

信号在采集和传输过程中往往会掺杂着噪声和干扰。信号处理的主要任务之一就是信号中滤除噪声和干扰,从而提取有用信息。这一处理过程称为滤波。完成滤波功能的系统称为滤波器。人们对滤波器的研究就是在某种最优准则下如何设计最优滤波器的问题。设计最优滤波器时,需要对信号和噪声的统计特性有一定了解,否则就无法从观测数据对有用信号进行最佳估计。所谓“最优”是以一定标准或准则来衡量的。常用的最优准则有:最大后验准则、最大似然准则、最小均方误差准则等。维纳滤波器和卡尔曼滤波器,是最佳滤波理论中的特殊分支,按照线性均方准则来衡量是最优的,这类滤波被称为线性最小均方误差滤波(Linear Minimum Mean-Square Error Filtering)更为贴切,就是名字有些长。自适应滤波是研究一类结构和参数可以改变或调整的系统。这种系统能够通过和外界环境的接触来改善自身的信号处理性能,称为自适应系统。这类系统可以自动适应信号传送变化的环境和要求,无须知道信号的结构和先验知识,亦无须精确设计信号处理系统的结构和参数。本章主要研究最优滤波理论的维纳和卡尔曼滤波器以及应用广泛的自适应滤波器的设计问题。

3.1 维纳滤波器

3.1.1 维纳滤波器概述

维纳发表的《控制论》和《平稳时间序列的外推、内插和平滑问题》,建立了维纳滤波理论。维纳滤波器的求解,要求知道随机信号的统计分布规律(自相关函数或功率谱密度),得到的结果是封闭公式。采用谱分解的方法求解,简单易行,具有一定的工程实用价值,并且物理概念清楚,但不能实时处理,维纳滤波的最大缺点是仅适用于一维平稳随机信号。

对于一个线性系统来说,如图 3-1 所示,如果其冲激响应为 $h(n)$,则当输入某一随机信号 $x(n)$ 时,它的输出可表示为

$$y(n) = \sum_m h(m)x(n-m) \quad (3-1)$$

这里的输入为

$$x(n) = s(n) + w(n) \quad (3-2)$$

式中, $s(n)$ 为信号, $w(n)$ 为噪声。

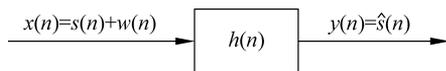


图 3-1 维纳滤波器的输入-输出表示

我们希望这种线性系统的输出尽可能地逼近 $s(n)$ 的某种估计,用 $\hat{s}(n)$ 表示。因而该线性系统实际上也就是对于 $s(n)$ 的一种估计器,这种估计器的主要功能是利用当前的观测值 $x(n)$ 以及一系列过去的观测值 $x(n-1), x(n-2), \dots$ 来完成对当前信号的某种估计。我们知道,这里的信号和噪声都是随机的,所以此类过滤或估计总是一种统计估计。我们大体上可将其分成三种形式:

- (1) 预测问题: 已知 $x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-m)$, 估计 $s(n+N), N \geq 0$;
- (2) 过滤或滤波: 已知 $x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-m)$, 估计 $s(n)$;
- (3) 平滑或内插: 已知 $x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-m)$, 估计 $s(n-N), N \geq 1$ 。

维纳滤波及将要讨论的卡尔曼滤波均属一种最佳线性滤波或线性最优估计,它们是以最小均方误差准则(Minimum Mean Square Error, MMSE)为最佳准则的一种滤波或估计。两种滤波器的特点如表 3-1 所示。

表 3-1 维纳滤波器和卡尔曼滤波器的特点

名称	已知数据	需要计算	计算结果	适用条件	求解方法
维纳滤波器	$x(n-1), x(n-2), \dots$	相关函数	$H(z)$ 或 $h(n)$	平稳	解析形式
卡尔曼滤波器	前一个估计值和最近的观察	状态方程 量测方程	状态变量估计值	平稳或非平稳	递推算法

设信号的真值与其估计值分别为 $s(n)$ 与 $\hat{s}(n)$, 它们之间的差 $e(n) = s(n) - \hat{s}(n)$ 称为估计误差。估计误差 $e(n)$ 为可正可负的随机变量,用它的均方值描述误差大小显然更为合理。而均方误差最小,也就是式(3-3)的值

$$E[e^2(n)] = E[(s - \hat{s})^2] \quad (3-3)$$

最小。利用最小均方误差作为最佳滤波准则比较方便,它不涉及概率的描述,而且以它导出的最佳线性系统也属最佳。

3.1.2 维纳滤波器的时域解

1. 时域求解方法

维纳滤波器的设计,实际上就是在最小均方误差条件下,确定滤波器的脉冲响应 $h(n)$ 或系统函数 $H(z)$, 也就是求解维纳-霍夫(Wiener-Hopf)方程的问题。但令人遗憾的是,当需要满足因果性(物理可实现性)约束时,求解维纳-霍夫方程相当困难,从图 3-1 我们可得

$$y(n) = \hat{s}(n) = x(n) * h(n) = \sum_k h(k)x(n-k)$$

如果系统是物理可实现的,即

$$h(n) = 0, \quad n < 0$$

则

$$y(n) = \hat{s}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (3-4)$$

式中,

$$h(k) = a_k + jb_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

维纳滤波的设计则是要确定均方误差

$$E[|e(n)|^2] = E\left\{\left|s(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)\right|^2\right\} \quad (3-5)$$

最小意义下的脉冲响应 $h_{\text{opt}}(n)$ 。

令 $J(n)$ 为代价函数

$$J(n) = E[|e(n)|^2] = E[e(n)e^*(n)] \quad (3-6)$$

要使均方误差最小,须满足

$$\nabla J(n) = \frac{\partial J(n)}{\partial h_k} = 0 \quad (3-7)$$

即

$$\frac{\partial E[|e(n)|^2]}{\partial a_k} + j \frac{\partial E[|e(n)|^2]}{\partial b_k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3-8)$$

记梯度算子为

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial a_k} + j \frac{\partial}{\partial b_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3-9)$$

$$\nabla_k J(n) = \frac{\partial \{e(n)e^*(n)\}}{\partial a_k} + j \frac{\partial \{e(n)e^*(n)\}}{\partial b_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3-10)$$

上式展开为

$$\nabla_k E[|e(n)|^2] = E\left[\frac{\partial e(n)}{\partial a_k} e^*(n) + \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} e(n) + j \frac{\partial e(n)}{\partial b_k} e^*(n) + j \frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} e(n)\right] \quad (3-11)$$

因为

$$e(n) = s(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = s(n) - \sum_{k=0}^{\infty} [a(k) + jb(k)]x(n-k)$$

所以能够推导出如下四式:

$$\begin{cases} \frac{\partial e(n)}{\partial a_k} = -x(n-k) \\ \frac{\partial e(n)}{\partial b_k} = -jx(n-k) \\ \frac{\partial e^*(n)}{\partial a_k} = -x^*(n-k) \\ \frac{\partial e^*(n)}{\partial b_k} = jx^*(n-k) \end{cases} \quad (3-12)$$

将式(3-12)代入式(3-11),可以得到

$$\nabla_k J(n) = \nabla_k E[|e(n)|^2] = -2E[x^*(n-k)e(n)] \quad (3-13)$$

上面提到,要使均方误差最小,须满足 $\nabla J(n) = \frac{\partial J(n)}{\partial h_k} = 0$, 即

$$E[x^*(n-k)e_{\text{opt}}(n)] = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3-14)$$

式(3-14)符合正交性原理,即满足两个矢量正交时它们的点乘等于0的关系。它说明任何时刻的估计误差与用于估计的所有观测值正交,正交性原理可以比较方便地用图3-2说明。

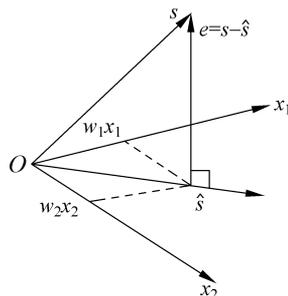


图 3-2 正交性原理的几何表示

“正交性”是从几何中借来的术语,如果两条直线相交成直角,它们就是正交的。图中 \hat{s} 处于由 x_1 与 x_2 决定的平面内,所以 e 垂直于该平面。正因为如此,这时的 e 既垂直于 x_1 又垂直于 x_2 ,而且它的长度最短,说明满足正交性原理与满足均方误差最小的条件是一致的,或者说若使均

方误差最小,则误差信号与输入信号正交,它提供了一个数学方法,用以判断线性滤波系统是否工作于最佳状态。

2. 维纳-霍夫方程

正交式(3-14)可以写成

$$E \left[x(n-k) \left(s(n) - \sum_{i=0}^{\infty} h_{\text{opt}}(i)x(n-i) \right)^* \right] = 0 \quad (3-15)$$

可推导出

$$E [x(n-k)s^*(n)] = E \left[x(n-k) \left(\sum_{i=0}^{\infty} h_{\text{opt}}^*(i)x^*(n-i) \right) \right]$$

