{n}}_0 \times \mathbf{H} = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{z}}, \quad x = 0$$

$$\mathbf{J}_{sd} = \hat{\mathbf{n}}_d \times \mathbf{H} = -E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{z}}, \quad x = d$$

可见,上、下两导电平板内侧的面电流大小相等、方向相反。

3.2.3 理想介质表面的边界条件

若边界面为两种理想介质的交界面,且交界面上没有人为增添的自由面电荷和传导面电流,此时 $\mathbf{J}_s = 0$, $\rho_s = 0$, 则电磁场边界条件为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} H_{2t} = H_{1t} \\ E_{2t} = E_{1t} \\ B_{2n} = B_{1n} \\ D_{2n} = D_{1n} \end{cases} \quad (3-23)$$

可见,在两种理想介质的交界面处,电场强度矢量、磁场强度矢量的切向分量都是连续的,电位移矢量和磁感应强度矢量的法向分量都是连续的。

【例 3-5】 如图 3-8 所示,已知 $y = 0$ 的无限大平面为两种电介质的分界面,该分界面上无自由电荷。介质 2 一侧的电场强度 $\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{x}}10 + \hat{\mathbf{y}}20$ (V/m),分界面两侧的介电常

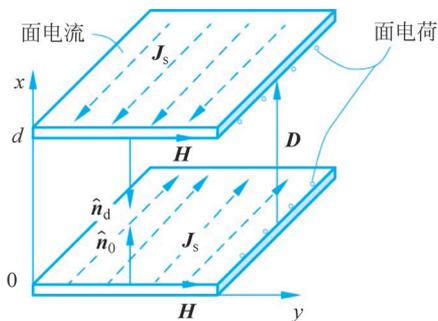


图 3-7 例 3-4 图

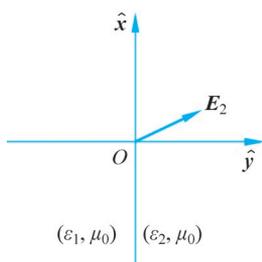


图 3-8 例 3-5 图

数分别为 $\epsilon_1 = 5\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 3\epsilon_0$ 。求 \mathbf{D}_1 、 \mathbf{D}_2 和 \mathbf{E}_1 。

解：先由 \mathbf{E}_2 求出 \mathbf{D}_2 ，即

$$\mathbf{D}_2 = \epsilon_2 \mathbf{E}_2 = \epsilon_0 (\hat{x}30 + \hat{y}60)$$

由题中条件可知，在两种介质分界面上， \hat{y} 分量是法向分量， \hat{x} 分量是切向分量。利用电位移矢量的边界条件可得

$$D_{1n} = D_{2n} = 60\epsilon_0$$

由此可得

$$E_{1n} = \frac{D_{1n}}{\epsilon_1} = 12$$

由电场的边界条件得

$$E_{1t} = E_{2t} = 10$$

进而得到

$$D_{1t} = \epsilon_1 E_{1t} = 50\epsilon_0$$

所以

$$\mathbf{D}_1 = \epsilon_0 (\hat{x}50 + \hat{y}60) (\text{C/m}^2)$$

$$\mathbf{E}_1 = (\hat{x}10 + \hat{y}12) (\text{V/m})$$

3.3 时变电磁场的位函数

麦克斯韦方程组描述了时变电场、时变磁场以及与产生它们的源之间的关系，方程中的电场和磁场是相互关联的，直接求解通常比较困难。为便于求解，可引入电磁场的位函数作为求电磁场场矢量的辅助函数，即先由场源求出位函数，再由位函数求出场矢量。下面先导出位函数满足的方程及位函数与场矢量的关系。

3.3.1 标量位与矢量位

在均匀、线性、各向同性的不导电媒质中，麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3-24a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3-24b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3-24c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3-24d)$$

因为 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ，根据场论中“任何矢量的旋度的散度恒等于 0，即 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$ ”的结论，可将 \mathbf{B} 写成一个矢量 \mathbf{A} 的旋度的形式，即

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3-25)$$

将 \mathbf{A} 定义为电磁场的矢量位。显然，这样由式 (3-25) 定义的 \mathbf{B} 仍然满足 $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ 。

把 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 代入式 (3-24b)，并整理移项，可得

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

根据场论中“任何标量的梯度的旋度恒等于0,即 $\nabla \times (\nabla u) \equiv 0$ ”,可将 $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ 写成一个标量 Φ 的负梯度的形式,即

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi \quad (3-26)$$

将 Φ 定义为电磁场的标量位。显然 $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t$ 仍然满足

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t) = \nabla \times (-\nabla \Phi) = 0$$

定义了电磁场的矢量位、标量位之后,场矢量 \mathbf{B} 、 \mathbf{E} 可以用它们来表示,即

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3-27a)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3-27b)$$

显然,只要求出 \mathbf{A} 和 Φ ,就可以通过式(3-27)求出场矢量 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 。

3.3.2 位函数满足的方程与解

通过麦克斯韦方程组(3-24)和位函数与场矢量的关系式(3-27)可以导出位函数满足的方程。在均匀、线性、各向同性的不导电媒质中,应用 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 、 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 以及 ϵ 、 μ 均为常数的已知条件,并将式(3-27)代入式(3-24a),可得

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

应用矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ 将上式左边展开,并移项整理,可得

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (3-28)$$

为简化上述方程,注意到式(3-25)中只规定了 \mathbf{A} 的旋度等于 \mathbf{B} ,并没有对它的散度作出任何规定,这就意味着矢量位 \mathbf{A} 并不唯一。根据矢量场的性质,想要唯一确定某一矢量场,不仅要确定其旋度,还要确定其散度。于是,为使上式更简洁,可以设定 \mathbf{A} 的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\epsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (3-29)$$

此时,式(3-28)等号右边括号中的函数将等于0,方程式得到大大简化。在电磁场问题分析中,通常将这个设定称为洛伦兹条件,最早由丹麦物理学家 Ludvig Lorenz 于 1867 年提出。

将洛伦兹条件代入式(3-28),可得

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{A}^2}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (3-30a)$$

这就是均匀、线性、各向同性的不导电媒质中电磁场的矢量位 \mathbf{A} 满足的微分方程。

为导出标量位 Φ 所满足的方程,将式(3-27b)代入式(3-24d),考虑到 ϵ 、 μ 均为常数,并交换 ∇ 算子和 $\partial(\cdot) / \partial t$ 算子的运算次序,可得

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

将洛伦兹条件代入上式,可得

$$\nabla^2 \Phi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (3-30b)$$

这就是均匀、线性、各向同性的不导电媒质中电磁场的标量位 Φ 满足的微分方程。

1. 标量位的解

首先研究无界、均匀、线性、各向同性、不导电媒质空间中标量位 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 的解。

先求解点电荷的位函数,再应用叠加原理求出任意电荷分布产生的位函数。假设无界空间中仅在原点处有点电荷 $q(t)$,显然这种电荷分布具有球对称性。因此,空间的位函数分布也具有球对称性, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 仅是球坐标 r 和时间 t 的函数。由 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 的方程(3-30b)可知,在除原点以外的无界空间中,在球坐标系下, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 满足的方程为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial r} \right] = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$

式中: $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ 。

上式又可改写为

$$\frac{\partial^2 [r\Phi(\mathbf{r}, t)]}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 [r\Phi(\mathbf{r}, t)]}{\partial t^2}$$

若以 $r\Phi(\mathbf{r}, t)$ 为待求函数,由偏微分方程知识可知,在无界空间中,该偏微分方程的通解为达朗贝尔解,即

$$r\Phi(\mathbf{r}, t) = f\left(t - \frac{r}{v}\right) + g\left(t + \frac{r}{v}\right) \quad (3-31)$$

