
第 1 章

等几何分析

本章主要介绍等几何分析的概念、方法及其在弹性力学问题分析中的应用,主要内容包括 8 个小节: 1.1 节为等几何分析概述,主要介绍等几何分析提出的背景以及目前的发展现状; 1.2 节为样条函数及几何造型,主要包括 B 样条以及非均匀有理 B 样条(non-uniform rational B-spline, NURBS)函数、几何造型方法以及细化方法,其作为等几何分析的重要基础; 1.3 节为弹性力学基本方程,包括二维以及三维问题,其作为等几何方法所要分析的对象,具体为平衡微分方程、几何方程、物理方程、边界条件; 1.4 节为等效积分弱形式及其近似求解方法,包括由弹性力学基本方程推导得到的等效积分及其弱形式,以及伽辽金法和里茨方法两种数值求解方法,其作为等几何分析的理论基础; 1.5 节为有限元基本思想及等参变换,主要介绍有限元分析的基本步骤以及现今广泛使用的等参变换和等参有限元方法,为引出等几何分析做铺垫; 1.6 节为等几何分析,主要包括其基本思想、基于等效积分弱形式的等几何离散、刚度矩阵以及载荷向量的数值积分方法以及组装方法、边界条件施加方法、等几何分析的基本流程及其与有限元方法的对比; 1.7 节通过两个经典案例,即二维无限大带孔方板受面内拉伸载荷作用以及三维 Scordelis-Lo 屋顶受自重作用,说明等几何分析的精度及效率; 1.8 节为本章小结。

1.1 等几何分析概述

现代工业及军事装备的结构往往较为复杂,包含成千上万个零部件,这些装备的结构从最初的设计到形成最终的产品往往需要经过多次更改,而每一次结构上的变化都会带来一系列烦琐的前处理工作,比如从计算机辅助设计(computer aided design, CAD)模型转换为分析用的有限元模型时需要进行耗时的网格划分等前处理工作,当 CAD 模型较为复杂时,其模型转换所耗费的前处理时间则更加显著。据美国 Sandia 实验室统计,工业产品的设计所耗费的前处理时间约占整个设计与分析流程的 80%,只有约 20%的时间真正用在分析与计算方面^[1],这严重制约了工业产品的研发效率,显著增加了人力、时间等方面的成本,因此如何消除 CAD 与计算机辅助工程(computer aided engineering, CAE)之间烦琐的模型转换这一“卡脖子”问题就显得极其重要^[2]。

2005 年, T. J. R. Hughes 教授指出,造成上述问题的根本原因在于 CAD 与 CAE 中几何模型的描述方式存在不一致^[3]。在 CAD 中,几何模型一般是以非均匀有理 B 样条

(NURBS)或者构造实体几何(constructive solid geometry, CSG)的方式来描述,而在 CAE 中(比如有限元分析),其模型一般是以线性或二次插值的方式来构造,是真实几何的一种近似。这种不一致导致了 CAD 与 CAE 之间模型转换效率较低,且缺乏双向关联。为了消除两者几何模型描述的不一致, Hughes 等人提出了等几何分析(isogeometric analysis)的概念^[3],其基本思想是将 CAD 中描述几何形状的 NURBS 引入到等参有限元中,通过统一的几何描述可以消除产品设计过程中 CAD 与 CAE 之间反复的数据转换过程,从而节省了大量的前处理时间,这为 CAD/CAE 无缝融合问题提供了独特的思路。等几何分析与有限元分析的基本流程对比如图 1-1 所示。相比有限元方法,等几何分析具有一些独特的优势,比如单元间高阶连续性、几何精确性等,这些特点对于板壳结构分析^[4-5]、接触碰撞分析^[6-7]、流固耦合分析^[8-9]等问题具有显著优势。