将输入信号分配进去,并且

$$\begin{cases} [x(n-i)]^* = x(i-n) \\ r_{sx}(-k) = E[x(n-k)s(n)] \end{cases}$$

可以得到

$$r_{sx}(-k) = \sum_{i=0}^{\infty} h_{\text{opt}}^*(i)r_{xx}(i-k), \quad k=0,1,2,\dots$$

利用相关函数的性质 $r_{yx}(-k) = r_{xy}^*(k)$,得

$$r_{xs}(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h_{\text{opt}}(i)r_{xx}(k-i), \quad k=0,1,2,\dots \quad (3-16)$$

式(3-16)称为维纳-霍夫方程。根据以时间域表示的维纳-霍夫方程,即可解得均方误差最小意义下的最优脉冲响应 $h_{\text{opt}}(n)$ 。

3. FIR 维纳滤波器的时域解

我们知道,对于一般的卷积表示式,可以在时间域求解,也可以将其变换到 z 域后再按相应的函数关系求解。但是在维纳-霍夫方程中,它多了一个 $k \geq 0$ 的约束,这时虽然仍呈现 $h(k)$ 与 $r_{xx}(k)$ 的卷积形式,但却不能简单地按卷积定理变换到 z 域确定 $H_{\text{opt}}(z)$ 后再求 $h_{\text{opt}}(k)$ 。有了 $k \geq 0$ 这样的约束,求解最优 $h_{\text{opt}}(k)$ 这样的问题,就变得比较麻烦。

如果没有 $k \geq 0$ 的约束,即无上述物理可实现条件限制,那么非因果的维纳-霍夫方程为

$$r_{xs}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(i)r_{xx}(k-i) \quad (3-17)$$

因无前述约束,可以将它变换至 z 域,得到

$$H_{\text{opt}}(z) = \frac{S_{xs}(z)}{S_{xx}(z)} \quad (3-18)$$

其中, $S_{xs}(z)$ 和 $S_{xx}(z)$ 分别为互相关函数和自相关函数的功率谱密度。从而可以较为方便地获得

$$h_{\text{opt}}(n) = z^{-1} \left[\frac{S_{xs}(z)}{S_{xx}(z)} \right] \quad (3-19)$$

在要求严格实时处理的场合,不允许有过多的等待和延迟,则必须考虑因果性限制,在工程实际中常在时域用逼近的方法解方程。这时如果具有因果性约束的 $h(n)$ 可用长度为 M 的有限长序列来逼近。

当 $h(n)$ 是一个长度为 M 的因果序列时, FIR 维纳滤波器的维纳-霍夫方程表述为

$$r_{xx}(k) = \sum_{i=0}^{M-1} h(i)r_{xx}(k-i), \quad k=0,1,2,\dots,M-1 \quad (3-20)$$

把 k 的取值代入式(3-20)中,并考虑自相关为偶函数,得到

$$\begin{cases} \text{当 } k=0 \text{ 时, } h_0 r_{xx}(0) + h_1 r_{xx}(1) + \dots + h_{M-1} r_{xx}(M-1) = r_{xs}(0) \\ \text{当 } k=1 \text{ 时, } h_0 r_{xx}(1) + h_1 r_{xx}(0) + \dots + h_{M-1} r_{xx}(M-2) = r_{xs}(1) \\ \vdots \\ \text{当 } k=M-1 \text{ 时, } h_0 r_{xx}(M-1) + h_1 r_{xx}(M-2) + \dots + h_{M-1} r_{xx}(0) = r_{xs}(M-1) \end{cases} \quad (3-21)$$

为了表述方便,我们又常将式(3-21)表达的维纳-霍夫方程写成矩阵形式,即

$$\mathbf{R}_{xx} \mathbf{h} = \mathbf{r}_{xs} \quad (3-22)$$

其中,

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{M-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) \\ r_{xx}(1) \\ \vdots \\ r_{xx}(M-1) \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \dots & r_{xx}(M-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(M-1) & r_{xx}(M-2) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix}$$

对式(3-22)求逆,得到

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}_{xs} \quad (3-23)$$

上式表明已知期望信号与观测数据的互相关函数及观测数据的自相关函数时,可以通过矩阵求逆运算,得到维纳滤波器的最佳解。当选择的滤波器的长度 M 较大时,计算工作量很大,并且需要计算 \mathbf{R}_{xx} 的逆矩阵,从而要求的存储量也很大。此外,在具体实现时,滤波器的长度是由实验来确定的,如果想通过增加长度提高逼近的精度,就需要在新 M 基础上重新进行计算。因此,从时域求解维纳滤波器,并不是一个有效的方法。

4. FIR 维纳滤波器的估计误差的均方值

求得 $h_{\text{opt}}(n)$ 后,这时的均方误差为最小,根据式(3-5),得

$$\begin{aligned} E[e^2(n)] &= E \left\{ \left[s(n) - \sum_{k=0}^{N-1} h_{\text{opt}}(k)x(n-k) \right]^2 \right\} \\ &= E \left[s^2(n) - 2s(n) \sum_{k=0}^{N-1} h_{\text{opt}}(k)x(n-k) + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} h_{\text{opt}}(k)x(n-k)h_{\text{opt}}(i)x(n-i) \right] \end{aligned}$$

$$= r_{ss}(0) - 2 \sum_{k=0}^{N-1} h_{\text{opt}}(k) r_{xs}(k) + \sum_{k=0}^{N-1} h_{\text{opt}}(k) \left[\sum_{i=0}^{N-1} h_{\text{opt}}(i) r_{xx}(k-i) \right]$$

因为

$$r_{xs}(k) = \sum_{i=0}^{M-1} h_{\text{opt}}(i) r_{xx}(k-i), \quad k=0, 1, 2, \dots, M-1$$

所以

$$E[e^2(n)]_{\min} = r_{ss}(0) - \sum_{k=0}^{N-1} h_{\text{opt}}(k) r_{xs}(k) \quad (3-24)$$

若信号 $s(n)$ 与噪声 $w(n)$ 互不相关, 即

$$r_{sw}(k) = r_{ws}(k) = 0$$

则有

$$r_{xs}(k) = E[x(n)s(n+k)] = E[s(n)s(n+k) + w(n)s(n+k)] = r_{ss}(k)$$

$$r_{xx}(k) = E[(s(n) + w(n))(s(n+m) + w(n+m))] = r_{ss}(k) + r_{ww}(k)$$

则式(3-20)和式(3-24)可以转化为

$$r_{xs}(k) = \sum_{i=0}^{M-1} h_{\text{opt}}(i) [r_{ss}(k-i) + r_{ww}(k-i)], \quad k=0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (3-25)$$

$$E[e^2(n)]_{\min} = r_{ss}(0) - \sum_{k=0}^{N-1} h_{\text{opt}}(k) r_{xs}(k) \quad (3-26)$$

【例 3-1】 已知图 3-1 中 $x(n) = s(n) + w(n)$, 且 $s(n)$ 和 $w(n)$ 统计独立, 其中 $s(n)$ 的自相关序列为 $r_{ss}(m) = 0.6^{|m|}$, $w(n)$ 是均值为 0、方差为 1 的白噪声, 试设计一个 $N=2$ 的维纳滤波器来估计 $s(n)$, 并求最小均方误差。

【解】 依题意, 因为 $s(n)$ 和 $w(n)$ 统计独立, 所以 $r_{xs}(k) = r_{ss}(k)$ 。而已知信号和噪声的自相关为 $r_{ss}(m) = 0.6^{|m|}$, $r_{ww}(m) = \delta(m)$ 代入式(3-25)得

$$\begin{cases} k=0 & 1 = 2h(0) + 0.6h(1) \\ k=1 & 0.6 = 0.6h(0) + 2h(1) \end{cases}$$

解得

$$h(0) = 0.451, \quad h(1) = 0.165$$

将上述结果代入式(3-26), 求得最小均方误差

$$E[e^2(n)]_{\min} = r_{ss}(0) - \sum_{k=0}^1 h_{\text{opt}}(k) r_{xs}(k) = 1 - h(0) - 0.6h(1) = 0.45$$

而此滤波器以前的均方误差为

$$E[e^2(n)] = E\{[x(n) - s(n)]^2\} = E[w^2(n)] = r_{ww}(0) = 1$$

若要进一步减小误差, 可以适当增加维纳滤波的阶数, 但相应的计算量也会增加。

3.1.3 维纳滤波器的 z 域解

在前面我们已经看到, 当要求维纳滤波器满足物理可实现条件, 即其冲激响应为因果序列时, 所得的维纳-霍夫方程式(3-16)将附有 $k \geq 0$ 的约束。因而不能直接将其转入 z 域, 并进而求得 $h_{\text{opt}}(n)$ 。而且有物理可实现约束时, 维纳-霍夫方程在时域求解又很困难, 为此,

这里我们专门介绍由伯德(Bode)和香农(Shannon)相继提出的将 $x(n)$ 加以白化的方法来确定维纳-霍夫方程的 z 域解。作为准备,这里先引入信号模型的概念。

