

第 1 章 绪论

裂纹是固体材料中普遍存在的缺陷现象,如图 1.1 所示.从材料学的角度来看,裂纹指的是固体中连续大片的、取向相近的化学键永久性断裂;而从连续介质力学的视角来看,裂纹则定义为参考构型中的一个曲面,在此曲面两侧位移场不连续.这一曲面既可以完全位于固体的内部,也可以与固体的外表面相交.

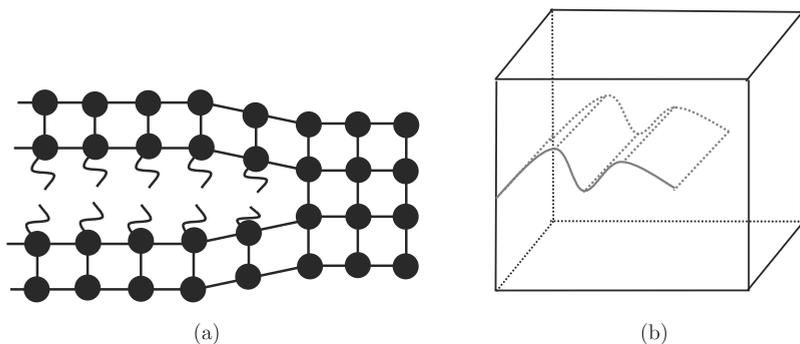


图 1.1 裂纹的两种不同视角

(a) 材料学视角下的裂纹; (b) 连续介质力学视角下的裂纹

理解和预测材料的断裂和失效是工程设计中的关键任务.断裂力学研究裂纹的扩展、愈合、相互作用及其与其他缺陷的关联,被列为 20 世纪十大力学进展之一^[1].这一学科可以追溯到 1921 年,英国学者格里菲斯(A. A. Griffith)提出了著名的断裂理论^[2].格里菲斯认为,裂纹扩展的必要条件是其扩展单位面积所能释放的弹性能大于或等于裂纹扩展同样面积所需要的能量.随后 Inglis^[3]和 Irwin^[4]等学者也作出了重要的贡献.特别是在第二次世界大战期间,“自由”轮断裂沉没事件进一步推动了断裂力学的蓬勃发展.

断裂力学不仅在理论研究中具有重要地位,在实际工程中也有广泛应用,如图 1.2 所示.其中图 1.2(a)展示了手机弹片在使用过程中(例如手机振动)受到疲劳加载,容易导致疲劳断裂的现象.图 1.2(b)展示了冲击加载下 C/SiC 复合材料发

生纤维断裂、拔出及剪切断裂的断口形貌^[5]。图 1.2(c) 展示了航空发动机中的涡轮盘缘在服役过程中, 由于热、离心力以及氧气的共同作用, 易发生疲劳断裂。图 1.2(d) 展示了铁素体球墨铸铁在强冲击下断裂裂口处的扫描电镜 (SEM) 图^[6]。图 1.2(e) 展示了锂离子电池中正极磷酸铁锂颗粒断裂的 SEM 图^[7]。锂离子电池循环充放电过程中, 锂离子不断嵌入和脱出电极颗粒, 导致颗粒体积不断膨胀或收缩, 进而产生疲劳断裂, 影响电池的容量。