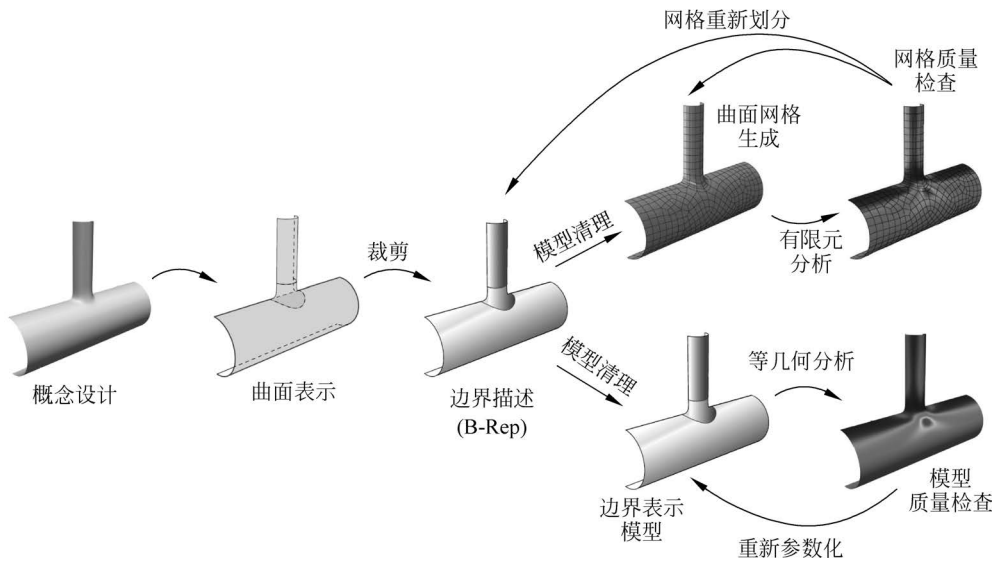


图 1-1 等几何分析与有限元分析流程对比

等几何分析自 2005 年提出以来迅速成为计算力学以及计算几何领域的研究热点且取得了长足的发展,但还存在一些困难亟待解决,包括复杂形状的处理及其等几何分析,局部细化、实体模型生成等。这主要是由于 NURBS 函数具有张量积的性质,从而难以描述复杂几何形状,为了实现等几何分析的目标,许多学者主要从分析与几何两个方面进行了研究。

分析方面主要是基于 CAD 中的边界描述(B-Rep)模型直接进行等几何分析^[5],主要方法包括:基于剪裁(trimmed)特征的等几何分析^[5,10-11],基于浸没边界(immersed boundary)思想的有限单胞法(finite cell method)^[2,12],以及边界元方法^[13-14]等。此外,由于复杂几何模型通常是由多个面片(patch)组成,因此需要发展相应的界面约束方法,包括多片耦合以及边界条件施加。常见的界面约束方法包括拉格朗日乘子法^[15]、罚函数法^[5]以及 Nitsche 方法^[16-17]等,其中 Nitsche 方法具有变分一致的特性,且所获得的刚度矩阵性态良好,因此受到了学术界的广泛关注,特别是在薄壳结构的多片耦合方面,应用较多。其他的多片耦合约束方法包括区域分解法^[18-19]等。在边界条件施加方面,除了上述常用的方法之外,还包括配点法^[20]等。

几何方面主要是研究复杂曲面以及实体的参数化^[21-23],以及针对 NURBS 样条本身的缺点构造新的或发掘已有的适合等几何分析的样条,使其具备局部细分能力,这些新型样条包括: T 样条^[24-25]、截断层次 B 样条(THB-splines)^[26]、层次 B 样条^[27]、LR B 样条^[28]、细分曲面^[29]以及贝塞尔(Bezier)三角形样条^[30]等。

综上所述,等几何分析在 CAD/CAE 无缝融合方面具有极大潜力,并且由于等几何分析具有几何精确、高阶、高连续性等特点,使得其在计算力学、计算几何以及计算数学等领域得到了广泛关注并获得了长足的发展。

1.2 样条函数及几何造型

等几何分析以样条函数为基础,因此本节将详细介绍 B 样条(B-spline)以及非均匀有理 B 样条(NURBS)函数的构造方法及其性质;此外,还包括基于这些样条函数的几何造型方法。

1.2.1 B 样条函数及其导数

首先以一维 B 样条函数为例,其节点向量由一系列非递减的节点序列构成,可以写为 $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$,其中 $\xi_i \in \mathbb{R}$ 为第 i 个节点, $i=1, 2, \dots, n+p+1$ 为节点索引指标,相邻两个节点组成的区间 $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ 称为一个节点区间(或单元), p 为基函数阶数, n 为基函数个数,当节点向量首末两个节点的重复度为 $p+1$ 时,该节点向量称为开节点向量(open knot vector)。