1. 白化方法确定 z 域解

我们知道,任何一个具有有理功率谱密度的随机信号均可以看作由一个白噪声 $w(n)$ 激励某个物理网络所得,而一般工程中的信号 $s(n)$ 的功率谱密度通常均可表示为 z 的有理式,因而可用图 3-3 所示的信号模型来描述。图 3-3 中的 $A(z)$ 就是形成信号 $s(n)$ 的模型的传递函数。

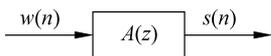


图 3-3 $s(n)$ 信号模型

白噪声的自相关函数及功率谱密度分别为 $r_{ww}(k) = \sigma_w^2 \delta(k)$, $P_{ww}(z) = \sigma_w^2$ 。根据第 1 章知识及谱分解定理不难得到 $s(n)$ 的功率谱密度

$$P_{ss}(z) = \sigma_w^2 A(z)A(z^{-1}) \quad (3-27)$$

又因为 $x(n) = s(n) + v(n)$, 所以 $x(n)$ 也可以用图 3-4(a) 的信号模型来表示。

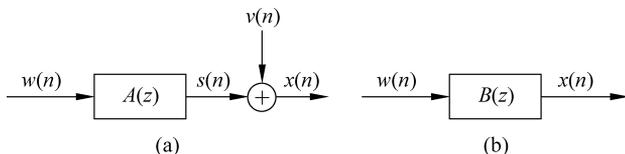


图 3-4 维纳滤波器输入-输出关系

当 $x(n)$ 的功率谱密度也是 z 的有理式时,显然可以将 $x(n)$ 表示成图 3-4(b) 所示的模型形式,且当所列模型的脉冲响应为实序列时将有关系式

$$P_{xx}(z) = \sigma_w^2 B(z)B(z^{-1}) \quad (3-28)$$

反过来,利用图 3-4(b) 的信号模型,也可以实现 $x(n)$ 的白化目的。

在第 1 章的讨论中,我们已经说过,无限能量信号的傅里叶变换或 z 变换并不收敛,但是在工程上,有时常近似地用足够多的样本替代某个随机过程。这样,对于图 3-4(b) 所示的情况,我们仍可将其输入输出关系近似地表示成

$$W(z) = \frac{X(z)}{B(z)} \quad (3-29)$$

式中, $B(z)$ 为因果的最小相位系统, $\frac{1}{B(z)}$ 显然也是一个物理可实现的最小相位系统。于是,与以白噪声获得 $x(n)$ 的过程相反,我们也可以利用式(3-29)这样的关系式实现白化 $x(n)$ 的目的。

如前所述,设计维纳滤波器实际上就是求解 $E[(s - \hat{s})^2]$ 最小时的最佳 $H(z)$ 问题。为了便于获得这时的 $H_{\text{opt}}(z)$, 我们先将图 3-1 重画成图 3-5(a), 并将此滤波器分解成图 3-5(b) 的形式。

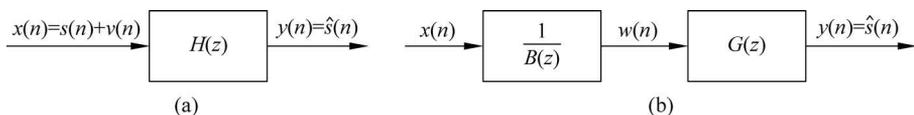


图 3-5 利用白化 $x(n)$ 的方法求解维纳-霍夫方程

显然,这里的

$$H(z) = \frac{G(z)}{B(z)} \quad (3-30)$$

已知信号的 $P_{xx}(z)$ 后,即可从式(3-28)解得 $B(z)$,并且 $B(z)$ 和 $\frac{1}{B(z)}$ 所代表的都是物理可实现的因果系统。于是在这里,最小均方误差意义下的 $H_{\text{opt}}(z)$ 的确定,也就变成了求解最佳 $G(z)$ 的问题。 $G(z)$ 当然也需分成因果性与非因果性的情况加以讨论。但是此时 $G(z)$ 的激励信号已不再是 $x(n)$,而是将其白化之后所得的白噪声,从而使求解这种情况下的 $G(z)$ 远比直接以图 3-5(a)解 $H_{\text{opt}}(z)$ 要方便许多。下面我们仍按有或无物理可实现约束这两种情况予以讨论。

2. 非因果维纳滤波器

根据前面对图 3-5(b)的讨论,可得

$$y(n) = \hat{s}(n) = w(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)w(n-k) \quad (3-31)$$

式中 $g(k)$ 为 $G(z)$ 的逆 z 变换。而 $\hat{s}(n)$ 的均方误差

$$\begin{aligned} E[e^2(n)] &= E\left\{ \left[s(n) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)w(n-k) \right]^2 \right\} \\ &= r_{ss}(0) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sigma_w g(k) - \frac{r_{ws}(k)}{\sigma_w} \right]^2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r_{ws}^2(k)}{\sigma_w^2} \end{aligned} \quad (3-32)$$

式(3-32)推导过程较为烦琐,我们这里就省略了。为了求得相对于 $g(k)$ 的最小均方误差值,我们令

$$\frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial g(k)} = 0$$

同时,考虑式(3-32)中的 $r_{ss}(0)$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r_{ws}^2(k)}{\sigma_w^2}$ 项均与 $g(k)$ 无关,因而可以得到均方误差最小时的

$$g_{\text{opt}}(k) = \frac{r_{ws}(k)}{\sigma_w^2}, \quad -\infty < k < \infty \quad (3-33)$$

及

$$G_{\text{opt}}(z) = \frac{S_{ws}(z)}{\sigma_w^2} \quad (3-34)$$

这样,根据式(3-30),非因果维纳滤波器的最佳解为

$$H_{\text{opt}}(z) = \frac{G_{\text{opt}}(z)}{B(z)} = \frac{1}{\sigma_w^2} \frac{S_{ws}(z)}{B(z)} \quad (3-35)$$

因为 $s(n) = x(n) * \delta(n)$, 且 $x(n) = w(n) * b(n)$, 根据相关卷积定理, 得到

$$r_{xs}(m) = r_{ws}(m) * b(-m) \quad (3-36)$$

对上式两边做 z 变换, 得到

$$S_{xs}(z) = S_{ws}(z)B(z^{-1}) \quad (3-37)$$

所以

$$S_{ws}(z) = \frac{S_{xs}(z)}{B(z^{-1})} \quad (3-38)$$

将式(3-38)代入式(3-35),并根据 $x(n)$ 的信号模型,得到非因果的维纳滤波器的复频域最佳解的一般表达式

$$H_{\text{opt}}(z) = \frac{1}{\sigma_w^2} \frac{1}{B(z)} \frac{S_{xs}(z)}{B(z^{-1})} = \frac{S_{xs}(z)}{S_{xx}(z)} \quad (3-39)$$

因为 $x(n) = s(n) + v(n)$,而且 $s(n)$ 与 $v(n)$ 又不相关,即对于任何 m 的 $E[s(n)v(n+m)] = 0$, 因而有

$$\begin{aligned} r_{xs}(m) &= E[x(n)s(n+m)] = E\{[s(n) + v(n)]s(n+m)\} \\ &= E[s(n)s(n+m)] = r_{ss}(m) \end{aligned} \quad (3-40)$$

以及

$$S_{xx}(z) = S_{ss}(z) + S_{vv}(z) \quad (3-41)$$

将它代入式(3-39),则可以得到

$$H_{\text{opt}}(z) = \frac{S_{xs}(z)}{S_{xx}(z)} = \frac{S_{ss}(z)}{S_{ss}(z) + S_{vv}(z)} \quad (3-42)$$

所以非因果的维纳滤波器的频率响应可以表示为

$$H_{\text{opt}}(e^{j\omega}) = \frac{P_{ss}(e^{j\omega})}{P_{ss}(e^{j\omega}) + P_{vv}(e^{j\omega})} \quad (3-43)$$

信号的频谱用 $P_{ss}(e^{j\omega})$ 表示,噪声的频谱用 $P_{vv}(e^{j\omega})$ 表示,由上式可知

(1) 当噪声为 0 时, $H_{\text{opt}} = 1$;

(2) 当信号为 0 时, $H_{\text{opt}} = 0$;

(3) 当既有信号又有噪声时, $H_{\text{opt}} < 1$,大小随 P_{vv} 的增加而减小,从而达到降低噪声影响的目的。

$$H_{\text{opt}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & P_{ss}(e^{j\omega}) \neq 0, P_{vv}(e^{j\omega}) = 0 \\ < 1 & P_{ss}(e^{j\omega}) \neq 0, P_{vv}(e^{j\omega}) \neq 0 \\ 0 & P_{ss}(e^{j\omega}) = 0, P_{vv}(e^{j\omega}) \neq 0 \end{cases} \quad (3-44)$$