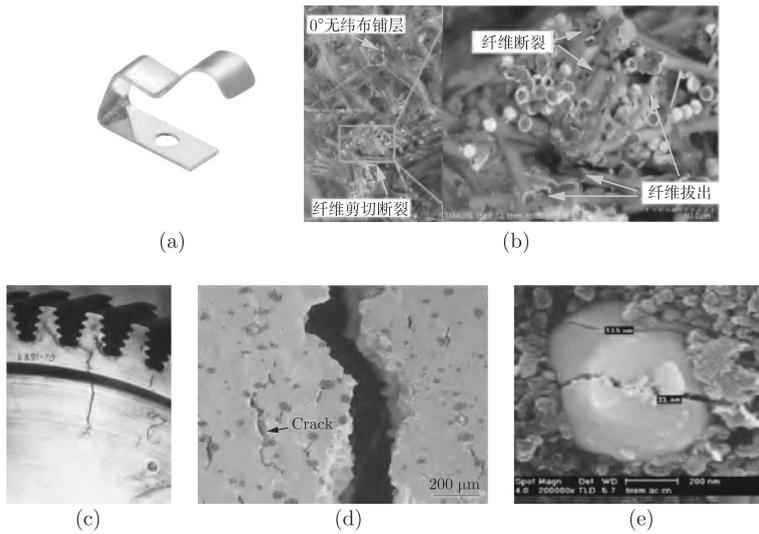


图 1.2 断裂现象具有普遍性

(a) 手机弹片疲劳; (b) 复合材料断裂^[5]; (c) 涡轮盘缘疲劳裂纹; (d) 冲击断裂^[6]; (e) 锂离子电池颗粒断裂^[7]

计算断裂力学的任务是通过计算机程序分析含裂纹固体的受力情况, 并预测裂纹的进一步发展 (如扩展、分叉、愈合等), 进而优化相关的设计. 计算断裂力学的方法可大致分为显式裂纹法和弥散裂纹法. 显式裂纹法将裂纹表示为空间中的曲面, 在此曲面两侧位移场不需要连续, 通常在裂纹张开时施加自由边界条件, 在裂纹闭合时施加自接触单侧约束条件. 因此, 显式裂纹法通常需要不断调整传统有限元法中的网格, 或通过引入如扩展有限元增强形函数的方式来考虑裂纹对固体运动方式的制约. 此外, 显式裂纹法还需要额外输入准则来预测裂纹的萌生和分叉等拓扑改变的行为.

与此相对, 弥散裂纹法通过一个 (或多个) 弥散的标量 (或矢量、张量) 场来描述裂纹的几何. 变分断裂相场法, 或简称断裂相场法, 是弥散裂纹法的一种. 其发展源头有两支: 一支来自物理学和材料学界, 以 Alain Karma 为代表, 其主要思想是将金兹堡-朗道 (Ginzburg-Landau) 理论应用到断裂问题中, 见文献 [8]; 另一支

来自数学和力学界, 以 Blaise Bourdin 为代表, 其起源是变断裂理论. 本书以后一支理论为准, 因此并不把断裂相场法处理为材料相场法的特例.

变断裂理论实际上是格里菲斯断裂理论的变分格式, 由法国巴黎北索邦大学 Francfort 和 Marigo^[9] 提出. 为了方便数值实现, Bourdin 等^[10] 对此变分理论进行了正则化, 即通过一个弥散在有限宽度 ℓ 上的带形区域来代表裂纹面, 并证明在一定条件下, 正则化后的理论当 $\ell \rightarrow 0$ 时 Γ 收敛于变断裂理论^[9]. Γ 收敛也意味着裂纹路径、位移场以及相应固体应变能和裂纹表面能的收敛. 具体来说, 正则化的变分理论引入了一个介于 0 和 1 的标量场来表示材料状态, 此标量场取极端值时代表材料的完好无损或完全断裂, 这一标量场后来被学界广泛称为相场. 相场的取值方式有两种常见约定, 本书采纳与损伤理论一致的约定, 即 $d = 0$ 代表材料完好无损, $d = 1$ 代表材料完全断裂, 如图 1.3 所示. 注意, 此取值方式与文献^[10] 相反.