基于节点向量,可以采用 Cox-de Boor 递归方程^[31]构造一维 B 样条函数:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-1)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (1-2)$$

以节点向量 $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7] = [0, 0, 0, 1, 2, 2, 2]$ 为例,首先构造 $N_{i,0}(\xi)$ 如下:

$$\begin{aligned} N_{1,0}(\xi) &= N_{2,0}(\xi) = N_{5,0}(\xi) = N_{6,0}(\xi) = 0 \\ N_{3,0}(\xi) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq \xi < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ N_{4,0}(\xi) &= \begin{cases} 1, & 1 \leq \xi < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \quad (1-3)$$

基于式(1-2)与式(1-3),并定义 $0/0 \doteq 0$,可以得到 $N_{i,1}(\xi)$ 为

$$\begin{aligned} N_{1,1}(\xi) &= 0 \\ N_{2,1}(\xi) &= \begin{cases} 1 - \xi, & 0 \leq \xi < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ N_{3,1}(\xi) &= \begin{cases} \xi, & 0 \leq \xi < 1 \\ 2 - \xi, & 1 \leq \xi < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

$$N_{4,1}(\xi) = \begin{cases} \xi - 1, & 1 \leq \xi < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-4)$$

以此类推,可以得到 $N_{i,2}(\xi)$ 为

$$\begin{aligned} N_{1,2}(\xi) &= \begin{cases} (1-\xi)^2, & 0 \leq \xi < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ N_{2,2}(\xi) &= \begin{cases} \xi(1-\xi) + (2-\xi)\xi/2, & 0 \leq \xi < 1 \\ (2-\xi)^2/2, & 1 \leq \xi < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ N_{3,2}(\xi) &= \begin{cases} \xi^2/2, & 0 \leq \xi < 1 \\ \xi(2-\xi)/2 + (2-\xi)(\xi-1), & 1 \leq \xi < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ N_{4,2}(\xi) &= \begin{cases} (\xi-1)^2, & 1 \leq \xi < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \quad (1-5)$$

通过式(1-5)可以在相应节点向量区间内绘制其函数曲线图,如图 1-2 所示,其中横坐标为节点向量参数值,在节点向量端点处 B 样条函数的值为 1。此外,B 样条函数在整个节点向量区间内都是非负的,并且满足单位分解特性,即

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1 \quad (1-6)$$

由上述 B 样条函数定义公式可知,B 样条函数的支撑区间为 $p+1$ 个,即 $N_{i,p}(\xi)$ 在节点区间 $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ 上非零,因此,随着 B 样条函数阶数的升高,其支撑区间将逐渐增大。

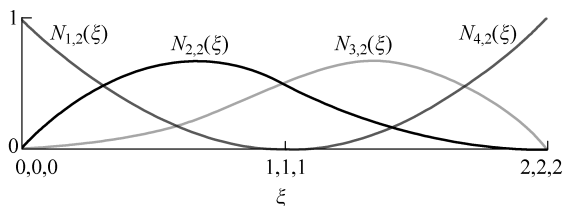


图 1-2 二阶 B 样条函数,节点向量为 $\mathbf{B} = [0,0,0,1,1,2,2,2]$

B 样条函数的导数可以根据递推关系式(1-1)及式(1-2)得到,则第 i 个 p 阶 B 样条函数的一阶导数为

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (1-7)$$

根据上式可以进一步推导得到第 k 阶导数:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left(\frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \right) \quad (1-8)$$

进一步化简,可以得到如下求导公式:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} N_{i+j,p-k}(\xi) \quad (1-9)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_{0,0} &= 1 \\ \alpha_{k,0} &= \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i} \\ \alpha_{k,j} &= \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1 \\ \alpha_{k,k} &= \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}} \end{aligned} \quad (1-10)$$

式(1-10)中,当节点为重复节点时,定义其系数为0。不难发现,B样条函数在节点 ξ_i 处具有 C^{p-m_i} 次连续性,其中 m_i 为节点 ξ_i 的重复度。以图1-2所示二阶B样条函数为例,在节点向量端点处,即 $\xi_i=0$ 以及 $\xi_i=2$,B样条函数具有 C^{-1} 连续性(即不连续),而在中间节点 $\xi_i=1$ 处,由于其重复度为1,因此B样条函数具有 C^1 连续性。随着B样条函数阶数的升高,当节点重复度保持不变时,B样条函数在该节点处的连续性将升高。