上式右边第二项不符合实际物理情况,应当舍去,因此,位于原点的时变点电荷 $q(t)$ 产生的位函数应为

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{v}\right) \quad (3-32)$$

依据静态场知识,原点处电量为 q 的恒定点电荷在原点以外的无界空间产生的位函数为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \quad (3-33)$$

静态场是时变场的特例,故式(3-33)是式(3-32)在 $q(t)$ 等于常数 q 情况下的特例,比较这两式就可知函数 f 的具体形式。

于是,式(3-32)具体形式应为

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q\left(t - \frac{r}{v}\right)}{4\pi\epsilon r} \quad (3-34)$$

这就是位于原点的时变点电荷 $q(t)$ 在离自身距离为 r ($r \neq 0$) 的空间点产生的标量位。

对于式(3-34)可以理解为,位于坐标原点的时变点电荷在时刻 t 、位置 \mathbf{r} 处产生的标

量位由 $t-r/v$ 时刻的电荷状态决定,即标量位是滞后于点电荷的。这是符合物理学因果定律的,电荷是“因”,标量位是“果”,有“因”才有“果”,“果”必然滞后于“因”。因此,式(3-34)又称为滞后位。

有了这一概念后,再来看式(3-31)的第二项为何不符合实际物理情况。根据上述类比过程,式(3-31)的第二项对应的解应表示为

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q\left(t + \frac{r}{v}\right)}{4\pi\epsilon r}$$

上式表明,位于坐标原点的时变点电荷在时刻 t 、位置 \mathbf{r} 处产生的标量位由 $t+r/v$ 时刻的电荷状态决定,即标量位是超前于点电荷的。这显然不符合物理学的因果定律,故而需要将这一种解舍去。

如图 3-9 所示,若时变电荷分布在体积 V 中,则 V 中 \mathbf{r}' 处的体积微元 $d\mathbf{v}'$ 中包含的电荷 $\rho(\mathbf{r}', t)d\mathbf{v}'$ 可以看作位于 \mathbf{r}' 处的点电荷,它在空间任意 \mathbf{r} 点 ($\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$) 处产生的位函数为

$$d\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}) d\mathbf{v}'}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

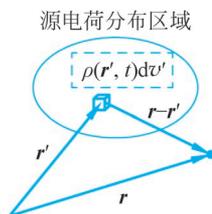


图 3-9 分布电荷示意图

由于 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 满足的方程(3-30b)是线性方程,故 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 满足叠加原理。因此,体积 V 中所有电荷在 \mathbf{r} 点产生的位函数 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 应等于所有体积微元 $d\mathbf{v}'$ 产生的位函数 $d\Phi(\mathbf{r}, t)$ 的叠加,即

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{v}' \quad (3-35)$$

这就是无界、均匀、线性、各向同性、不导电媒质空间中标量位方程(3-30b)的解。

2. 矢量位的解

在直角坐标系中,矢量位的波动方程式(3-30a)可以分解成如下三个标量方程:

$$\nabla^2 A_i(\mathbf{r}, t) - \epsilon\mu \frac{\partial A_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -\mu J_i(\mathbf{r}, t) \quad (i = x, y, z) \quad (3-36)$$

这三个标量方程与标量位 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 的方程(3-30b)形式相同,故解的形式也相同,即

$$A_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_i(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{v}' \quad (i = x, y, z) \quad (3-37)$$

写成矢量形式为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{v}' \quad (3-38)$$

这就是无界、均匀、线性、各向同性、不导电媒质空间中矢量位的波动方程(3-30a)的解。

3.4 电磁场的能量

在第2章中推出了静电场、静磁场的能量密度,它们分别为

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}, \quad w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

在得到这些能量密度公式时,对场的时变性质没有要求,因此它们也可用于计算时变场的能量。对于时变电磁场,由于时变电场和时变磁场可以相互激励、相互伴生的,时变电磁场的能量密度 w 是电场能量密度 w_e 与磁场能量密度 w_m 之和,即

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad (3-39)$$

区域 V 中的总电磁能量为

$$W = \iiint_V w dv = \iiint_V (w_e + w_m) dv = \iiint_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) dv \quad (3-40)$$

静态电磁场的场矢量不随时间变化,其能量是静态储存的。而对于时变电磁场,空间某一位置处的电磁能量总是在动态变化的,这就意味着不同空间位置之间必然存在着电磁能量的流动。实际上,时变电磁场能够从场源向周围空间传播,电磁场的能量也随之传播,形成电磁能流。任何物理现象及其工程应用都是通过能量传递来实现的,电磁场的应用也依靠电磁能量的传播才得以实现,比如,利用电磁场进行无线通信就是携带信息的电磁能量持续传播,使得远处的电磁场接收装置(包括接收天线和接收机)接收到这些信息。因此,电磁能量的大小和流动方向是研究电磁场时十分关心的特征。

下面推导如何用时变电磁场的场矢量表示电磁能量的大小和流动方向,即时变电磁场的能流。

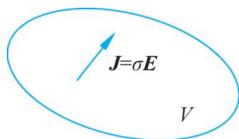


图 3-10 有限无源区域内的传导电流示意图

先假设在无源区域(媒质电导率为 σ)中研究电磁场的能流。如图 3-10 所示,该区域内没有外加场源,其中的传导电流由电场 \mathbf{E} 在媒质中引起,电流密度 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$,它与电场、磁场的关系为 $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \partial \mathbf{D} / \partial t$ 。该传导电流引起的热损耗功率密度为

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

将矢量恒等式 $\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ 代入上式右边,并根据 $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, 最终有

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3-41)$$

假设媒质是各向同性的线性媒质,上式的最后两项可改写为

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) \\ \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) \end{aligned}$$

式中： $\frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ 、 $\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ 分别是磁场能量密度和电场能量密度。

为更好地理解式(3-41), 依据其等号左边一项, 引入一个新矢量——坡印廷矢量 \mathbf{S} , 定义为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (3-42)$$

因此, 式(3-41)可以写为

$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right)$$

将上式两边在该无源区域中的任意体积 V 上做体积分, 并依据散度定理

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{S} dv = \oiint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$$

可得

$$-\oiint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) dv \quad (3-43)$$

式中： S 为体积 V 的边界面。

式(3-43) 右边第一项表示单位时间内 V 中电流损耗的焦耳热能量, 第二项表示 V 中电磁能量随时间的增长率, 或者说是单位时间内 V 中增加的电磁能量。由于已经假设研究区域中无外加场源, 依据能量守恒定律, 上式右边两项之和应等于“单位时间内通过 V 的边界面 S 流入 V 中的电磁能量”, 即上式等号左边的项 $-\oiint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$, 如图 3-11 所示。

式(3-43) 描述的电磁能量守恒定律又称为坡印廷定理。

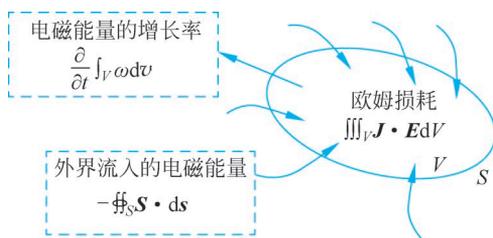


图 3-11 电磁能量守恒定律示意图

下面再讨论 V 内有外加电源的情况。此时 V 中的电流密度 \mathbf{J} 可看作外加源电流 \mathbf{J}_g 和电场引起的传导电流 $\mathbf{J}_c = \sigma\mathbf{E}$ 之和。将式(3-43)中的 \mathbf{J} 替换成 $\mathbf{J}_g + \mathbf{J}_c$, 移项整理, 可得

$$-\oiint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} - \iiint_V \mathbf{J}_g \cdot \mathbf{E} dv = \iiint_V \sigma E^2 dv + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \right) dv \quad (3-44)$$