非因果的维纳滤波器的传输函数 $H_{\text{opt}}(e^{j\omega})$ 的幅频特性如图 3-6 所示。

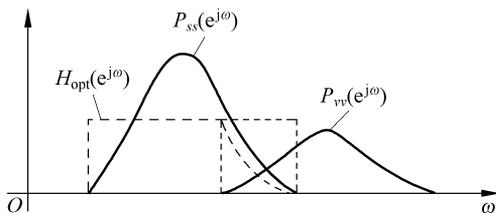


图 3-6 非因果维纳滤波器的传输函数的幅频特性

下面我们计算滤波器的最小均方误差 $E[e^2(n)]_{\min}$, 重新写出式(3-32)为

$$E[e^2(n)] = r_{ss}(0) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sigma_w g(k) - \frac{r_{ws}(k)}{\sigma_w} \right]^2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r_{ws}^2(k)}{\sigma_w^2}$$

均方误差最小时, $g_{\text{opt}}(k) = \frac{r_{ws}(k)}{\sigma_w^2}$, 所以第二项为 0, 这样最小均方误差 $E[e^2(n)]_{\text{min}}$ 表示为

$$E[e^2(n)] = r_{ss}(0) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r_{ws}^2(k)}{\sigma_w^2} \quad (3-45)$$

根据 $r_{ss}(m), r_{ws}(k)$ 可以得出 $S_{ss}(z), S_{ws}(z)$, 再根据围线积分法求逆 z 变换的公式, 过程省略, 这里仅给出结果

$$\begin{aligned} E[e^2(n)]_{\text{min}} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C [S_{ss}(z) - H_{\text{opt}}(z)S_{xs}(z^{-1})] z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{S_{ss}(z)S_{vw}(z)}{S_{xx}(z)} z^{-1} dz \end{aligned} \quad (3-46)$$

若将积分围线取成单位圆, 即以 $z = e^{j\omega}$ 代入式(3-46), 可得

$$E[e^2(n)]_{\text{min}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P_{ss}(e^{j\omega})P_{vw}(e^{j\omega})}{P_{ss}(e^{j\omega}) + P_{vv}(e^{j\omega})} d\omega \quad (3-47)$$

从式(3-47)可以看到, 只有当信号功率谱与噪声功率谱不重叠时, 其 $E[e^2(n)]_{\text{min}}$ 才为 0。

3. 因果维纳滤波器

若维纳滤波器是一个因果滤波器, 要求 $g(n) = 0, n < 0$, 则根据图 3-5(b)滤波器的输出信号为

$$y(n) = \hat{s}(n) = w(n) * g(n) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)w(n-k) \quad (3-48)$$

根据式(3-32), 最小均方误差为

$$E[e^2(n)]_{\text{min}} = r_{ss}(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sigma_w g(k) - \frac{r_{ws}(k)}{\sigma_w} \right]^2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_{ws}^2(k)}{\sigma_w^2} \quad (3-49)$$

而且有

$$g_{\text{opt}}(n) = \begin{cases} \frac{r_{ws}(n)}{\sigma_w^2}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = \frac{r_{ws}(n)}{\sigma_w^2} u(n) \quad (3-50)$$

如果有一个函数 $f(n)$ 的 z 变换为 $F(z)$, 将 $f(n)u(n)$ 的 z 变换以 $[F(z)]_+$ 表示, 即

$$f(n)u(n) \rightarrow [F(z)]_+$$

这里的 $f(n)u(n)$ 显然是一个因果序列, 它只在 $n \geq 0$ 时有值。如果它代表的系统又是个稳定系统, 那么其系统函数 $[F(z)]_+$ 的所有极点均在单位圆内。这时式(3-50)的 z 域表示式可写成

$$G_{\text{opt}}(z) = \frac{1}{\sigma_w^2} [S_{ws}(z)]_+ \quad (3-51)$$

根据式(3-38)有

$$H_{\text{opt}}(z) = \frac{G_{\text{opt}}(z)}{B(z)} = \frac{1}{\sigma_w^2} \frac{1}{B(z)} \left[\frac{S_{xs}(z)}{B(z^{-1})} \right]_+ \quad (3-52)$$

这就是要求的物理可实现的(因果的)维纳滤波器的系统函数表示式, 与式(3-39)相比, 除了

加有 $[\]_+$ 这一标志之外,别无其他差别。同样,因果的维纳滤波器的最小均方误差。

$$\begin{aligned} E[e^2(n)]_{\min} &= r_{ss}(0) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_{ws}^2(k)}{\sigma_w^2} \\ &= r_{ss}(0) - \frac{1}{\sigma_w^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} [r_{ws}(k)u(k)]r_{ws}(k) \end{aligned} \quad (3-53)$$

于是,按帕塞伐尔公式和式(3-52),这时的最小均方误差的 z 域表示式可以表示成

$$\begin{aligned} E[e^2(n)]_{\min} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left\{ S_{ss}(z) - \frac{1}{\sigma_w^2} [S_{ws}(z)]_+ S_{ws}(z^{-1}) \right\} z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left\{ S_{ss}(z) - \frac{1}{\sigma_w^2} \left[\frac{S_{xs}(z)}{B(z^{-1})} \right]_+ \left[\frac{S_{xs}(z^{-1})}{B(z)} \right] \right\} z^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C [S_{ss}(z) - H_{\text{opt}}(z)S_{xs}(z^{-1})] z^{-1} dz \end{aligned} \quad (3-54)$$

比较因果维纳滤波器的 $E[e^2(n)]_{\min}$ 表达式(3-54)与非因果维纳滤波器的 $E[e^2(n)]_{\min}$ 表达式(3-46),不难看到它们的形式完全一样,只是 $H_{\text{opt}}(z)$ 不尽相同而已。

现在给出因果维纳滤波器设计的一般方法:

(1) 根据观测信号 $x(n)$ 的功率谱求出它所对应信号模型的传输函数,即采用谱分解的方法得到 $B(z)$,谱分解公式为 $S_{xx}(z) = \sigma_w^2 B(z)B(z^{-1})$ 。

(2) 求 $\left[\frac{S_{xs}(z)}{B(z^{-1})} \right]_+$ 的 z 反变换,取其因果部分再做 z 变换,即舍掉单位圆外的极点,得 $\left[\frac{S_{xs}(z)}{B(z^{-1})} \right]_+$ 。

(3) 积分曲线取单位圆,计算 $H_{\text{opt}}(z)$, $E[e^2(n)]_{\min}$ 。

【例 3-2】 已知 $S_{ss}(z) = \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)}$ 信号和噪声不相关,即 $r_{sv}(m) = 0$,噪声 $v(n)$ 是零均值、单位功率的白噪声($\sigma_v^2 = 1, m_v = 0$),求 $H_{\text{opt}}(z)$ 和 $E[e^2(n)]_{\min}$ 。

【解】 根据白噪声的特点得出 $S_{vv}(z) = 1$,由噪声和信号不相关,得到 $r_{xx}(m) = r_{ss}(m) + r_{vv}(m)$ 。

$$\begin{aligned} S_{xx}(z) &= S_{ss}(z) + S_{vv}(z) \\ &= \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} + 1 \\ &= \frac{1.6 \times (1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} = \sigma_w^2 B(z)B(z^{-1}) \end{aligned}$$

考虑到 $B(z)$ 必须是因果稳定的系统,得到

$$B(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}, \quad B(z^{-1}) = \frac{1-0.5z}{1-0.8z}, \quad \sigma_w^2 = 1.6$$

(1) 首先分析物理可实现情况:

$$H_{\text{opt}}(z) = \frac{1}{\sigma_w^2} \frac{1}{B(z)} \left[\frac{S_{xs}(z)}{B(z^{-1})} \right]_+ = \frac{1-0.8z^{-1}}{1.6 \times (1-0.5z^{-1})} \times \left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)} \right]_+$$

注意此题中 $r_{xs}(m) = r_{ss}(m)$, $S_{xs}(z) = S_{ss}(z)$ 。

因为

$$\begin{aligned} Z^{-1} \left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)} \right]_+ &= \text{Res} \left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)} \times z^{n-1}, 0.8 \right] \\ &= \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)} \times z^{n-1} \times (z-0.8) \Big|_{z=0.8} \\ &= \frac{3}{5} (0.8)^n \end{aligned}$$

其中, $1-0.5z$ 这个极点舍掉, 取其因果部分

$$Z^{-1} \left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)} \right]_+ = \frac{3}{5} (0.8)^n u(n)$$

所以

$$\begin{aligned} \left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.5z)} \right]_+ &= \text{ZT} \left[\frac{3}{5} (0.8)^n u(n) \right] = \frac{0.6}{1-0.8z^{-1}} \\ H_{\text{opt}}(z) &= \frac{1-0.8z^{-1}}{1.6 \times (1-0.5z^{-1})} \times \frac{0.6}{1-0.8z^{-1}} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{1-0.5z^{-1}} \end{aligned}$$