1.2.2 B样条几何

本小节首先介绍B样条曲线的构造方法,在此基础上介绍二维曲面以及三维实体的B样条构造方法。

1. B样条曲线

B样条曲线的构造是通过B样条函数与控制点坐标向量的线性组合得到的,控制点坐标向量与有限元中的节点坐标向量类似,但控制点通常不在几何上,这与有限元中的节点有所区别。B样条曲线的定义如下:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) P_n \quad (1-11)$$

其中 n 为控制点(B样条函数)数量, P_n 为控制点坐标向量,以二维空间为例, P_n 可表示为 $P_n=(x,y)$,其中 x,y 为点 P_n 的坐标。

图1-3为一B样条曲线及其B样条函数,B样条函数阶数为 $p=3$,节点向量为 $\Xi=[0,0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1,1]$,图中点 P_1, P_2, \dots, P_7 为控制点,可以看到在曲线两端点,由于节点向量的重复度关系,控制点正好落在曲线上,其余控制点均不在曲线上。

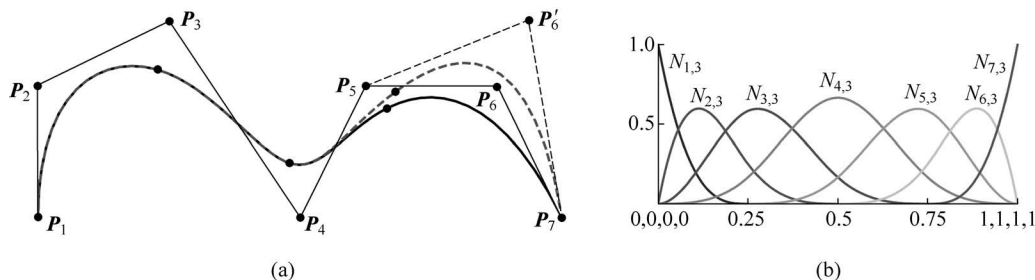


图1-3 B样条曲线及其B样条函数

(a) 几何及位移描述; (b) B样条基函数

图 1-3(a)中曲线上点为节点值在曲线上对应的坐标点,则节点区间 $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ 可以称为一个单元,其对应到 B 样条曲线上即为两个相邻蓝色点之间的曲线段。图 1-3(a)中直线段为曲线的控制多边形,其在曲线两端点处与曲线相切,控制多边形具有凸包的特性,即 B 样条曲线被完全包裹在控制多边形内。由于 B 样条函数具有局部支撑特性,因此当控制点 P_6 移动到 P'_6 时,B 样条曲线的改变只集中在局部区间 $[\xi_6, \xi_{10}] = [0.5, 1]$ 上。

2. B 样条曲面

B 样条曲面可通过两个方向的 B 样条函数张量积及其控制点集进行构造。给定控制点集 $P_{ij} (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m)$, 以及节点向量 $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$ 、 $H = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}]$, 其中 p, q 为两个方向的 B 样条函数阶数, n, m 为两个方向的 B 样条函数个数, 则 B 样条曲面可以表示为

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{ij, pq}(\xi, \eta) P_{ij} = \sum_{i=1}^n N_{i, p}(\xi) M_{j, q}(\eta) P_{ij} \quad (1-12)$$

其中, $N_{i, p}(\xi)$ 、 $M_{j, q}(\eta)$ 为一维 B 样条函数, 分别定义在节点向量 Ξ 和 H 上, $N_{ij, pq}(\xi, \eta)$ 为对应的二维 B 样条函数。与一维 B 样条函数类似, 二维 B 样条函数 $N_{ij, pq}(\xi, \eta)$ 也具有非负性以及单位分解特性, 即

$$N_{ij, pq}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i, p}(\xi) M_{j, q}(\eta) = \left(\sum_{i=1}^n N_{i, p}(\xi) \right) \left(\sum_{j=1}^m M_{j, q}(\eta) \right) = 1 \quad (1-13)$$

并且二维 B 样条函数的支撑区间为 $[\xi_i, \xi_{i+p+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+q+1}]$ 。

以一个三阶 B 样条曲面为例, 其节点向量分别为 $\Xi = H = [0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$, 阶数 $p = q = 3$, 控制点和所构造的 B 样条曲面如图 1-4 所示。同样, B 样条曲面也具有凸包特性, 即其控制多边形将 B 样条曲面包含在内。