这就是 V 中有外加电源情况下的坡印廷定理。 $-\iiint_V \mathbf{J}_g \cdot \mathbf{E} dv$ 表示单位时间内 V 中的外加电源提供的能量。上式说明：“单位时间内通过边界面 S 流入 V 中的电磁能量”(用 $-\oiint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$ 表示) 与“ V 中外加电源提供的能量”之和, 等于“单位时间内 V 中媒质电流损耗的焦耳热能量”和“单位时间内 V 中增加的电磁能量”之和, 这同样符合能量守恒定律。

由无源、有源两种情况下的坡印廷定理式(3-43)、式(3-44)可知,“单位时间内通过 V 的边界面 S 流入 V 中的电磁能量”可用坡印廷矢量 \mathbf{S} 在闭曲面 S 上的曲面积分 $-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$ 来表示,积分微元 $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$ 表示单位时间内流过面积微元 $d\mathbf{s}$ 的电磁能量。因此,坡印廷矢量 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 描述了电磁能量的流动特性: \mathbf{S} 的方向表示电磁能量流动的方向,该方向垂直于电场强度和磁场强度,并依次构成右手螺旋法则; \mathbf{S} 的模值等于单位时间内通过与能流方向垂直的单位面积的电磁能量,其单位为瓦特/米²(W/m²)。坡印廷矢量 \mathbf{S} 又称为电磁场的能流密度矢量。

研究电磁问题时,通过计算任意点处的坡印廷矢量 \mathbf{S} 来得知该点处的电磁能流的方向和大小,通过计算坡印廷矢量 \mathbf{S} 在某个曲面上的积分 $\iint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$ 来计算单位时间内流过该曲面的总电磁能量,即电磁功率。

【例 3-6】 在某无源理想介质区域中, $\mathbf{E} = E \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{x}}$ (V/m), 求坡印廷矢量以及坡印廷矢量的时间平均值。

解: 首先应用麦克斯韦方程组,由 \mathbf{E} 求出 \mathbf{H} 。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \mathbf{E} = -Ek \sin(\omega t - kz) \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{H} &= \frac{B}{\mu} \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu} E \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{y}} \text{ (A/m)} \\ \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu} E^2 \cos^2(\omega t - kz) \hat{\mathbf{z}} \text{ (W/m}^2\text{)} \end{aligned}$$

\mathbf{S} 只有 z 分量,可见电磁能量沿 z 轴方向流动。

由上式可见, \mathbf{S} 是 t 的周期函数,其平均值也就是它在一个变化周期 T 中的平均值。

$$\begin{aligned} \omega T &= 2\pi, \quad T = 2\pi/\omega \\ S_{\text{av}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{k}{\omega\mu} E^2 \cos^2(\omega t - kz) dt = \frac{k}{2\omega\mu} E^2 \text{ (W/m}^2\text{)} \end{aligned}$$

3.5 时变电磁场的波动性

前面在讨论麦克斯韦方程组时已经指出,一旦场源在空间激发起时变电磁场,时变电场、时变磁场就会持续地相互激发,即使去掉场源,时变电磁场也会脱离场源而存在,并以一定速度向远处传播。为了研究时变电磁场传播的具体形式和性质,应当推导出时变电磁场场矢量各自满足的方程。本节将从麦克斯韦方程组出发,推导出时变场场矢量各自满足的方程,这些方程具有波动方程的形式,称为电磁场的波动方程。

3.5.1 波动方程

设所讨论的区域中有时变场源电流 \mathbf{J}_g 和时变场源电荷 ρ , 媒质是均匀、线性、各向同性的,此区域中麦克斯韦方程组为

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\mathbf{J}_g + \sigma \mathbf{E}) + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3-45a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3-45b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (3-45c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (3-45d)$$

对式(3-45b)两边取旋度,并交换旋度算子 $\nabla \times$ 与偏微分算子 $\partial(\cdot)/\partial t$ 的次序,可得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})$$

利用矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ 以及式(3-45a)、式(3-45d),由上式可得

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}_g}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\rho}{\epsilon} \right) \quad (3-46a)$$

用类似的方法,从式(3-45a)出发又可推导出

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \mathbf{J}_g \quad (3-46b)$$

式(3-46)具有波动方程的形式,通常将其称为电磁场的波动方程或达朗贝尔方程。

若研究的区域中无源,将 $\mathbf{J}_g=0, \rho=0$ 这两个条件代入式(3-46),得到无源情况下的电磁场波动方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-47a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \sigma\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-47b)$$

若无源区域中的媒质是不导电媒质,其电导率 $\sigma=0$ 。将 $\sigma=0$ 代入式(3-47),得到不导电媒质中的无源波动方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-48a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (3-48b)$$

依据有源波动方程(式(3-46)),可以由场源求出辐射的电磁波。依据无源波动方程(式(3-47)或式(3-48)),可以研究电磁波脱离场源之后在无源空间中传播的性质。

3.5.2 波动性

为了说明电磁场的波动性,先在简单情况下求解波动方程,再分析波动性。

设媒质是均匀、线性、各向同性、不导电的,所研究区域中无源,此时场矢量满足的波动方程为方程(3-48)。令 ψ 表示 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 或 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 的任意直角坐标分量。为简化求解,假设 ψ 仅是坐标 z 和时间 t 的函数,即 $\psi = \psi(z, t)$,将其代入式(3-48),得 ψ 所满足的方程为

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3-49)$$

由偏微分方程知识可知,在无界空间中,该偏微分方程的通解为达朗贝尔解,表示为

$$\psi(z, t) = f\left(t - \frac{z}{v}\right) + g\left(t + \frac{z}{v}\right) \quad (3-50)$$

式中: $v=1/\sqrt{\epsilon\mu}$; f, g 为二阶可微函数。

下面分析达朗贝尔解的物理意义。第一项 $f(t-z/v)$ 有空间坐标 z 和时间坐标 t 两个自变量。假设在 $z=z_1$ 的 P_1 点,函数 f 随 t 变化的曲线如图 3-12(a) 所示, f 在 t_1 、 t_2 、 t_3 时刻的函数值分别为 $f_1=f(t_1-z_1/v)$, $f_2=f(t_2-z_1/v)$, $f_3=f(t_3-z_1/v)$ 。

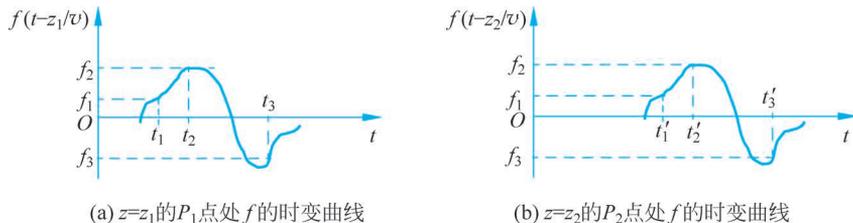


图 3-12 不同的空间点处函数的时变形式

在 $z=z_2=z_1+\Delta z$ ($z_2>z_1$) 的 P_2 点,同样的函数值 f_1 必然出现在 $t'_1=t_1+\Delta t=t_1+\Delta z/v$ 时刻,因为 $f[t'_1-(z_1+\Delta z)/v]=f(t_1-z_1/v)=f_1$,所以可以认为 P_1 点在 t_1 时刻的函数值经过一段长为 Δt 的时间传到了 P_2 点,传播的速度 $v=\Delta z/\Delta t$ 。同理, P_1 点在其他时刻的函数值也会经过一段长为 Δt 的时间传到 P_2 点。比如, P_1 点在 t_2 时刻的函数值为 f_2 ,则 P_2 点在 $t'_2=t_2+\Delta t$ 时刻的函数值也等于 f_2 ,因为 $f[t'_2-(z_1+\Delta z)/v]=f[t_2+\Delta t-(z_1+\Delta z)/v]=f(t_2-z_1/v)=f_2$; P_1 点在 t_3 时刻的函数值为 f_3 ,则 P_2 点在 $t'_3=t_3+\Delta t$ 时刻的函数值也等于 f_3 ;…。因此, P_2 点总是在重复 P_1 点出现过的函数值,只不过时间滞后了 Δt 。图 3-12(b) 中绘出 P_2 点处函数 f 随时间 t 的变化曲线,它与 P_1 点的时变曲线完全相同,这说明函数 f 在 P_1 点的变化(即振动)经过一段时间就传播到了 P_2 点,传播速度为 v ,传播方向为 z 值增大的方向。“振动在空间中的传播”被定义为“波动”,由此可知函数 f 表示一个向正 z 方向传播的波动。