最小均方误差为

$$\begin{aligned} E[|e(n)|^2]_{\min} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C [S_{ss}(z) - H_{\text{opt}}(z)S_{xs}(z^{-1})] \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left[\frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} - \frac{\frac{3}{8}}{1-0.5z^{-1}} \times \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} \right] \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{-0.45 \left(\frac{5}{8}z - 0.5 \right)}{(z-0.8)(z-1/0.8)(z-0.5)} dz \end{aligned}$$

取单位圆为积分围线, 上式等于单位圆内的极点 ($z=0.8$ 及 $z=0.5$) 的留数之和, 即

$$E[e^2(n)]_{\min} = \frac{-0.45 \left(\frac{5}{8} \times z - 0.5 \right)}{(z-1/0.8)(z-0.5)} \Big|_{z=0.8} + \frac{-0.45 \left(\frac{5}{8} \times z - 0.5 \right)}{(z-0.8)(z-1/0.8)} \Big|_{z=0.5} = 3/8$$

未经滤波器的均方误差

$$E[|e(n)|^2] = E[|x(n) - s(n)|^2] = E[|v(n)|^2] = \sigma_v^2 = 1$$

所以通过因果维纳滤波器后均方误差下降 $8/3 (\approx 2.7)$ 倍。

(2) 对于非物理可实现情况有

$$\begin{aligned} H_{\text{opt}}(z) &= \frac{S_{xs}(z)}{S_{xx}(z)} = \frac{S_{ss}(z)}{S_{ss}(z) + S_{vv}(z)} \\ &= \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} \\ &= \frac{0.36}{(1-0.8z^{-1})(1-0.8z)} + 1 \end{aligned}$$

$$= \frac{0.225}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.5z)}$$

$$\begin{aligned} E[|e(n)|^2]_{\min} &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C [S_{ss}(z) - H_{\text{opt}}(z)S_{xs}(z^{-1})] \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \left[\frac{0.36}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} - \frac{0.225}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.5z)} \right] \times \\ &\quad \frac{0.36}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left[\frac{0.36}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)} \cdot \left(1 - \frac{0.225}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.5z)} \right) \right] \frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{0.36 \times (1.025 - 0.5z^{-1} - 0.5z)}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.5z)} \frac{dz}{z} \end{aligned}$$

令

$$F(z) = \frac{0.36 \times (1.025 - 0.5z^{-1} - 0.5z)}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.5z)}$$

单位圆内有两个极点 0.8 和 0.5, 应用留数定理, 有

$$E[e^2(n)]_{\min} = \text{Res}[F(z), 0.8] + \text{Res}[F(z), 0.5] = \frac{3}{10}$$

结论: 比较两种情况下的最小均方误差, 可以看出非物理可实现情况的最小均方误差小于物理可实现情况的均方误差。

3.2 卡尔曼(Kalman)滤波器

卡尔曼(Kalman)滤波和维纳(Wiener)滤波都是以最小均方误差为准则的最佳滤波。但是维纳滤波只适用于平稳随机过程(信号), 而卡尔曼滤波则没有这个限制, 这是它们的最大区别。另外在处理方法上, 它们也有很大不同。维纳滤波是根据全部过去的和当前的观测数据 $x(n), x(n-1) \dots$ 来估计信号的当前值, 它的解是以均方误差最小条件下所得到的系统函数 $H(z)$ 或脉冲响应 $h(n)$ 的形式给出的; 而卡尔曼滤波则不需要全部过去的观测数据, 它只是根据前一个估计值 \hat{x}_{k-1} 和最近一个观测数据 y_k 来估计信号的当前值。它是用状态方程和递推方法进行估计的, 而且所得的解是以估计值的形式给出的。

研究维纳滤波时, 我们建立的信号模型是从信号和噪声的相关函数得到的, 而且也曾提出过以白噪声通过线性网络等形成方法。而这一章我们研究卡尔曼滤波时则要从状态方程和量测方程着手建立其信号模型。

3.2.1 卡尔曼滤波器信号模型

如图 3-7 所示是维纳滤波的模型, 信号 $s(n)$ 可以认为是由白噪声 $w_1(n)$ 激励一个线性系统 $A(z)$ 的响应, 假设响应和激励的时域关系可以用下式表示

$$s(n) = as(n-1) + w_1(n-1) \quad (3-55)$$

式(3-55)也就是一阶 AR 模型。

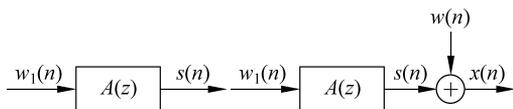


图 3-7 维纳滤波的信号模型和观测信号模型

在卡尔曼滤波中,信号 $s(n)$ 被称为是状态变量,在 k 时刻用矢量的形式 $\mathbf{S}(k)$ 表示,在 $k-1$ 时刻的状态用 $\mathbf{S}(k-1)$ 表示。激励信号 $w_1(n)$ 也用矢量表示为 $w_1(k)$,激励和响应之间的关系用传递矩阵 $\mathbf{A}(k)$ 来表示,它是由系统的结构确定的。有了这些假设后我们给出状态方程:

$$\mathbf{S}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{S}(k-1) + w_1(k-1) \quad (3-56)$$

式(3-56)表示 k 时刻的状态 $\mathbf{S}(k)$ 可以由它的前一个时刻的状态 $\mathbf{S}(k-1)$ 来求得,即认为 $k-1$ 时刻以前的各状态都已记忆在状态 $\mathbf{S}(k-1)$ 中。

卡尔曼滤波是根据系统的量测数据(即观测数据)对系统的运动进行估计的,所以除了状态方程之外,还需要量测方程。还是从维纳滤波的观测信号模型入手,根据图 3-7 的右图,观测数据和信号的关系为 $x(n) = s(n) + w(n)$, $w(n)$ 一般是均值为零的高斯白噪声。在卡尔曼滤波中,用 $\mathbf{X}(k)$ 表示量测到的信号矢量序列, $w(k)$ 表示量测时引入的误差矢量,则量测矢量 $\mathbf{X}(k)$ 与状态矢量 $\mathbf{S}(k)$ 之间的关系可以写成

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{S}(k) + w(k) \quad (3-57)$$

式(3-57)和维纳滤波的 $x(n) = s(n) + w(n)$ 在概念上是一致的,也就是说,卡尔曼滤波的一维信号模型和维纳滤波的信号模型是一致的。

把式(3-57)推广就得到更普遍的多维量测方程式为

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{S}(k) + w(k) \quad (3-58)$$

式(3-58)中的 $\mathbf{C}(k)$ 称为量测矩阵,它的引入原因是:量测矢量 $\mathbf{X}(k)$ 的维数不一定与状态矢量 $\mathbf{S}(k)$ 的维数相同,因为我们不一定能观测到所有需要的状态参数。假如 $\mathbf{X}(k)$ 是 $m \times 1$ 的矢量, $\mathbf{S}(k)$ 是 $n \times 1$ 的矢量, $\mathbf{C}(k)$ 就是 $m \times n$ 的矩阵, $w(k)$ 是 $m \times 1$ 的矢量。

将状态方程中时间变量 k 用 $k+1$ 代替,得到的状态方程为

$$\mathbf{S}(k+1) = \mathbf{A}(k+1)\mathbf{S}(k) + w_1(k) \quad (3-59)$$

有了状态方程式(3-59)和量测方程式(3-58)后,给出卡尔曼滤波的信号模型如图 3-8 所示。

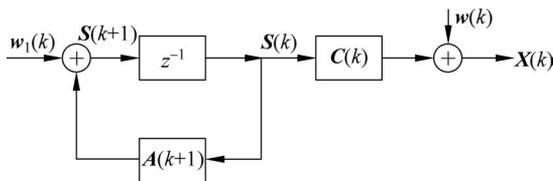


图 3-8 卡尔曼滤波的信号模型

3.2.2 卡尔曼滤波的递推算法

卡尔曼滤波是采用递推的算法实现的,其基本思想是先不考虑激励信号 $w_1(k)$ 和观测噪声 $w(k)$ 的影响,得到状态变量和输出信号(即观测数据)的估计值,再用输出信号的估计

误差加权后校正状态变量 $\mathbf{S}(k)$ 的估计值 $\hat{\mathbf{S}}(k)$, 使状态变量估计误差的均方值最小。因此, 卡尔曼滤波的关键是计算出加权矩阵的最佳值。重新给出状态方程和量测方程式为

$$\begin{cases} \mathbf{S}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{S}(k-1) + \mathbf{w}_1(k-1) \\ \mathbf{X}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{S}(k) + \mathbf{w}(k) \end{cases} \quad (3-60)$$

式(3-60)中 $\mathbf{A}(k)$ 和 $\mathbf{C}(k)$ 是已知的, $\mathbf{X}(k)$ 是观测到的数据, 也是已知的, 假设信号的上个估计值 $\hat{\mathbf{S}}(k-1)$ 已知, 现在的问题就是如何来求当前时刻的估计值 $\hat{\mathbf{S}}(k)$ 。