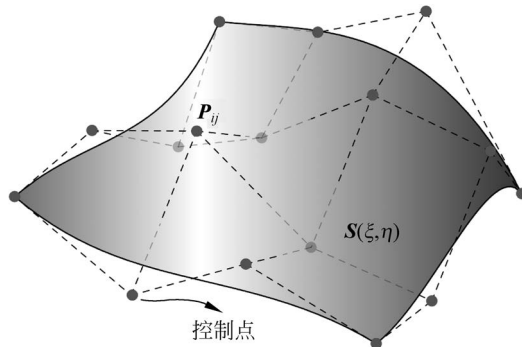


图 1-4 二维 B 样条曲面

3. B 样条实体

与 B 样条曲面类似, B 样条实体可通过三个方向的 B 样条函数的张量积以及控制点集进行构造。给定控制点集 $P_{ijk} (i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, l)$, 以及节点向量 $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$ 、 $H = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}]$ 、 $Z = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{l+r+1}]$, 其中 p, q, r 为三个方向的 B 样条函数阶数, n, m, l 为三个方向的 B 样条函数个数, 则 B 样条实体可以定义为

$$S(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{ijk, pqr}(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{P}_{ijk} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) \mathbf{P}_{ijk} \quad (1-14)$$

其中, $N_{i,p}(\xi)$ 、 $M_{j,q}(\eta)$ 、 $L_{k,r}(\zeta)$ 为一维 B 样条函数, 分别定义在节点向量 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 和 \mathbf{Z} 上, $N_{ijk, pqr}(\xi, \eta, \zeta)$ 为对应的三维 B 样条函数。三维 B 样条函数以及三维 B 样条实体与一维、二维 B 样条几何以及 B 样条函数具有类似的性质, 此处不再赘述。三维 B 样条实体实例如图 1-5 所示。

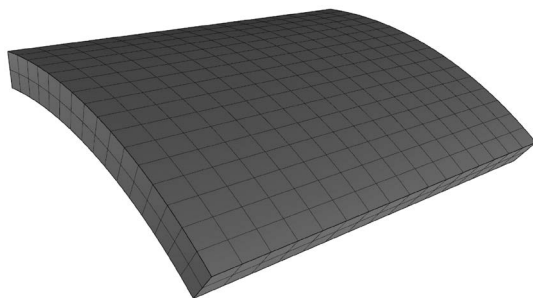


图 1-5 三维 B 样条实体

1.2.3 B 样条函数细化

B 样条几何有一个重要的性质, 即对 B 样条进行细化时, 其几何形状是保持不变的。与传统有限元方法类似, B 样条的细化方法包括节点插入细化 (h 型细化) 以及升阶细化 (p 型细化)。节点插入细化相当于增加单元数量, 而升阶细化相当于提升单元阶次。除了上述两种细化之外, B 样条函数还具有一种独特的 k 型细化方法, 即改变单元交界处的基函数的连续性, 这使得等几何分析相比有限元方法具有更丰富的细化空间。下面将分别介绍上述三种细化方法。

1. 节点插入 (knot insertion) —— h 型细化

节点插入细化即在原节点向量 $\mathbf{E} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}]$ 中插入一个或多个节点值, 形成新的节点向量 $\bar{\mathbf{E}} = [\bar{\xi}_1 = \xi_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_{n+m+p+1} = \xi_{n+p+1}]$ 的细化方法, 其中 $\mathbf{E} \subset \bar{\mathbf{E}}$ 。根据新的节点向量, 采用递推公式 (1-1)、式 (1-2) 即可得到新的 $n+m$ 个 B 样条函数, 而新的 B 样条曲线的控制点 $\bar{\mathbf{P}}_i$ ($i=1, 2, \dots, n+m$) 可由原来的 B 样条曲线控制点 \mathbf{P}_j ($j=1, 2, \dots, n$) 的线性组合计算得到, 其计算公式为

$$\bar{\mathbf{P}}_i = \mathbf{T}^p \mathbf{P}_j \quad (1-15)$$

其中, \mathbf{T}^p 为转换矩阵, 其元素的构造方法如下:

$$T_{ij}^0 = \begin{cases} 1, & \bar{\xi}_i \in [\xi_j, \xi_{j+1}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1-16)$$

$$T_{ij}^{q+1} = \frac{\bar{\xi}_{i+q} - \xi_j}{\bar{\xi}_{j+q} - \xi_j} T_{ij}^q + \frac{\xi_{j+q+1} - \bar{\xi}_{i+q}}{\xi_{j+q+1} - \bar{\xi}_{j+1}} T_{ij+1}^q, \quad q=0, 1, 2, \dots, p-1 \quad (1-17)$$