用同样的方法分析式(3-50)的第二项 $g(t+z/v)$,可知,它表示向 z 值减小方向,也就是向负 z 方向传播的波动,传播速度 $v=1/\sqrt{\epsilon\mu}$ 。因此,波动方程(3-49)的通解 ψ 包含两个向相反方向传播的波动。

前面已经假设, ψ 表示场矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 或 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 的任意直角坐标分量,同理 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 或 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 的其他直角坐标分量也和 ψ 一样具有波动性,因此 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 都具有波动性,这也是将其称为电磁波的原因。电磁波的传播速度 $v=1/\sqrt{\epsilon\mu}$,在空气(其 ϵ, μ 值近似为 ϵ_0, μ_0) 中, $v_0=1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \approx 2.9979 \times 10^8$ (m/s)。

需要说明的是,上述分析过程中并没有给出 ψ 中函数 $f(t-z/v)$ 、 $g(t+z/v)$ 的具体表示式。实际上,函数 $f(t-z/v)$ 、 $g(t+z/v)$ 的具体表示式取决于电磁波辐射源的空间分布形式及其时间变化形式,可通过有源波动方程(3-46)求解。但不管 $f(t-z/v)$ 、 $g(t+z/v)$ 的具体表示式如何,都不影响上述波动性分析的结论。

3.6 时谐电磁场

通过分析时变电磁场的波动性可知,时变电磁场场矢量的时变形式取决于场源 ρ 、 \mathbf{J} 的时变形式。理论上来说,时变形式有无穷多种,但在研究电磁学和应用电磁场时往往特别关注时谐电磁场,即场分量随时间做简谐变化(包括正弦变化和余弦变化)的电磁场。时谐电磁场也是一种实际中广泛应用的电磁场,任意时变形式的电磁场理论上都可以用傅里叶级数或傅里叶积分展开成时谐电磁场的叠加。因此,研究时谐电磁场得到的结论可以推广到其他时变形式的电磁场,时谐电磁场具有典型性、代表性,研究时谐电磁场是研究其他时变形式电磁场的基础。

3.6.1 时谐电磁场的瞬时表示式和复数表示式

时谐电磁场由时谐场源产生。时谐电磁场的场矢量也随时间 t 以角频率 ω 做简谐变化,各个分量也可用时谐函数表示,以电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 为例:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_x(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{x}} + E_y(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{y}} + E_z(\mathbf{r}, t)\hat{\mathbf{z}} \\ &= E_{xm}(\mathbf{r})\cos[\omega t + \phi_x(\mathbf{r})]\hat{\mathbf{x}} + E_{ym}(\mathbf{r})\cos[\omega t + \phi_y(\mathbf{r})]\hat{\mathbf{y}} + \\ &\quad E_{zm}(\mathbf{r})\cos[\omega t + \phi_z(\mathbf{r})]\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}\quad (3-51)$$

式中: $E_{xm}(\mathbf{r})$ 、 $E_{ym}(\mathbf{r})$ 、 $E_{zm}(\mathbf{r})$ 分别为 E_x 、 E_y 、 E_z 分量在 \mathbf{r} 点处的振幅; $\phi_x(\mathbf{r})$ 、 $\phi_y(\mathbf{r})$ 、 $\phi_z(\mathbf{r})$ 分别为 E_x 、 E_y 、 E_z 分量在 \mathbf{r} 点处的初始相位。

其他场矢量也可以表示成类似的形式,这种形式的表示式称为时谐电磁场的瞬时表示式。

实际上,时谐场瞬时表示式中与时间有关的角频率 ω 和时谐函数形式 $\cos(\omega t + \dots)$ 都可以作为已知信息而隐匿,只需要关注与空间坐标 \mathbf{r} 有关的信息,例如振幅 $E_{xm}(\mathbf{r})$ 、 $E_{ym}(\mathbf{r})$ 、 $E_{zm}(\mathbf{r})$ 和初始相位 $\phi_x(\mathbf{r})$ 、 $\phi_y(\mathbf{r})$ 、 $\phi_z(\mathbf{r})$ 。按照这样的思路,可将时谐场的场矢量、场源都用复数表示,并将场方程写成复数形式,使得时谐场的表示式和计算、分析过程大为简化。

以电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 为例,其 x 分量可以写成如下复数形式:

$$E_x(\mathbf{r}, t) = E_{xm}(\mathbf{r})\cos[\omega t + \phi_x(\mathbf{r})] = \operatorname{Re}[E_{xm}(\mathbf{r})e^{j\phi_x(\mathbf{r})}e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[E_x(\mathbf{r})e^{j\omega t}]\quad (3-52)$$

式中: 复数 $E_x(\mathbf{r}) = E_{xm}(\mathbf{r})e^{j\phi_x(\mathbf{r})}$ 称为 E_x 分量在 \mathbf{r} 处的复振幅,它与时间无关,但包含了 E_x 分量与空间位置 \mathbf{r} 有关的所有信息,即振幅 $E_{xm}(\mathbf{r})$ 和初始相角 $\phi_x(\mathbf{r})$ 。依据 $E_x(\mathbf{r})$ 和角频率 ω ,就可以通过式(3-52)还原出 $E_x(\mathbf{r}, t)$,因此用复振幅 $E_x(\mathbf{r})$ 来代替 $E_x(\mathbf{r}, t)$ 既简洁又完备。

类似地,电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 的其他分量也可以写成用其复振幅表示的形式:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_{xm}(\mathbf{r})\cos[\omega t + \phi_x(\mathbf{r})]\hat{\mathbf{x}} + E_{ym}(\mathbf{r})\cos[\omega t + \phi_y(\mathbf{r})]\hat{\mathbf{y}} + E_{zm}(\mathbf{r})\cos[\omega t + \phi_z(\mathbf{r})]\hat{\mathbf{z}} \\ &= \operatorname{Re}[E_{xm}(\mathbf{r})e^{j\phi_x(\mathbf{r})}e^{j\omega t}]\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{Re}[E_{ym}(\mathbf{r})e^{j\phi_y(\mathbf{r})}e^{j\omega t}]\hat{\mathbf{y}} + \operatorname{Re}[E_{zm}(\mathbf{r})e^{j\phi_z(\mathbf{r})}e^{j\omega t}]\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{Re}[E_x(\mathbf{r})e^{j\omega t}]\hat{\mathbf{x}} + \operatorname{Re}[E_y(\mathbf{r})e^{j\omega t}]\hat{\mathbf{y}} + \operatorname{Re}[E_z(\mathbf{r})e^{j\omega t}]\hat{\mathbf{z}} \\
 &= \operatorname{Re}\{[E_x(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + E_y(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}} + E_z(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}}]e^{j\omega t}\} \\
 &= \operatorname{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] \quad (3-53a)
 \end{aligned}$$