当不考虑激励信号 $\mathbf{w}_1(k)$ 和观测噪声 $\mathbf{w}(k)$ 时, 可以立即求得 $\mathbf{S}(k)$, 估计问题的出现就是因为信号与噪声的叠加。此时状态方程和量测方程式为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{S}}'(k) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{S}}(k-1) \\ \hat{\mathbf{X}}'(k) = \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{S}}'(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{S}}(k-1) \end{cases} \quad (3-61)$$

必然, 观测值 $\mathbf{X}(k)$ 和估计值 $\hat{\mathbf{X}}'(k)$ 之间有误差, 它们之间的差 $\tilde{\mathbf{X}}(k)$ 称为新息 (Innovation):

$$\tilde{\mathbf{X}}(k) = \mathbf{X}(k) - \hat{\mathbf{X}}'(k) \quad (3-62)$$

显然, 新息的产生是由于我们前面忽略了 $\mathbf{w}_1(k)$ 和 $\mathbf{w}(k)$ 所引起的, 也就是说, 新息里面包含了 $\mathbf{w}_1(k)$ 和 $\mathbf{w}(k)$ 的信息成分。因而我们用新息 $\tilde{\mathbf{X}}(k)$ 乘以一个修正矩阵 $\mathbf{H}(k)$, 用它来代替式(3-60)中的 $\mathbf{w}_1(k)$ 来对 $\mathbf{S}(k)$ 进行估计:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}(k) &= \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{S}}(k-1) + \mathbf{H}(k)\tilde{\mathbf{X}}(k) \\ &= \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{S}}(k-1) + \mathbf{H}(k)[\mathbf{X}(k) - \mathbf{C}(k)\mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{S}}(k-1)] \end{aligned} \quad (3-63)$$

从式(3-63)容易看出, 要估计出 $\hat{\mathbf{S}}(k)$ 就必须先找到最小均方误差下的修正矩阵 $\mathbf{H}(k)$, 此过程较烦琐, 这里省略过程, 仅给出最小均方误差下的修正矩阵 $\mathbf{H}(k)$ 为

$$\mathbf{H}(k) = \boldsymbol{\epsilon}'(k)\mathbf{C}(k)^H[\mathbf{C}(k)\boldsymbol{\epsilon}'(k)\mathbf{C}(k)^H + \mathbf{R}(k)]^{-1} \quad (3-64)$$

式中, $\boldsymbol{\epsilon}'(k)$ 为均方误差矩阵; H 表示对向量取共轭转置。

对于两个噪声:

(1) 均值向量

$$E[\mathbf{w}_1(k)] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{w}(k)] = \mathbf{0}$$

(2) 自协方差矩阵和互协方差矩阵

$$\mathbf{Q}(k) = E[\mathbf{w}_1(k)\mathbf{w}_1(k)^H], \quad \mathbf{R}(k) = E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}(k)^H]$$

$$E[\mathbf{w}_1(k)\mathbf{w}_1(j)^H] = \mathbf{Q}(k)\delta(k-j), \quad E[\mathbf{w}(k)\mathbf{w}(j)^H] = \mathbf{R}(k)\delta(k-j)$$

把式(3-64)代入式(3-63)即可得均方误差最小条件下的 $\hat{\mathbf{S}}(k)$ 递推公式。相应的最小均方误差为

$$\boldsymbol{\epsilon}(k) = \boldsymbol{\epsilon}'(k) - \mathbf{U}(\mathbf{S}\mathbf{S}^H)^{-1}\mathbf{U}^H = [\mathbf{I} - \mathbf{H}(k)\mathbf{C}(k)]\boldsymbol{\epsilon}'(k) \quad (3-65)$$

式中, $\mathbf{U} = \boldsymbol{\epsilon}'(k)\mathbf{C}(k)^H$, \mathbf{I} 为单位矩阵。

综上所述, 得到卡尔曼滤波的递推公式:

$$\boldsymbol{\epsilon}'(k) = \mathbf{A}(k)\boldsymbol{\epsilon}(k-1)\mathbf{A}(k)^H + \mathbf{Q}(k-1) \quad (3-66)$$

$$\mathbf{H}(k) = \boldsymbol{\epsilon}'(k)\mathbf{C}(k)^H[\mathbf{C}(k)\boldsymbol{\epsilon}'(k)\mathbf{C}(k)^H + \mathbf{R}(k)]^{-1} \quad (3-67)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{H}(k)\mathbf{C}(k)]\boldsymbol{\epsilon}'(k) \quad (3-68)$$

$$\hat{\mathbf{S}}(k) = A(k)\hat{\mathbf{S}}(k-1) + \mathbf{H}(k) [\mathbf{X}(k) - C(k)A(k)\hat{\mathbf{S}}(k-1)] \quad (3-69)$$

有了上面4个递推公式后,我们就可以得到状态变量估计值 $\hat{\mathbf{S}}(k)$ 和最小均方误差 $\boldsymbol{\epsilon}(k)$ 。如果初始状态 $\mathbf{S}(0)$ 的统计特性已知,并且令

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}(0) &= E[\mathbf{S}(0)] \\ \boldsymbol{\epsilon}(0) &= E[(\mathbf{S}(0) - \hat{\mathbf{S}}(0))(-\hat{\mathbf{S}}(0))^H] = \text{var}[\mathbf{S}(0)] \end{aligned}$$

且矩阵 $\mathbf{Q}(k)$ 、 $\mathbf{R}(k)$ 、 $\mathbf{A}(k)$ 和 $\mathbf{C}(k)$ 都是已知的,以及观测量 $\mathbf{X}(k)$ 也是已知的,就能用递推计算法得到所有的 $\hat{\mathbf{S}}(k)$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}(k)$;将初始条件 $\boldsymbol{\epsilon}(0)$ 代入式(3-66)求得 $\boldsymbol{\epsilon}'(1)$;将 $\boldsymbol{\epsilon}'(1)$ 代入式(3-67)求得 $\mathbf{H}(1)$;将 $\mathbf{H}(1)$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}'(1)$ 代入式(3-68)求得 $\boldsymbol{\epsilon}(1)$;将初始条件 $\hat{\mathbf{S}}(0) = E[\mathbf{S}(0)]$ 和 $\mathbf{H}(1)$ 代入式(3-69)求得 $\hat{\mathbf{S}}(1)$,以此类推。这样递推用计算机实现非常方便,卡尔曼滤波递推流程如图3-9所示。

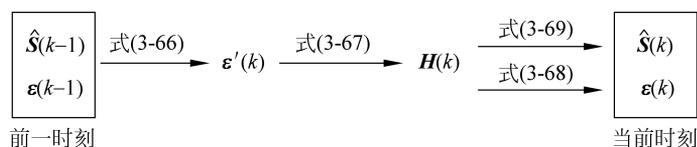


图 3-9 卡尔曼滤波递推流程

【例 3-3】 设卡尔曼滤波中量测方程为 $X(k) = S(k) + w(k)$, 已知信号的自相关函数的 Z 变换为

$$P_{ss}(z) = \frac{0.36}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)}$$

噪声的自相关函数为 $r_{ww}(m) = \delta(m)$, 信号和噪声统计独立。求: (1) 卡尔曼滤波信号模型中的 $A(k)$ 和 $C(k)$ 。(2) 已知 $\hat{\mathbf{S}}(-1) = 0, \boldsymbol{\epsilon}(0) = 1$, 在 $k=0$ 时刻开始观测信号。试用卡尔曼滤波的公式求 $\hat{\mathbf{S}}(k)$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}(k), k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, 以及稳态时的 $\hat{\mathbf{S}}(k)$ 和 $\boldsymbol{\epsilon}(k)$ 。

【解】

(1) 根据图 3-7 卡尔曼滤波的信号模型和谱分解定理

$$P_{ss}(z) = \sigma_{w_1}^2 A(z)A(z^{-1}) = \frac{0.36}{(1 - 0.8z^{-1})(1 - 0.8z)}$$

所以 $\sigma_{w_1}^2 = 0.36$, 则

$$A(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}} = \frac{S(z)}{W_1(z)}, \quad A(z^{-1}) = \frac{z}{1 - 0.8z}$$

这样分解是为了考虑符合状态方程和量测方程形式, 即

$$\begin{cases} \mathbf{S}(k) = A(k)\mathbf{S}(k-1) + \mathbf{w}_1(k-1) \\ \mathbf{X}(k) = C(k)\mathbf{S}(k) + \mathbf{w}(k) \end{cases}$$

$A(z)$ 变换到时域得

$$s(n) - 0.8s(n-1) = w_1(n)$$

因此 $A(k) = 0.8$ 。又因为 $X(k) = S(k) + w(k)$, 所以 $C(k) = 1$ 。

(2) 因为 $A(k) = 0.8, C(k) = 1, \mathbf{Q}(k) = \sigma_{w_1}^2 = 0.36, \mathbf{R}(k) = \text{var}[w(k)] = 1$, 把它们代入卡尔曼递推公式(3-66)~式(3-69)得