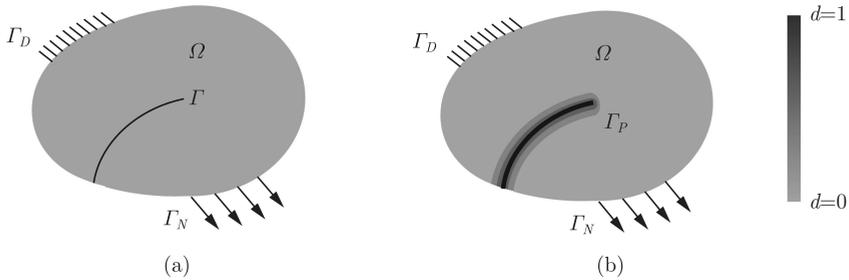


图 1.3 显式裂纹与弥散裂纹的对比
(a) 带显式裂纹 Γ 的区域; (b) 正则化的裂纹面由相场 d 表示, $0 \leq d \leq 1$

巴黎北索邦大学学者的后续工作包括 Bourdin 等的将近 150 页的“大部头”^[11], 其详述了变断裂理论的开创性研究, 介绍了相关的变分原理基础, 比较了局部最小值与全局最小值两种问题的提法, 探讨了裂纹起裂、不可逆条件、裂纹路径、格里菲斯和巴伦布拉特 (Barenblatt) 两种类型的裂纹能、数值实现和疲劳等问题. 针对裂纹受拉伸和压缩下的不对称响应行为, Amor 等^[12] 基于应变张量的球量-偏量分解提出了拉压不对称的损伤本构模型. Pham 等^[13] 针对一类通用的损伤模型构建了准静态演化格式, 并引入基于损伤不可逆性单边约束下总能量二阶导数为正的稳定性准则, 并将这些概念应用于一维拉伸试验, 借此得到均匀加载下和局部损伤下的封闭解形式, 同时阐释了稳定性丧失、尺度效应、损伤局域化和结构失效等概念. 考虑多个特定本构模型, 应力-位移曲线、稳定性图和能量耗散能够为极限应力和内部长度参量等相关材料参数提供标定标准.

值得注意的是, 在以上工作中, 相关模型仍称为损伤模型, 而正则化的变分断

裂理论或损伤模型后来称为**断裂相场法**。由于用该方法模拟裂纹扩展时无需显式追踪裂纹几何,也无需额外的断裂准则,能够模拟裂纹的萌生、扩展、分叉和合并等复杂行为,因此受到其他课题组的关注。

德国斯图加特大学 Miehe 等^[14]针对准静态裂纹扩展问题提出了一种热力学一致的断裂相场框架,构建了两种描述固体中耗散性裂纹扩展的多场格式:一种格式是位移场与相场两场格式;另一种格式是三场格式,包括位移场、相场和与相场对偶的驱动力场。两个模型都基于经典格里菲斯准则描述固体中的准静态裂纹扩展,并将多场模型嵌入梯度型增量变分框架,在此基础上实现了有限元求解。此外,基于应变张量谱分解的拉压不对称断裂相场本构模型,同类的模型中此模型和文献 [12] 中的模型至今仍然是最广泛使用的。Miehe 等^[15]引入了应变历史源项来构建相场演化的平衡方程,这使得两场问题可以用简单可靠的交错算法求解。理论方面,为裂纹相场模型构建了率无关的增量变分格式,使得相场的演化由局部历史场驱动。历史场为变形历史中的最大应变能,可用于衡量历史最大拉应变,由该变量驱动裂纹相场的演化。在数值方面,开发了用于相场和位移场增量更新的算符分裂算法,通过近似当前历史场实现耦合方程的解耦,在典型时间步内使用交错方案求解两个用于相场和位移场更新的线性问题。

德国布伦瑞克工业大学 Ambati 等^[16]综述了截至当时(2015年)的断裂相场模型发展历史,回顾了各主要模型的格式,并提出了一种混合格式,保证应力-应变关系一阶连续,仅在相场驱动力中(而不在应力计算中)通过谱分解考虑拉压不对称性,显著降低了计算量。Ambati 等^[17]提出了一种针对弹塑性固体的韧性断裂相场模型。该模型引入了应用于弹性能量拉伸部分的退化函数与塑性应变状态之间的耦合关系。这种耦合在准确预测韧性断裂的一些现象方面起着关键作用,同时也符合热力学一致性。