式中: $E_y(\mathbf{r}) = E_{ym}(\mathbf{r})e^{j\phi_y(\mathbf{r})}$ 、 $E_z(\mathbf{r}) = E_{zm}(\mathbf{r})e^{j\phi_z(\mathbf{r})}$ 分别是 E_y 分量、 E_z 分量的复振幅。而矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_x(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + E_y(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}} + E_z(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}}$ 称为 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 在 \mathbf{r} 处的复振幅矢量, 又称为 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 的复数表示式。复数表示式比瞬时表示式更简洁, 因此在时谐场条件下往往采用复数表示式来表示场矢量。

场矢量 $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 都可按上述方法用其复数形式来表示:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{D}(\mathbf{r})e^{j\omega t}], \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) = D_x(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + D_y(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}} + D_z(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}} \quad (3-53b)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{j\omega t}], \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = H_x(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + H_y(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}} + H_z(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}} \quad (3-53c)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{j\omega t}], \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_x(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + B_y(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}} + B_z(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}} \quad (3-53d)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}[\mathbf{J}(\mathbf{r})e^{j\omega t}], \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}) = J_x(\mathbf{r})\hat{\mathbf{x}} + J_y(\mathbf{r})\hat{\mathbf{y}} + J_z(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}} \quad (3-53e)$$

需要注意以下三个方面:

(1) 只有时谐电磁场的场矢量才能写成复数表示式, 复数表示式只与空间位置变量有关, 与时间变量无关。

(2) 复数表示式仅仅是时谐电磁场的一种简化数学表示形式, 真实的电磁场矢量是与之相对应的瞬时表示式。

(3) 只有频率相同的时谐场之间才能直接使用复数表示式进行运算。

分析、研究时为方便起见, 往往需要将场矢量的瞬时形式与复数形式相互转换, 以下例题说明了转换过程和需注意的事项。

【例 3-7】 写出与下列场矢量表示式对应的瞬时表示式或复数表示式:

$$(1) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{-jk_z z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$(2) \mathbf{E} = 2jE_0 \sin\theta \cos(kx \cos\theta) e^{-jk_z z \sin\theta} \hat{\mathbf{x}}$$

$$(3) \mathbf{E} = E_{ym} \cos(\omega t - kx + \alpha) \hat{\mathbf{y}} + E_{zm} \sin(\omega t - kx + \alpha) \hat{\mathbf{z}}$$

$$(4) \mathbf{H} = H_0 \sin(kz - \omega t) \hat{\mathbf{x}} + H_0 \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{z}}$$

解: (1) 原表示式是复数表示式, 要写出它的瞬时表示式。利用式(3-53a)可得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] \\
 &= \operatorname{Re}[E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{-jk_z z} e^{j\omega t} \hat{\mathbf{z}}] \\
 &= E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(\omega t - k_z z) \hat{\mathbf{z}}
 \end{aligned}$$

(2) 原表示式是复数表示式, 要写出它的瞬时表示式。注意复系数 j 要写成 e 的指数形式, 然后将 e 的所有指数相加得到时谐函数的相位, 于是有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] \\
 &= \operatorname{Re}[2jE_0 \sin\theta \cos(kx \cos\theta) e^{-jk_z z \sin\theta} e^{j\omega t} \hat{\mathbf{x}}] \\
 &= \operatorname{Re}[2E_0 \sin\theta \cos(kx \cos\theta) e^{j\pi/2} e^{-jk_z z \sin\theta} e^{j\omega t} \hat{\mathbf{x}}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2E_0 \sin\theta \cos(kx \cos\theta) \cos(\omega t - k_z z \sin\theta + \pi/2) \hat{x} \\
 &= -2E_0 \sin\theta \cos(kx \cos\theta) \sin(\omega t - k_z z \sin\theta) \hat{x}
 \end{aligned}$$

(3) 原表示式是瞬时表示式,要写出它的复数表示式,须将其转化为式(3-53a)的形式。先将所有时谐函数都转化为 \cos 函数,才能将它们写成复数的实部,于是有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_{ym} \cos(\omega t - kx + \alpha) \hat{y} + E_{zm} \sin(\omega t - kx + \alpha) \hat{z} \\
 &= E_{ym} \cos(\omega t - kx + \alpha) \hat{y} + E_{zm} \cos(\omega t - kx + \alpha - \pi/2) \hat{z} \\
 &= \operatorname{Re}(E_{ym} e^{j(-kx+\alpha)} e^{j\omega t} \hat{y} + E_{zm} e^{j(-kx+\alpha)} e^{-j\pi/2} e^{j\omega t} \hat{z}) \\
 &= \operatorname{Re}[(E_{ym} e^{j(-kx+\alpha)} \hat{y} - jE_{zm} e^{j(-kx+\alpha)} \hat{z}) e^{j\omega t}] \\
 &= \operatorname{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}]
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_{ym} e^{-j(kx-\alpha)} \hat{y} - jE_{zm} e^{-j(kx-\alpha)} \hat{z}$$

(4) 原表示式是瞬时表示式,要写出它的复数表示式。将 ωt 前的负号化成正号,才能转化为式(3-53c)的形式,于是有

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= H_0 \sin(kz - \omega t) \hat{x} + H_0 \cos(kz - \omega t) \hat{z} \\
 &= -H_0 \cos(\omega t - kz - \pi/2) \hat{x} + H_0 \cos(\omega t - kz) \hat{z} \\
 &= \operatorname{Re}(-H_0 e^{-jkz} e^{-j\pi/2} e^{j\omega t} \hat{x} + H_0 e^{-jkz} e^{j\omega t} \hat{z}) \\
 &= \operatorname{Re}[(jH_0 e^{-jkz} \hat{x} + H_0 e^{-jkz} \hat{z}) e^{j\omega t}]
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = jH_0 e^{-jkz} \hat{x} + H_0 e^{-jkz} \hat{z}$$

3.6.2 时谐场的复数形式麦克斯韦方程组和结构方程、边界条件

在时谐电磁场前提下,麦克斯韦方程组也可以写成复数形式。以全电流定律为例将其中所有的物理量都用复数表示式来表示,即

$$\nabla \times \operatorname{Re}[\mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\mathbf{J}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] + \frac{\partial \operatorname{Re}[\mathbf{D}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}]}{\partial t} \quad (3-54)$$

交换取实部的 Re 运算与偏微分算子 $\nabla \cdot$ 、 $\nabla \times$ 的运算次序,可得

$$\operatorname{Re}[\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\mathbf{J}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} + j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}]$$

即

$$\operatorname{Re}\{[\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}(\mathbf{r}) - j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r})] e^{j\omega t}\} = 0 \quad (3-55)$$

上式对任意 t 都成立的条件为

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}(\mathbf{r}) - j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0$$

即

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) + j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r})$$

上式就是时谐电磁场情况下全电流定律的复数形式。

类似地,在时谐电磁场情况下可将麦克斯韦方程组中其他三个方程写成复数形式,得到复数形式的麦克斯韦方程组:

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) + j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) \quad (3-56a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (3-56b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3-56c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \quad (3-56d)$$

可以看到,与瞬时形式的麦克斯韦方程组相比,复数形式的麦克斯韦方程组唯一的变化就是对时间的偏微分项 $\partial/\partial t$ 替换为 $j\omega$, $\nabla \cdot$ 、 $\nabla \times$ 等算子均保持不变。另外,需要特别注意,方程组(3-56)只适用于时谐电磁场,不适用于其他时变类型的电磁场。