图 1-6 为节点插入细化示意图,原节点向量为 $\xi = [0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1]$, B 样条函数阶数为 $p = 3$, 其对应的控制点及曲线如图 1-6(a) 所示, B 样条函数如图 1-6(d) 所示。当插入节点 $\xi_i = 0.25, 0.75$ 后, 得到新的 B 样条函数(图 1-6(e))以及对应的控制点(图 1-6(b)), 此时 B 样条函数在节点 $\xi_i = 0.25$ 以及 $\xi_i = 0.75$ 处具有 $C^{p-1} = C^2$ 次连续。重复插入上述两个节点两次, 此时在节点 $\xi_i = 0.25$ 以及 $\xi_i = 0.75$ 处, 节点重复度均为 3 次, 因此 B 样条函数在插入节点处具有 C^0 连续, 如图 1-6(f) 所示。观察图 1-6(c) 可知, 在插入节点处, 由于 B 样条函数具有 C^0 连续, 因此控制点将落在曲线上(即在该点处具有插值特性), 此时每个单元(比如节点区间 $[0, 0.25]$) 上的 B 样条函数称为贝塞尔(Bezier)函数, 其对应的曲线段称为贝塞尔曲线。

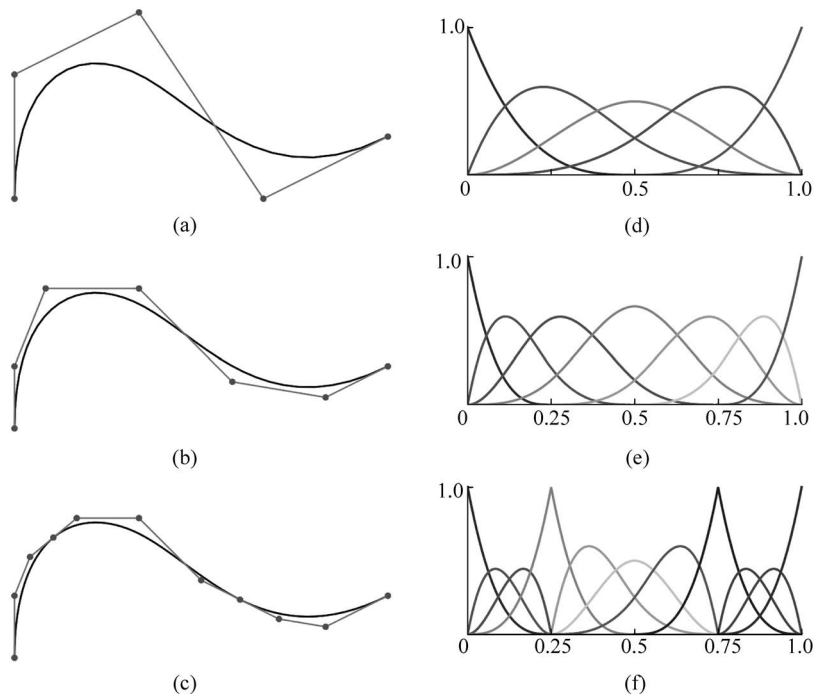


图 1-6 节点插入细化

(a) 初始样条曲线及其控制多边形; (b)~(c) 细化后的样条曲线以及控制多边形; (d) 初始 B 样条函数 $\xi = [0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1]$; (e)~(f) 细化后的 B 样条函数, 节点向量分别为 $\xi = [0, 0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1, 1]$ 以及 $\xi = [0, 0, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5, 0.75, 0.75, 0.75, 1, 1, 1, 1]$

从上述细化过程可知, 节点插入细化与有限元中的 h 型细化有相似之处, 即对已有单元进行剖分, 形成更多单元。除此之外, 节点插入细化还可以改变单元交界处的连续性, 而有限元方法在 h 型细化过程中, 单元交界处为 C^0 连续。