德国魏玛包豪斯大学 Rabczuk 及合作者也做出了多项工作。例如 Zhou 等^[18]针对类岩石材料脆性压剪断裂问题提出了一种相场模型,在相场演化方程中引入了一个新的驱动力项用于模拟类岩石材料的脆性压剪断裂。该混合格式相场模型的相场驱动力建立在应变谱分解中负应变的部分,并考虑了内聚力和内摩擦角的影响。Goswami 等^[19]提出了一种用于研究脆性材料中裂纹扩展的物理信息神经网络(physics-informed neural networks, PINN)算法。该算法通过最小化系统能量来研究裂缝生长和扩展,并通过修改神经网络使边界条件得以严格满足。此外,此算法引入“迁移学习”(transfer learning)概念,从第二步开始仅重新训练与最后一层相关的权重和偏差,其余层保持固定,从而显著加速训练阶段。同时,由于神经网络优化算法鲁棒性增强,可施加更大的载荷增量步来获取裂纹路径,从而提

高计算效率.

英国牛津大学 Martínez-Pañeda 与多国合作者研究了涉及断裂相场的多种多场耦合问题. 例如 Cui 等^[20]提出了一种相场模型以模拟点蚀和应力腐蚀开裂, 考虑了膜破裂、溶解和再钝化过程在界面动力学及局部膜破裂等方面对腐蚀现象的影响. Ai 等^[21]提出了一种多物理场相场模型, 用于研究电极颗粒中的疲劳裂纹扩展. 借助该模型, 可更深入地理解充放电倍率 (C-rate)、颗粒尺寸和裂纹几何形状对疲劳裂纹的影响, 以及这些因素如何导致电池性能退化. Baktheer 等^[22]提出了一个用于模拟准脆性材料中疲劳裂纹扩展的相场模型, 其中专门针对混凝土循环和疲劳裂纹扩展的模拟扩展了相场内聚区模型.

美国得克萨斯大学 Borden 等^[23]将断裂相场模型推广到动态问题, 具体是通过构建包含位移场和相场的拉格朗日量来实现, 由此得到运动方程的空间离散通过伽辽金方法实现. 该研究使用非均匀有理 B 样条 (non-uniform rational B-splines, NURBS) 和 T 样条基函数来对弱形式的函数空间进行离散, 并引入自适应局部网格细化策略. 时间离散方面, 介绍了整体法和交错法时间积分方案, 其中后者分别通过动量方程求解位移、通过相场方程求解相场, 在求解策略上更灵活, 允许动量方程采用隐式或显式求解. 他们实现了对三维动态断裂问题的高效求解.

我国华南理工大学 Wu^[24]在热力学框架内针对损伤力学与准脆性断裂提出了一种统一的断裂相场理论. 该理论以纯几何方式正则化显式裂纹拓扑, 定义能量耗散泛函以及相场本构方程等模拟准脆性断裂, 并使经典的脆性断裂相场理论成为该理论的一种特殊情形. 该理论的一个重要特征是, 当正则化长度参量趋向于零时, 该理论收敛于一种内聚力模型. Wu 和 Nguyen^[25]提出了一种对长度尺度不敏感的相场损伤模型, 并将其应用于脆性断裂研究. 该模型的优势在于能统一处理脆性断裂和准脆性失效问题, 同时规避其他相场模型和基于内聚区模型的非连续方法的缺陷.

学界也已经有大量对断裂相场进行的总结工作, 相关的综述文章如文献 [26]~[32], 还有针对断裂相场在铁电体断裂^[33]、复合层压板断裂^[34]、水力压裂^[35]等应用的综述, 以及与扩展有限元和混合格式有限元^[36]、近场动力学^[37]的对比综述. 而相关专著有德国汉诺威大学 Wick^[38]和大连理工大学胡小飞等^[39]的工作.