时谐电磁场的结构方程和边界条件的复数形式分别为

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (3-57)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{H}_2(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_1(\mathbf{r})] = \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \\ \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_1(\mathbf{r})] = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) - \mathbf{B}_1(\mathbf{r})] = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{D}_2(\mathbf{r}) - \mathbf{D}_1(\mathbf{r})] = \rho_s(\mathbf{r}) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} H_{2t}(\mathbf{r}) - H_{1t}(\mathbf{r}) = J_s(\mathbf{r}) \\ E_{2t}(\mathbf{r}) = E_{1t}(\mathbf{r}) \\ B_{2n}(\mathbf{r}) = B_{1n}(\mathbf{r}) \\ D_{2n}(\mathbf{r}) - D_{1n}(\mathbf{r}) = \rho_s(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (3-58)$$

时谐电磁场的结构方程、边界条件的形式与一般结构方程、边界条件完全相同,只是其中的场矢量均写成复数表示式。

【例 3-8】 用场矢量的复数表示式重新求解例 3-4 中的问题。

解: 例 3-4 中给出的是时谐电磁场的电场强度瞬时表示式

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \hat{\mathbf{x}} = \text{Re}[(E_0 e^{-j\beta z} \hat{\mathbf{x}}) e^{j\omega t}]$$

其复数表示式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_0 e^{-j\beta z} \hat{\mathbf{x}}$$

因此,有

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 E_0 e^{-j\beta z} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\rho_{s0}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}}_0 \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 E_0 e^{-j\beta z}, \quad x = 0$$

$$\rho_{sd}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}}_d \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = -\epsilon_0 E_0 e^{-j\beta z}, \quad x = d$$

由 $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})/\mu_0$ 可求出

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = E_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{-j\beta z} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{J}_{s0}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}}_0 \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{-j\beta z} \hat{\mathbf{z}}, \quad x = 0$$

$$\mathbf{J}_{sd}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}}_d \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{-j\beta z} \hat{\mathbf{z}}, \quad x = d$$

由上述例题可知,对于时谐电磁场采用复数表示式和复数形式的麦克斯韦方程组可以使计算、分析得到简化。比如,原来利用法拉第电磁感应定律 $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)/\partial t$ 由电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 求磁感应强度 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$,要进行旋度运算和积分运算;但在时谐场情况下,利用复数形式的法拉第电磁感应定律 $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r})$,由电场

强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 求磁感应强度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, 就只需做旋度运算和除法运算了, 比积分简单。而且, 场矢量的表示式也更加简洁。

3.6.3 时谐场的复坡印廷矢量和复坡印廷定理

1. 复坡印廷矢量

坡印廷矢量 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 表示时变电磁场在时刻 t 、空间 \mathbf{r} 点的能流密度, 称为时变场的瞬时坡印廷矢量或瞬时能流密度。如果 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 是周期变化的, 则它在每个周期 T 内的时间平均值称为平均坡印廷矢量或平均能流密度

$$\mathbf{S}_{\text{av}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) dt$$

时谐电磁场情况下, 场矢量的瞬时表示式 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 可以用其复数表示式写为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r})e^{-j\omega t}]$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}[\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{j\omega t} + \mathbf{H}^*(\mathbf{r})e^{-j\omega t}]$$

式中: $\mathbf{E}^*(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{H}^*(\mathbf{r})$ 分别为 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 的共轭。

因此, 时谐电磁场的瞬时坡印廷矢量 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{r})e^{-j\omega t}] \times \frac{1}{2}[\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{j\omega t} + \mathbf{H}^*(\mathbf{r})e^{-j\omega t}] \\ &= \text{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})\right] + \text{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{j2\omega t}\right] \end{aligned}$$

式中: 第一项与时间 t 无关, 不随时间变化; 第二项以 2ω 为角频率随 t 做正弦变化。

图 3-13 中画出第一项、第二项及 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 的时变曲线, 可见 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 的平均值为

$$\mathbf{S}_{\text{av}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) dt = \text{Re}\left[\frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})\right] \quad (3-59)$$

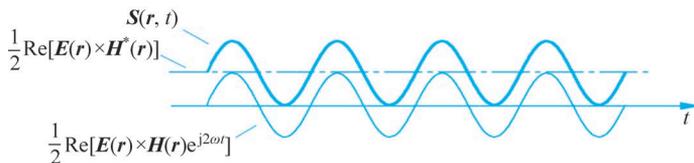


图 3-13 瞬时坡印廷矢量的时变曲线

式中 $\text{Re}(\cdot)$ 中的复矢量 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r})/2$ 定义为时谐场的复坡印廷矢量或复能流密度矢量 $\mathbf{S}(\mathbf{r})$, 即

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \quad (3-60)$$

由式(3-59)可知, 平均坡印廷矢量与复坡印廷矢量的关系为

$$\mathbf{S}_{\text{av}}(\mathbf{r}) = \text{Re}[\mathbf{S}(\mathbf{r})] \quad (3-61)$$

应当注意的是, 时谐场的复坡印廷矢量 $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ 并不是其瞬时坡印廷矢量 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 的复

数表示式,即 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \neq \text{Re}[\mathbf{S}(\mathbf{r})e^{j\omega t}]$, 只能通过定义式(3-60)来求复坡印廷矢量 $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ 。

2. 复坡印廷定理

时谐场情况下,坡印廷定理也可以写成复数形式。在体积 V 的边界曲面 S 上求复坡印廷矢量 $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ 的面积分,并应用散度定理,可得

$$\oiint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \oiint_S \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \right) dv \quad (3-62)$$

将式

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^*$$

及

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{H}^* = \mathbf{J}^* - j\omega \mathbf{D}^*$$

代入式(3-62),可得

$$-\oiint_S \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dv + j2\omega \iiint_V \left(\frac{1}{4} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \frac{1}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* \right) dv \quad (3-63a)$$

这就是时谐场满足的复坡印廷定理。

若媒质参数 σ, ϵ, μ 均为实数,则有

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dv &= \iiint_V \frac{1}{2} \sigma |\mathbf{E}|^2 dv = P_1 \\ \iiint_V \frac{1}{4} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* dv &= \iiint_V \frac{1}{4} \mu |\mathbf{H}|^2 dv = W_m \\ \iiint_V \frac{1}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* dv &= \iiint_V \frac{1}{4} \epsilon |\mathbf{E}|^2 dv = W_e \end{aligned}$$

式中: P_1 为体积 V 中的平均焦耳热损耗功率; W_m, W_e 分别是体积 V 中的平均磁场能量和平均电场能量。

因此,复坡印廷定理式(3-62)可写为

$$-\oiint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = P_1 + j2\omega(W_m - W_e) \quad (3-63b)$$

它表明,在体积 V 中无外加电源的情况下,通过边界面 S 流入体积 V 中的复功率 $-\oiint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$ 的实部正好等于体积 V 中的平均焦耳热损耗功率,而流入的复功率的虚部等于 V 中平均磁场能量与平均电场能量之差的 2ω 倍,是流入 V 中的无功功率。

若 V 中存在外加电源,则将式(3-63a)中的 \mathbf{J} 替换成 $\mathbf{J}_g + \mathbf{J}_c$, 此时复坡印廷定理表示为

$$\begin{aligned} &-\oiint_S \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{s} - \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_g^* dv \\ &= \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_c^* dv + j2\omega \iiint_V \left(\frac{1}{4} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^* - \frac{1}{4} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* \right) dv \end{aligned} \quad (3-64)$$

【例 3-9】 无源空间中电场强度 $\mathbf{E} = E \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{y}}$ (V/m), 求复坡印廷矢量和平均坡印廷矢量。