2. 升阶(order elevation)—— p 型细化

除了节点插入型细化, B 样条函数也可以通过提升函数的阶数进行细化, 通常在进行升阶细化时, 单元交界处的连续性是保持不变的, 这主要是为了保证原有几何模型的几何连续性。下面以图 1-7 所示为例, 详细描述升阶细化过程。

初始 B 样条曲线以及 B 样条函数如图 1-7(a)、(c) 所示, B 样条函数阶数为 $p = 2$, 节点

向量为 $\Xi = [0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$, 在内部节点 $\xi_4 = 0.5$ 处, 连续性为 C^1 连续。升阶细化首先需要将内部节点 $\xi_4 = 0.5$ 的重复度提升为 2 次, 则在单元交界处 B 样条函数均为 C^0 连续, 即每个单元均为贝塞尔单元。其次对每个贝塞尔单元进行升阶, 比如从 $p = 2$ 阶升高为 $p = 3$ 阶, 升阶后节点 $\xi_4 = 0.5$ 的重复度变为 3 次, 单元交界处的连续性仍为 C^0 连续, 因此, 最后需要删除第一步中插入的节点 $\xi_4 = 0.5$ 一次, 使得在内部节点 $\xi_4 = 0.5$ 处的连续性与初始几何保持一致, 此时, 两个贝塞尔曲线将合并为一个经过升阶细化后的 B 样条曲线, 如图 1-7(b) 所示。

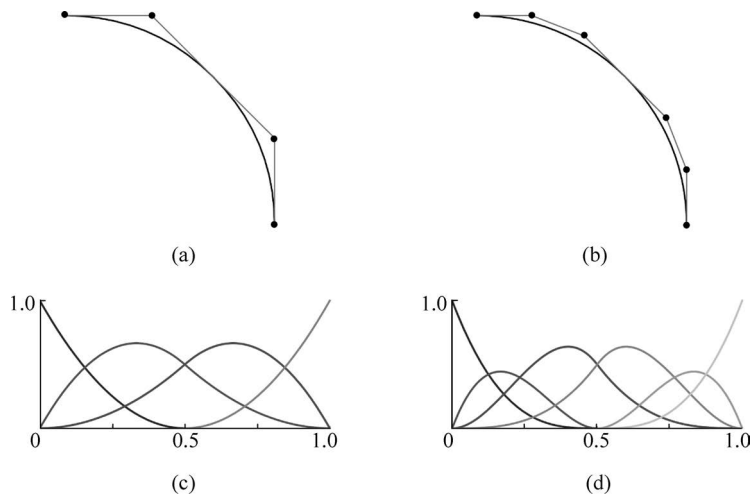


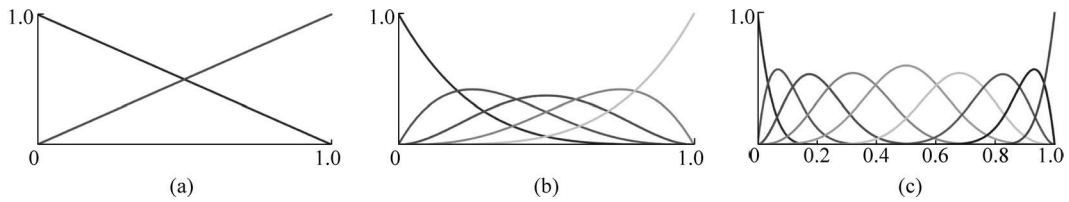
图 1-7 升阶细化

(a) 初始 B 样条曲线以及控制多边形; (b) 升阶后的 B 样条曲线以及控制多边形; (c) 初始 B 样条函数 $\Xi = [0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$; (d) 升阶后的 B 样条函数 $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0.5, 0.5, 1, 1, 1, 1]$

上述升阶细化与有限元中的 p 型细化有许多相似之处, 即提升基函数的阶数。两者不同之处在于, p 型细化过程中, 单元交界处的连续性始终为 C^0 连续, 而升阶细化可以保持原始 B 样条函数在单元交界处的连续性, 其可以是 C^0 到 C^{p-1} 之间的任意值。基于这一特点, 可以引出等几何分析特有的 k 型细化。