本书立足于笔者逾十年的工作, 阐述断裂相场法的理论模型、算法实现和部分应用.

第 1 章为绪论.

第 2 章介绍断裂力学以及计算断裂力学中的基础知识和常见概念。

第 3 章介绍断裂相场法的基础知识. 出发点为 Francfort 和 Marigo 提出的变分断裂理论, 即从全局能量最小化的角度建立针对脆性材料准静态断裂的数学模型. 之后介绍此变分理论的正则化, 即通过引入正则化长度参数, 构造方便数值模拟的泛函, 此正则化模型即断裂相场法. 接着介绍与断裂相场法相关的其他知识, 如常见的面密度函数及退化函数、正则化长度参量、常见的拉压不对称模型、动态问题、历史变量法以及各种能量之间的转化关系, 并汇总断裂相场法的优缺点. 最后介绍其与损伤模型的异同.

第 4 章给出断裂相场模型的数值离散和求解. 首先介绍准静态及动态纯弹性模型 (即不含相场) 的离散形式及迭代格式. 在此基础上, 结合第 3 章中的弱形式, 给出准静态及动态相场模型的全隐式、半显半隐式 (位移显式, 相场隐式)、全显式离散形式和数值求解框架, 并阐述相应的编程实现步骤和细节.

接下来的三章分别从算法、动态断裂和复合材料分析等方面介绍笔者课题组在断裂相场法方面的工作. 第 5 章介绍对断裂相场算法的探索, 包括用于预测裂纹萌生的“平行宇宙算法”, 用于加速求解过程的区域分解方法、网格自适应方法以及非同步变分积分方法, 以及使用图形处理单元 (graphics processing unit, GPU) 进行加速的方法. 此外, 还介绍一项以拟设 (ansatz) 参数为主变量的工作, 即梁断裂的建模求解. 最后, 介绍有了相场解以后如何识别出裂纹路径的方法.

第 6 章聚焦动态问题, 包括激光冲击强化和高速冲击问题的建模、疲劳模拟的加速算法以及 CO_2 压裂过程的建模.

第 7 章关注复合材料的失效分析, 例如针对多种失效机制的耦合框架, 结合细观力学的损伤固体本构模型以及基于渐近均匀化的等效断裂韧性模型, 以及针对代表体积元 (representative volume element, RVE) 的流形学习加速方法.

附录通过最基础的例子介绍 Γ 收敛以及应用其分析断裂相场模型的实例.

第 2 章 断裂力学基础

断裂力学是从力学视角, 全面探究裂纹相关现象的学科, 研究范畴涵盖裂纹的萌生、扩展、愈合, 裂纹间的相互作用, 以及裂纹与其他缺陷的相互影响. 本章内容安排如下: 首先, 简要介绍连续介质力学框架下的变形与应力、平衡条件、最小势能原理、虚功原理, 以及分析力学中的弹性动力学等基础知识; 接着, 讲解现代断裂力学的奠基理论——格里菲斯断裂理论; 随后, 介绍裂尖塑性与韧性断裂的相关内容; 最后, 对当前计算断裂力学的方法进行概述, 主要包括显式裂纹类和弥散裂纹类这两类计算方法.

2.1 连续介质力学基础

连续介质力学基于一个基本假设, 即固体是连续的, 并且固体在变形前后的状态都能表示为三维实数空间 \mathbb{R}^3 中的子集.

变形 固体的变形通常通过在其参考构型 (除非另有特殊说明, 一般为未变形构型) 与当前构型中建立映射关系来描述. 参考构型中点的坐标通常用大写字母 \mathbf{X} 或其笛卡儿坐标分量 X, Y, Z 或 X_1, X_2, X_3 来表示, 而当前构型中点的坐标通常用小写字母 \mathbf{x} 或笛卡儿坐标分量 x, y, z 或 x_1, x_2, x_3 来表示.