解：首先要将场矢量的瞬时表示式转化为复数表示式，并求出磁场强度。于是有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E \cos(\omega t - kz) \hat{\mathbf{y}} \text{ (V/m)} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E e^{-jkz} \hat{\mathbf{y}} \text{ (V/m)}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{kE}{\omega\mu} e^{-jkz} \hat{\mathbf{x}} \text{ (A/m)}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) = \frac{kE^2}{2\omega\mu} \hat{\mathbf{z}} \text{ (W/m}^2\text{)}$$

$$\mathbf{S}_{\text{av}}(\mathbf{r}) = \text{Re}[\mathbf{S}(\mathbf{r})] = \frac{kE^2}{2\omega\mu} \hat{\mathbf{z}} \text{ (W/m}^2\text{)}$$

3.6.4 时谐场的波动方程

时谐场的波动方程可以写成复数形式。将有源波动方程中的时谐场场矢量用其复数表示式表示，算子 $\partial(\cdot)/\partial t$ 、 $\partial^2(\cdot)/\partial t^2$ 分别用 $j\omega$ 、 $(j\omega)^2$ 代替，可得有源区域中的复波动方程，即

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) - j\omega\sigma\mu\mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = j\omega\mu\mathbf{J}(\mathbf{r}) + \nabla\left(\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon}\right) \quad (3-65a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) - j\omega\sigma\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (3-65b)$$

式中： $k = \omega \sqrt{\epsilon\mu}$ 。

以上两个方程称为时谐场场矢量的亥姆霍兹方程。

将无源波动方程中的场矢量写成复数形式就可以得到无源、不导电媒质中的复数形式波动方程，即

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3-66a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3-66b)$$

3.6.5 时谐场的位函数

1. 位函数方程

在3.3节介绍了时变场的位函数，由式(3-30)可知，标量位函数和矢量位函数分别由场源 $\rho(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 决定。时谐电磁场的场源 $\rho(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 随时间做时谐变化，因此其位函数也是时谐函数，也可以写成复数表示式。

可以由一般时变场的位函数方程直接推出时谐场的位函数满足的方程。将方程(3-30)中的时谐场场矢量用其复数表示式表示， $\partial^2(\cdot)/\partial t^2$ 用 $(j\omega)^2$ 代替，即得时谐场的位函数方程

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu\mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (3-67a)$$

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) + k^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon} \quad (3-67b)$$

式中： $k = \omega \sqrt{\epsilon\mu}$ 。

2. 位函数

求解方程(3-67)就可以求出时谐场的复数形式位函数，更简便的方法是直接由一般

时变场的位函数推出时谐场的复数形式位函数。

先考虑标量位函数 Φ 。设 $\rho(\mathbf{r}, t)$ 为时谐函数, 表示为

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_m(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}[\rho(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \quad (3-68)$$

式中: $\rho(\mathbf{r}) = \rho_m(\mathbf{r}) e^{j\phi}$ 是 $\rho(\mathbf{r}, t)$ 的复数表示式。

与此同理, 一般时谐场的位函数式(3-35)中积分号内的 $\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)$ 可在时谐场情况下表示为

$$\begin{aligned} \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right) &= \rho_m(\mathbf{r}') \cos\left[\omega\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right) + \phi\right] \\ &= \text{Re}\left[\rho_m(\mathbf{r}') e^{j\phi} e^{j\omega\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right)}\right] \\ &= \text{Re}\left[\rho(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{j\omega t}\right] \end{aligned} \quad (3-69)$$

式中

$$\rho(\mathbf{r}') = \rho_m(\mathbf{r}') e^{j\phi}, \quad k = \omega/v = \omega \sqrt{\epsilon\mu}$$

可见, $\rho(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ 是 $\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v)$ 的复数形式, 因此式(3-35)的复数形式为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (3-70)$$

这就是无界空间中时谐场的复数形式标量位函数, 即方程(3-67b)的解。

类似地, 在无界空间中, 时谐场的复数形式矢量位为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (3-71)$$

式(3-70)、式(3-71)表示的时谐场位函数, 仍然是滞后位。相位因子 $e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ 表示波传播 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 距离后相位滞后了 $k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 。在时谐场情况下, 相位滞后实际上就意味着时间滞后, 或者说, 时间滞后可以用相位滞后来体现。

3.7 案例与实践

根据 3.5 节的分析, 时变电磁场是以波动的形式在空间传播的。在电磁波传播路径上的不同点处, 场矢量的振动规律相同, 仅是在时间上有滞后。本节主要对时谐电场的波动性进行仿真和可视化展示。

案例: 假设有时谐电磁场, 其电场矢量为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{x}E_x(z, t) = \hat{x}E_{xm} \cos(\omega t - kz + \phi)$$

绘制该电场矢量在空间的传播特征, 并观察 $z = \lambda$ 和 $z = 1.5\lambda$ 这两点处电场矢量的振动状态。电场初始参数: $f = 1\text{GHz}$, $E_{xm} = 1$, $\phi = 0$ 。

图 3-14 中, 利用 quiver3 函数模拟了时谐电场沿 z 轴方向的传播过程, 并且单独标示了 $z = \lambda$ 和 $z = 1.5\lambda$ 两点处的电场矢量的振动状态。首先, 从左图可以明显看到电场整体上沿 $+z$ 轴方向推进。其次, 可以看到, 对于 $z = \lambda$ 和 $z = 1.5\lambda$ 这两点, 电场矢量的振动状态完全一致, 但是后者较前者在相位上滞后 180° , 这主要是空间上的滞后引起的

相位滞后。从另一个角度分析,可以认为 $z=1.5\lambda$ 处的振动在重复 $z=\lambda$ 处的振动,只是其时间上滞后了 0.5 个周期,符合 3.5.2 节分析的波动性特征。感兴趣的读者请查看本页的动画。