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}'(k) = 0.64 \boldsymbol{\varepsilon}(k-1) + 0.36 & \text{(a)} \\ \mathbf{H}(k) = \boldsymbol{\varepsilon}'(k) [\boldsymbol{\varepsilon}'(k) + 1]^{-1} & \text{(b)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(k) = [\mathbf{I} - \mathbf{H}(k)] \boldsymbol{\varepsilon}'(k) & \text{(c)} \\ \hat{\mathbf{S}}(k) = 0.8 \hat{\mathbf{S}}(k-1) + \mathbf{H}(k) [\mathbf{X}(k) - 0.8 \hat{\mathbf{S}}(k-1)] & \text{(d)} \end{cases}$$

把式(a)代入式(b)、式(c),消去 $\boldsymbol{\varepsilon}'(k)$,再把式(b)和式(c)联立,得到

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k) = \frac{0.64 \boldsymbol{\varepsilon}(k-1) + 0.36}{0.64 \boldsymbol{\varepsilon}(k-1) + 1.36} = \mathbf{H}(k) \quad \text{(e)}$$

初始条件为 $\hat{\mathbf{S}}(-1) = 0, \boldsymbol{\varepsilon}(0) = 1$,在 $k=0$ 时开始观测,利用等式(d)、式(e)进行递推得

$$\begin{aligned} k=0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(0) &= 1.0000, \quad \mathbf{H}(0) = 1.0000, \quad \hat{\mathbf{S}}(0) = \mathbf{X}(0) \\ k=1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(1) &= 0.5000, \quad \mathbf{H}(1) = 0.5000, \quad \hat{\mathbf{S}}(1) = 0.4 \hat{\mathbf{S}}(0) + 0.5 \mathbf{X}(1) \\ k=2, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(2) &= 0.4048, \quad \mathbf{H}(2) = 0.4048, \quad \hat{\mathbf{S}}(2) = 0.4762 \hat{\mathbf{S}}(1) + 0.4048 \mathbf{X}(2) \\ k=3, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(3) &= 0.3824, \quad \mathbf{H}(3) = 0.3824, \quad \hat{\mathbf{S}}(3) = 0.4941 \hat{\mathbf{S}}(2) + 0.3824 \mathbf{X}(3) \\ k=4, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(4) &= 0.3768, \quad \mathbf{H}(4) = 0.3768, \quad \hat{\mathbf{S}}(4) = 0.4985 \hat{\mathbf{S}}(3) + 0.3768 \mathbf{X}(4) \\ k=5, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(5) &= 0.3755, \quad \mathbf{H}(5) = 0.3755, \quad \hat{\mathbf{S}}(5) = 0.4996 \hat{\mathbf{S}}(4) + 0.3755 \mathbf{X}(5) \\ k=6, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(6) &= 0.3751, \quad \mathbf{H}(6) = 0.3751, \quad \hat{\mathbf{S}}(6) = 0.4999 \hat{\mathbf{S}}(5) + 0.3751 \mathbf{X}(6) \\ k=7, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(7) &= 0.3750, \quad \mathbf{H}(7) = 0.3750, \quad \hat{\mathbf{S}}(7) = 0.5000 \hat{\mathbf{S}}(6) + 0.3750 \mathbf{X}(7) \end{aligned}$$

如果给定每个时刻的观察值,那么就可以得到每一时刻的信号估计值,上面是递推过程,还没有达到稳态的情况。

假设到了某一 $k-1$ 时刻,前后时刻的均方误差相等,也就是说,误差不再随着递推增加而下降,达到了最小的均方误差,即稳态情况,将 $\boldsymbol{\varepsilon}(k) = \boldsymbol{\varepsilon}(k-1)$ 代入式(e)可以计算出稳态时的均方误差为 $\boldsymbol{\varepsilon}(k) = \boldsymbol{\varepsilon}(k-1) = 0.375$,即稳态时的修正矩阵 $\mathbf{H}(k) = 0.375$,代入式(d)得稳态时的信号估计:

$$\hat{\mathbf{S}}(k) = 0.5 \hat{\mathbf{S}}(k-1) + 0.375 \mathbf{X}(k)$$

变换到 Z 域有

$$H(z) = \frac{0.375}{1 - 0.5z^{-1}}$$

即达到稳态时,上式就是卡尔曼滤波器系统函数。

3.3 自适应滤波器

我们知道,适用于平稳随机信号的维纳滤波器是一种具有最佳过滤特性的滤波器。当然,要获得这种最佳滤波,必须知道信号与噪声的有关统计特性。但在实际应用中,不易得到这种统计特性的先验知识,特别是实际信号的统计特性有时会随时间发生某种变化,这时用维纳滤波实际上难以实现最佳过滤,而用自适应滤波则有可能实现很好的滤波性能。

自适应滤波器与维纳滤波器一样都是以最小均方误差为准则的最佳过滤器。自适应滤波器实际上是一种能自动调节本身的脉冲响应 $h(n)$ 以达到最优化的维纳滤波器。设计自适应滤波器时,事先未必一定要知道信号与噪声的自相关特性,而且对自适应滤波器而言,

信号与噪声的自相关函数即使随时间发生某些变化,它也能自动调节到满足最佳过滤的要求。自适应滤波器的这些突出优点,使它在信号处理中得到了相当广泛的应用。

最小均方误差(LMS)自适应滤波器与递推最小二乘(RLS)自适应滤波器是两种最常用的自适应滤波器,由于它们采用的最佳准则不一样,因此这两种自适应滤波器在原理、算法、性能等方面均有许多差别。

从滤波器的结构形式来考虑,自适应滤波器有有限脉冲响应(FIR)和无限脉冲响应(IIR)之分,但 IIR 自适应滤波器存在稳定性问题,且其自适应算法较复杂。另外,FIR 滤波器一般可采用横向滤波器的形式,但对于某些应用来说(如线性预测、系统辨识),也可采用格型(Lattice)滤波器的形式。

3.3.1 基本原理

自适应滤波器由参数可调的数字滤波器(或称为自适应处理器)和自适应算法两部分组成,如图 3-10 所示。参数可调的数字滤波器可以是 FIR、IIR 和格型数字滤波器,根据自适应算法是否与滤波器输出有关,自适应滤波器可分为开环系统和闭环系统。开环自适应滤波器的控制信号仅取决于系统输入,而与输出无关;闭环自适应滤波器的控制信号则由系统输入、输出共同决定。在闭环自适应滤波器中,输入信号 $x(n)$ 通过参数可调数字滤波器后产生输出 $y(n)$,与参考信号 $d(n)$ 进行比较,形成误差信号 $e(n)$ 。 $e(n)$ [有时需利用 $x(n)$] 通过某种自适应算法对滤波器参数进行调整,最终使 $e(n)$ 的均方值最小。因此,实际上自适应滤波器是一种能够自动调整本身参数的特殊维纳滤波器,在设计时不需要事先知道关于输入信号和噪声统计特性的知识,它能够在自己的工作过程中逐渐“了解”或估计出所需的统计特性,并以此为依据自动调整自己的参数,以达到最佳滤波效果。一旦输入信号的统计特性发生变化,它又能够跟踪这种变化,自动调整参数,使滤波器性能重新达到最佳。所以,自适应滤波器是在输入过程的统计特性未知时,或是输入过程的统计特性变化时,能够调整自己的参数,以满足某种最佳准则的要求。当输入过程的统计特性未知时,自适应滤波器调整自己参数的过程称为“学习”过程;当输入过程的统计特性变化时,自适应滤波器调整自己参数的过程称为“跟踪”过程。

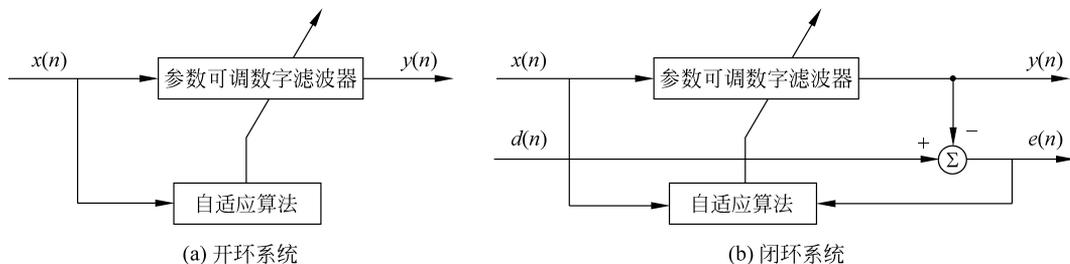


图 3-10 自适应滤波器原理图

图 3-10(b)所示的自适应滤波器有两个输入 $x(n)$ 和 $d(n)$,两个输出 $y(n)$ 和 $e(n)$,均为时间序列。其中 $x(n)$ 可以是单输入信号,也可以是多输入信号。在不同的应用背景下这些信号代表不同内容。本节主要讨论如图 3-11 所示的 LMS 自适应横向滤波器,它实际上是一种单输入自适应线性组合器。该滤波器由两个基本部分组成:①具有可调整权值的横向滤波器,这一组权值用 $w_1(n), w_2(n), \dots, w_M(n)$ 表示;②采用 LMS 自适应算法的权值