设三维空间 \mathbb{R}^3 的子集 \mathcal{B}_0 为某固体的参考构型, 映射 φ 给出该固体变形后各点与变形前各点的对应关系. 具体而言, 若 $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$ 代表未变形构型中的某个点, 则记 $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X})$ 为其变形后的位置向量. 映射 φ 的全体像的集合记为 \mathcal{B} , 即 $\mathcal{B} = \varphi(\mathcal{B}_0) = \{\varphi(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in \mathcal{B}_0\}$.

映射 φ 的逆映射记为 φ^{-1} . 在典型情况下, 当映射 φ 满足一一对应关系时, $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X})$ 意味着 $\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x})$. 更一般地, $\varphi^{-1}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0 : \varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{x}\}$.

位移场 \mathbf{u} 为定义在 \mathcal{B}_0 上的向量场, 即 $\mathbf{u} : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$, 定义为 $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{X}$, 其分量记为 u_x, u_y, u_z 或 u_1, u_2, u_3 .

变形梯度 $\mathbf{F} : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 定义为 φ 的梯度, 即

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}).$$

在笛卡儿坐标系下, $F_{iK}(\mathbf{X}) = \varphi_{i,K}(\mathbf{X}) = \partial \varphi_i / \partial X_K(\mathbf{X})$, 其中下标中的逗号表示求导.

定义右柯西-格林应变张量 $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$. 用指标式记号为 $C_{IL} = F_{kI} F_{kL}$, 其中使用了爱因斯坦求和约定: 当某指标在同一项中重复出现两次时, 代表对该指标从 1 到 3 求和.

定义左柯西-格林应变张量 $\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$. 用指标式记号为 $b_{ij} = F_{iK} F_{jK}$.

应力 定义柯西应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 为作用在单位已变形面积上的力. 由于面积的法向量 \mathbf{n} 及力向量本身均为向量, $\boldsymbol{\sigma}$ 为二阶张量, $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dA$ 给出作用于以 \mathbf{n} 为单位法向量的已变形面积元 dA 上的力.

定义第一皮奥拉-基尔霍夫 (Piola-Kirchhoff) 应力张量 \mathbf{P} 为作用在单位未变形面积上的力. 由于面积的法向量 \mathbf{N} 及力向量本身均为向量, \mathbf{P} 为二阶张量, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \, dA_0$ 给出作用于以 \mathbf{N} 为单位法向量的未变形面积元 dA_0 上的力. \mathbf{P} 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 的关系为

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad P_{iK} = J \sigma_{ij} F_{Kj}^{-1},$$

其中, J 为 \mathbf{F} 的行列式, 即 $J = \det \mathbf{F}$. 反之,

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{P}^T, \quad \sigma_{ij} = J^{-1} P_{iK} F_{jK}.$$

定义第二皮奥拉-基尔霍夫应力张量 \mathbf{S} 为 $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}$, $S_{IK} = F_{Ij}^{-1} P_{jK}$. 因此

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad \boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T.$$

定义基尔霍夫应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 为 $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$.

本构关系 狭义的本构关系为应力 (或其对时间的导数) 与变形 (或其对时间的导数) 的定量关系. 由于物理规律必须与观察者所处的坐标系无关, 本构关系需要满足“客观性”, 简单来说, 本构关系中出现的物理量需要是客观的, 即其遵循一定的规则进行坐标变换.

容易验证, 应变、应变率及应力均为客观量, 而应力率 (无论是其空间导数 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 还是物质导数 $D\boldsymbol{\sigma}/Dt$) 取决于观察者, 在本构关系中不能出现, 而需改用客观的量.

常见的选择为乔曼 (Jaumann) 应力率. 令 $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ 为速度关于当前坐标的梯度场, $\mathbf{D} = (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)/2$ 为应变率张量, $\mathbf{W} = (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)/2$ 为自旋张量, 则乔曼应力率定义为

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma}.$$

本构关系可写成 $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ 与 \mathbf{D} 的关系.