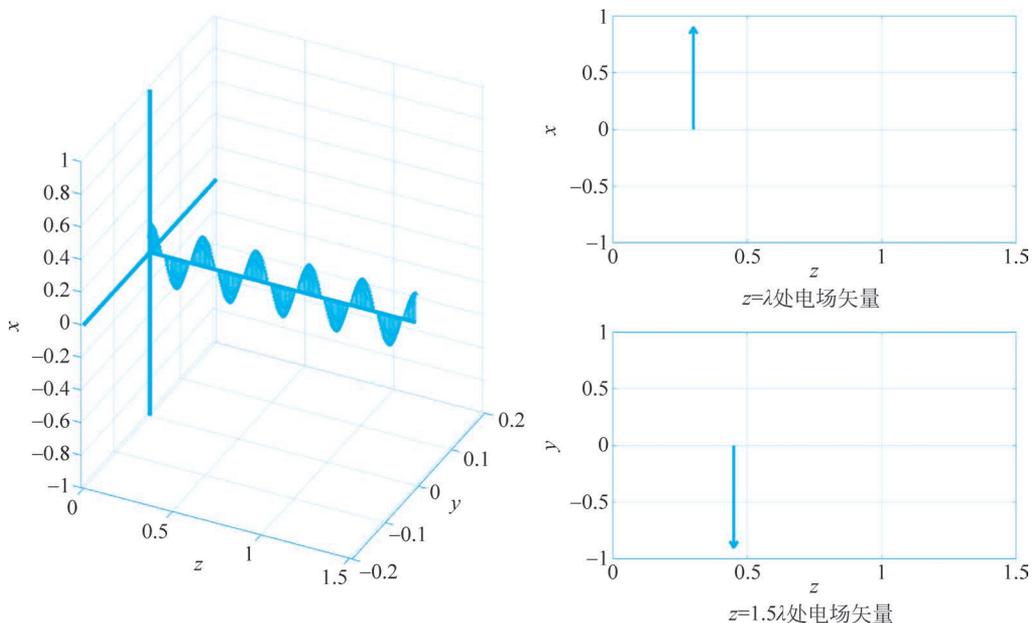


图 3-14 时谐电磁场传播示意图



动画

思考题

- 3-1 什么是位移电流,它与传导电流有何区别与联系。全电流定律所表征的方程是什么?
- 3-2 什么是边界条件?理想导体表面的电磁场有何特点?
- 3-3 简述时变电磁场的矢量位与标量位的引入过程。时变场的位函数与静态场的位函数有何区别与联系。
- 3-4 什么是洛伦兹规范,如果在引入时变场位函数的时候采用的是库仑规范,那么矢量位 \mathbf{A} 和标量位 Φ 所满足的方程是怎样的?
- 3-5 如何描述电磁能量流动的大小和方向?简述坡印廷定理。
- 3-6 瞬时坡印廷矢量、复坡印廷矢量、平均坡印廷矢量各自的区别与联系是什么?
- 3-7 什么是复坡印廷定理?其中各项的物理内涵是什么?
- 3-8 时谐场复数形式麦克斯韦方程组与一般瞬时形式麦克斯韦方程有何区别与联系?
- 3-9 时变场所满足的波动方程是什么?如何理解场的波动性?
- 3-10 什么是滞后位?滞后位所代表的物理本质是什么?

练习题

3-1 以铜为例,证明在微波频率(300MHz~3000GHz)下,良导体中的位移电流远小于传导电流。假设铜的介电常数 $\epsilon = \epsilon_0$, 电导率 $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$, 其内部的传导电流为 $\mathbf{J}_0 \cos \omega t \hat{z} (\text{A/m}^2)$ 。

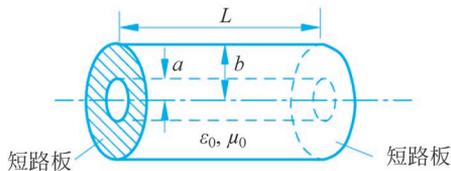
3-2 设真空中的磁感应强度 $\mathbf{B} = 10^{-3} \cos(6\pi \times 10^3 t) \cos(2\pi z) \hat{y} (\text{T})$, 求位移电流密度。

3-3 已知 $\mathbf{E} = E_0 [\cos(ky - \omega t) \hat{x} + \cos(ky - \omega t) \hat{z}]$, 式中 E_0, k, ω 为常数, 由麦克斯韦方程组确定与之相联系的 \mathbf{B} 。

3-4 一段由理想导体构成的同轴腔, 内导体半径为 a , 外导体内半径为 b , 长为 L , 两端用理想导体板短路, 导体之间为空气, 如题 3-4 图所示。已知在 $a \leq \rho \leq b, 0 \leq z \leq L$ 区域内的电磁场为

$$\mathbf{E} = \frac{A}{\rho} \sin(kz) \hat{\rho}, \quad \mathbf{B} = \frac{B}{\rho} \cos(kz) \hat{\theta}$$

(1) 确定 A, B 之间的关系; (2) 确定 k ; (3) 求同轴腔所有内壁上的自由电荷密度和传导电流密度。



题 3-4 图

3-5 设 $z=0$ 平面为两种磁介质的分解面, $z < 0$ 空间的 $\mu_{r1} = 4$, $z > 0$ 空间的 $\mu_{r2} = 3$, 分界面 $z=0$ 处的面电流为

$$\mathbf{J}_s = 3 \sin(2\pi \times 10^6 t) \hat{y} (\text{A/m})$$

$z < 0$ 空间中紧挨 $z=0$ 界面处的磁场为

$$\mathbf{H}_1 = (2\hat{x} + \sqrt{3}\hat{z}) \sin(2\pi \times 10^6 t) (\text{A/m})$$

求 $z > 0$ 空间中紧靠 $z=0$ 界面处的磁场 $\mathbf{H}_2, \mathbf{B}_2$ 。

3-6 求下列各复场量的瞬时表示式:

(1) $\mathbf{E} = E_0 e^{-j\beta z} \hat{x}$;

(2) $\mathbf{E} = E_0 \sin(\beta z) \hat{x}$;

(3) $\mathbf{H} = jH_0 \cos(\beta z) \hat{y}$;

(4) $\mathbf{E} = 5e^{j30^\circ} \hat{x} + 6e^{j220^\circ} \hat{y} + e^{-j40^\circ} \hat{z}$ 。

3-7 已知空气中 $\mathbf{H} = -j2 \cos(15\pi x) e^{-jkz} \hat{y}, f = 3 \times 10^9 \text{ Hz}$, 试求 \mathbf{E} 和 k 。

3-8 分别处于 $x=0, x=d$ 两个平面上的两块无限大平行理想导体板之间的电场为

$$\mathbf{E} = \hat{y} E_m \sin \frac{n\pi}{d} x e^{-j\sqrt{k^2 - (n\pi/d)^2} z}$$

- (1) 求 \mathbf{H} ;
 (2) 写出 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 的瞬时表示式;
 (3) 求两导体板上的面电流密度。

3-9 无限长理想导体所围区域为 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$, 如题 3-9 图所示, 其中电场为

$$\mathbf{E} = E_{y0} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \hat{\mathbf{y}}.$$

- (1) 求区域中的位移电流密度和磁场;
 (2) 求瞬时坡印廷矢量和平均坡印廷矢量;
 (3) 计算穿过该区域任一横截面的平均功率。

3-10 真空中存在的电磁场为

$$\mathbf{E} = jE_0 \sin(kz) \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{H} = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(kz) \hat{\mathbf{y}}$$

式中: $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$, λ 为波长。

求 $z=0, \lambda/4$ 各点的坡印廷矢量的瞬时值和平均值。

3-11 无源 ($\mathbf{J}=0, \rho=0$) 空气中两个不同频率的电磁波的电场强度分别为

$$\mathbf{E}_1 = E_1 e^{-j\omega_1 z/c} \hat{\mathbf{x}} \quad \mathbf{E}_2 = E_2 e^{-j\omega_2 z/c} \hat{\mathbf{x}}$$

式中: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ 。

证明合成场的平均能流密度等于两个波各自的平均能流密度之和。

3-12 已知 $\mathbf{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{\mathbf{x}} + E_0 \sin(kz - \omega t) \hat{\mathbf{y}}$

- (1) 求磁场、坡印廷矢量;
 (2) 对于给定的 z (如 $z=0$), 确定 \mathbf{E} 矢量随时间变化的运动轨迹;
 (3) 求电场能量密度、磁场能量密度和平均能流密度。

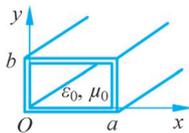
3-13 证明在无源空间的电磁场可以用矢量位 \mathbf{A}_m 表示成 $\mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{A}_m, \mathbf{H} = -j\omega \mathbf{A}_m + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}_m)}{j\omega\epsilon\mu}$, 而 \mathbf{A}_m 是方程 $\nabla^2 \mathbf{A}_m + \omega^2 \epsilon\mu \mathbf{A}_m = 0$ 的解。

3-14 在麦克斯韦方程中, 若忽略 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, 证明矢量位和标量位满足泊松方程

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \quad \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

3-15 证明矢量位 $\mathbf{A} = \sin(\beta y) \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}}$ 是无源媒质中方程 $\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$ 的解,

其中 $\beta = \omega \sqrt{\epsilon\mu}$ 。求与 \mathbf{A} 对应的电场强度、磁场强度。



题 3-9 图