3. k 型细化——高阶以及高连续性

基于上述 B 样条的节点插入以及升阶这两种细化方法, 可以衍生出一种特有的 k 型细化方法, 其能够保持单元间的高阶连续性。 k 型细化方法的基本步骤可由图 1-8 得到。以线性 B 样条函数为初始状态, 节点向量为 $\Xi = [0, 0, 1, 1]$, 单元个数为 1, B 样条函数个数为 2。首先, 对其进行升阶, 得到阶数为 $p = 4$ 的 B 样条函数, 其节点向量为 $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]$, B 样条函数个数为 5, 即阶数每升高一次, B 样条函数个数增加一个。其次, 插入节点 $\xi_i = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 各一次, 得到新的节点向量为 $\Xi = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1, 1, 1, 1]$, 此时, B 样条函数的个数为 9, 即每插入一个节点, B 样条函数个数增加 1, B 样条函数在新插入的节点处的连续性为 $C^{p-1} = C^3$ 次。值得注意的是, 插入节点处的连续性可以根据需要进行调整。相比有限元中的 h 型细化以及 p 型细化, k 型细化一方面可以保持单元间的高连续性, 另一方面在细化过程中所产生的新的 B 样条函数个数也较 h 型细化以及 p 型细化少, 这主要得益于单元间的高连续性。

图 1-8 k 型细化

- (a) 初始线性 B 样条函数, $p=1, \mathbf{E}=[0,0,1,1]$; (b) 升阶后的 B 样条函数, $p=4, \mathbf{E}=[0,0,0,0,0,1,1,1,1,1]$;
(c) 插入节点后的 B 样条函数, $p=4, \mathbf{E}=[0,0,0,0,0,0,0.2,0.4,0.6,0.8,1,1,1,1,1]$

当然,实际情况中,初始几何模型通常比图 1-8(a)所示的线性、单个单元要复杂,并且存在几何连续性的约束限制,比如在某些部位存在 C^0 连续的几何特征等,从而在进行 k 型细化时,需要保留该特殊部位的几何连续性,因此并不能在全域使用 k 型细化。

1.2.4 非均匀有理 B 样条

非均匀有理 B 样条(NURBS)是 B 样条的一种推广形式,其可以精确描述更为复杂的模型,比如圆锥曲线、曲面等,而这些几何形状是无法通过 B 样条函数进行描述的。非均匀有理 B 样条的构造可以从几何以及代数两个方面介绍。

从几何的角度出发, \mathbb{R}^d 空间中的 NURBS 几何对象可通过将 \mathbb{R}^{d+1} 空间中的 B 样条几何对象经过投影变换得到。如图 1-9 所示,黑色曲线 $\mathbf{C}^w(\xi)$ 为 \mathbb{R}^3 空间中的 B 样条曲线,其中竖轴 w 表示控制点 \mathbf{P}_i^w 的权重,控制点 \mathbf{P}_i^w 坐标可以写为

$$\mathbf{P}_i^w = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_i^w \\ w_i \end{pmatrix} \quad (1-18)$$

则, B 样条曲线 $\mathbf{C}^w(\xi)$ 可以表示为

$$\mathbf{C}^w(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i^w \quad (1-19)$$

将 B 样条曲线 $\mathbf{C}^w(\xi)$ 向 $z=1$ 平面投影,首先将控制点 \mathbf{P}_i^w 进行投影,如图 1-9 所示,采用过控制点以及坐标原点的射线与 $z=1$ 平面的交点 \mathbf{P}_i 作为 $z=1$ 平面上的 NURBS 样条曲线控制点,则 \mathbf{P}_i 可以表示为

$$\mathbf{P}_i = [\mathbf{P}_i]_j = \frac{[\mathbf{P}_i^w]_j}{w_i} \quad (1-20)$$

其中,下标 $j=1,2,\dots,d$ 表示前 d 个坐标分量。

B 样条曲线上每一点向平面进行投影时,均需要用该点的坐标除以其权重,而 B 样条曲线上任意一点处的权重可表示为

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i \quad (1-21)$$

因此, \mathbb{R}^2 空间中的 NURBS 曲线可表示为

$$\mathbf{C}(\xi) = \frac{[\mathbf{C}^w(\xi)]_j}{W(\xi)} = \sum_{i=1}^n \frac{N_{i,p}(\xi)}{W(\xi)} [\mathbf{P}_i^w]_j = \sum_{i=1}^n \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{W(\xi)} \mathbf{P}_i \quad (1-22)$$