平衡方程 连续介质力学问题通过三方面的控制方程来描述, 即变形协调、平衡方程及本构方程. 用位移作为主变量时, 变形协调方程自然满足. 完好固体的本构方程前文已提及, 损伤固体的本构方程取决于其当前的破坏状态, 后文将专门阐述. 这里专注于平衡方程.

在拉格朗日坐标下, 动量平衡方程表达式为

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{B} = \rho_0 \mathbf{A}, \quad P_{i,j,j} + \rho_0 B_i = \rho_0 A_i,$$

其中, $\nabla_{\mathbf{X}} \cdot$ 为定义在参考构型下的散度, 有时记为 DIV; ρ_0 为未变形固体的密度; \mathbf{B} 为作用于单位质量下的体积力; \mathbf{A} 为加速度.

在欧拉坐标下, 相应的动量平衡方程为

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a}, \quad \sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho a_i, \quad (2.1)$$

其中, $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot$ 为定义在当前构型下的散度, 有时记为 div; ρ 为已变形固体的密度; \mathbf{b} 为作用于单位质量下的体积力; \mathbf{a} 为加速度.

小变形 在小变形假设下, 不再区分拉格朗日坐标 \mathbf{X} 与欧拉坐标 \mathbf{x} . 应变张量采用 $\boldsymbol{\varepsilon}$, 定义为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.2)$$

同样, 不再区分各应力张量, 通常记为 $\boldsymbol{\sigma}$, 平衡方程 (2.1) 仍然适用.

当材料为线弹性时, 本构方程为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.3)$$

其中, 四阶弹性张量 \mathbb{C} 在材料为各向同性时表达式为

$$\mathbb{C} = \lambda I \otimes I + 2\mu \mathbb{I}, \quad (2.4)$$

式中, λ 和 μ 为拉梅常数, 其中 μ 为剪切模量, 材料稳定性要求 $\mu > 0, \lambda + 2\mu > 0$; 符号 \otimes 表示外积; I 为二阶单位张量, 其 ij 分量即克罗内克 (Kronecker) δ 记号

δ_{ij} , 即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & \text{其他情况.} \end{cases}$$

张量 \mathbb{I} 为关于对称二阶张量的四阶单位张量, 其指标记号表达式为

$$\mathbb{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

因此 \mathbb{C} 的指标记号为

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (2.5)$$

对应的本构关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})\mathbb{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}. \quad (2.6)$$

材料的应变能密度为

$$\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\mathbb{C}_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}. \quad (2.7)$$

这里下标 0 表示未破坏固体, 引入此下标是为了在后文中与已破坏固体做区分. 容易验证

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial\psi_0}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial\psi_0}{\partial\varepsilon_{ij}}. \quad (2.8)$$

从后文可以看到, 本构方程写成方程 (2.8) 的形式比方程 (2.3) 更具有普适性.

因此, 在小变形下固体的弹性控制方程为平衡方程 (2.1)、本构方程 (2.8) 以及变形协调方程 (2.2).

记 n_{sd} 维固体 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\text{sd}}}$, $n_{\text{sd}} = 1, 2, 3$, 在其边界 $\partial\Omega$ 上施加边界条件的典型方式为

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}, \quad \text{在 } \partial_U\Omega \text{ 上}, \quad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}, \quad \text{在 } \partial_T\Omega \text{ 上}, \quad (2.10)$$

其中, $\partial_U\Omega$ 和 $\partial_T\Omega$ 为 $\partial\Omega$ 的子集, 且 $\partial_U\Omega \cap \partial_T\Omega = \emptyset$, $\partial_U\Omega \cup \partial_T\Omega = \partial\Omega$; \mathbf{n} 为关于 Ω 的单位外法向量.

容许位移场 在变分原理的框架下, 通常定义容许位移场为满足一定光滑条件且满足位移边界条件方程 (2.9) 的位移场的集合. 如定义