调整机构。LMS 自适应横向滤波器是一个闭环系统,其权矢量与输入数据和输出信号均有关。

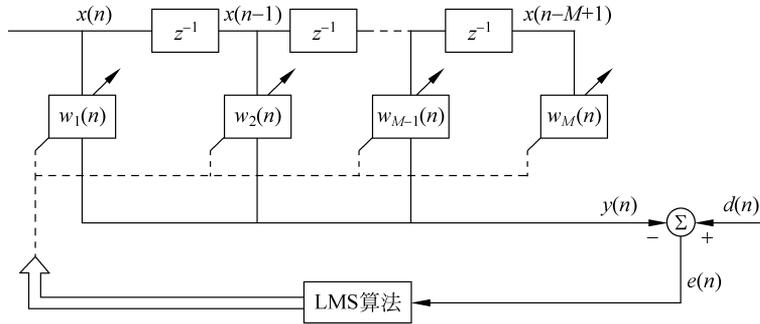


图 3-11 LMS 自适应横向滤波器原理图

3.3.2 LMS 自适应滤波器

LMS 自适应滤波器和维纳滤波器一样,也是以均方误差最小作为其最佳滤波准则的。下面我们推导最小均方误差与自适应滤波的权系数 W 之间的关系。具体设计自适应滤波器时,人们常以横向滤波器构成这种自适应滤波系统,如果此时的 $h(n)$ 就是 $w(n)$,其长度为 N ,则从图 3-11 可得

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} w(m)x(n-m) = w(n) * x(n) \quad (3-70)$$

将 j 时刻滤波器的输出写成滤波器单位脉冲响应的若干取值与输入信号进行若干次移位后的值的乘积的和,就可以将式(3-70)改写成

$$y_j = \sum_{i=1}^N w_i x_{ij} \quad (3-71)$$

再将其表示成矩阵形式

$$y_j = \mathbf{X}_j^T \mathbf{W} = \mathbf{W}^T \mathbf{X}_j \quad (3-72)$$

其中,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{Nj} \end{bmatrix}$$

则误差信号就可以表示为

$$e_j = d_j - y_j = d_j - \mathbf{W}^T \mathbf{X}_j \quad (3-73)$$

得到误差信号的表达式之后,就可以知道均方误差的表达式为

$$E[e_j^2] = E[(d_j - y_j)^2] \quad (3-74)$$

将上式展开得

$$\begin{aligned} E[e_j^2] &= E[d_j^2] - 2E[d_j \mathbf{X}_j^T] \mathbf{W} + \mathbf{W}^T E[\mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T] \mathbf{W} \\ &= E[d_j^2] - 2\mathbf{R}_{dx}^T \mathbf{W} + \mathbf{W}^T \mathbf{R}_{xx} \mathbf{W} \end{aligned} \quad (3-75)$$

其中, $\mathbf{R}_{dx} = E[d_j \mathbf{X}_j]$, $\mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T]$, 并且 \mathbf{R}_{xx} 是对称矩阵 $\mathbf{R}_{xx}^T = \mathbf{R}_{xx}$ 。

从式(3-75)中得到一个信息,因为输入信号 x 和期望信号 d 已知,系统权系数 W 是未知量,则可以将均方误差 $E[e_j^2]$ 看作是以系统权系数 W 为自变量的二次函数,又由于 R_{xx} 为 x 的自相关矩阵,至少为半正定矩阵,所以 $R_{xx} \geq 0$,则均方误差 $E[e_j^2]$ 一定有最小值。

当输入信号和期望信号均为平稳随机信号时,均方误差 $E[e_j^2]$ 可以看作系统权系数的一元二次函数,在几何上是一个中间下凹的超抛物型曲面,具有唯一的最低点,沿着曲面下降到最低点,均方误差也取到最小值,此时对应的权系数 W^* 为滤波性能最好的最佳权系数。在数学上,可用梯度沿着该曲面调节权矢量的各个元素来得到均方误差 $E[e_j^2]$ 的最小值。当梯度为 0 时,达到超抛物曲面的最低点,也就得到了最佳权系数。

令梯度为 0,即

$$\nabla_j = \left[\frac{\partial E[e_j^2]}{\partial w_1} \quad \frac{\partial E[e_j^2]}{\partial w_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial E[e_j^2]}{\partial w_N} \right]^T = 0 \quad (3-76)$$

由于

$$\frac{\partial E[e_j^2]}{\partial w} = 2E[e_j] \frac{\partial E[e_j]}{\partial w} \quad (3-77)$$

因为 $e_j = d_j - W^T X_j$, 所以有

$$\nabla_j = 2E \left[e_j \left[\frac{\partial e_j}{\partial w_1} \quad \frac{\partial e_j}{\partial w_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial e_j}{\partial w_N} \right]^T \right] = -2E[e_j X_j] = 0 \quad (3-78)$$

由式(3-78)得出,当滤波器的单位脉冲响应取最佳值时,其误差信号和输入信号是正交的。还可以用式(3-75)对 W 求导得到

$$\nabla = 2R_{xx}W - 2R_{dx} = 0 \quad (3-79)$$

注意: $W^T W = W^2$, 另外 W 与 W^T 也没有本质区别,一个横向一个纵向表示,可以看到

$$R_{xx}W = R_{dx} \quad (3-80)$$

由此可得最佳权矢量为

$$\begin{cases} W^* = R_{xx}^{-1} R_{dx} \\ [W^*]^T = R_{dx}^T [R_{xx}^{-1}]^T = R_{dx}^T R_{xx}^{-1} \end{cases} \quad (3-81)$$

当权矢量取最佳值时,均方误差将取到最小值

$$E[e_j^2]_{\min} = E[d_j^2] - 2R_{dx}^T W^* + [W^*]^T R_{xx} W^* = E[d_j^2] - R_{dx}^T W^* \quad (3-82)$$

或者将上式取转置,用下式表示:

$$E[e_j^2]_{\min} = E[d_j^2] - W^{*T} R_{dx} \quad (3-83)$$

从几何角度观察,此函数表示 $\{E[e_j^2]_{\min}, w_1, w_2, \dots, w_p\}$ 空间中的一个超抛物面。我们称为均方误差面,并以符号 ξ 表示。图 3-12 示出了权向量为二维时的情况,它有点像只碗的形状,而“碗底”则相当于均方误差最小的地方。

自适应滤波器与维纳滤波器相比,差别在于它加了一个识别控制环节,将输出的 y_j 与所希望的值 d_j 比较,看是否一样,如果有误差,则用 e_j 去控制 W ,使 W 逐步逼近 $E[e_j^2] = W_{\min}^*$,因此关键在于怎样简便地寻找 W^* 。虽然维纳解的表达式我们知道了,但仍然有几个问题:

(1) 需要知道 R_{xx} 和 R_{dx} ,而这两个都是我们事先不知道的;

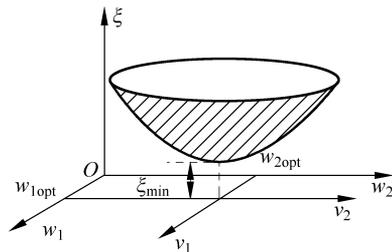


图 3-12 均方误差面和均方误差最小位置的示意图

- (2) 矩阵的逆需要的计算量太大；
 (3) 如果信号是非平稳的， \mathbf{R}_{xx} 和 \mathbf{R}_{dx} 每次都不一样，需要重复计算。

3.3.3 最陡下降法

不难看出，最佳权矢量解的形式和维纳解极为相似，解的过程也要求相关矩阵的逆运算，计算量非常大。因此就需要寻找更加优化的算法，不要求矩阵的逆，便可以找到最佳权矢量，因此便有了最陡下降法。最陡下降法 (Steepest Descent Method) 是一种常用的数值优化算法，用于求解无约束优化问题。它是一种基于梯度的迭代算法，可以在目标函数的梯度方向上进行搜索，以找到目标函数的最小值点。

最陡下降法是 Widrow 和 Hoff 两人在 20 世纪 50 年代提出的求最佳权矢量的简单而有效的一种递推方法。最陡下降法的基本思想是，从任意起点开始，沿着目标函数的梯度方向进行迭代搜索，每一步的迭代方向是目标函数在当前点处的最陡下降方向。最陡下降方向是目标函数在当前点处的负梯度方向，即梯度向量的反方向，如图 3-13 所示。最陡下降法的迭代公式可以表示为

$$\mathbf{W}_{j+1} = \mathbf{W}_j + \mu(-\nabla_j) = \mathbf{W}_j - \mu \nabla_j \quad (3-84)$$

其中， μ 为迭代步长，是一个正的常数，是一个控制稳定性和收敛速度的参量，也称为收敛因子， $-\nabla_j$ 是性能函数下降最快的方向。均方误差 $E[e_j^2]$ 与权矢量 \mathbf{W} 的关系在数学几何上是一个中间下凹的超抛物型曲面，搜索方向为曲面梯度的负方向。

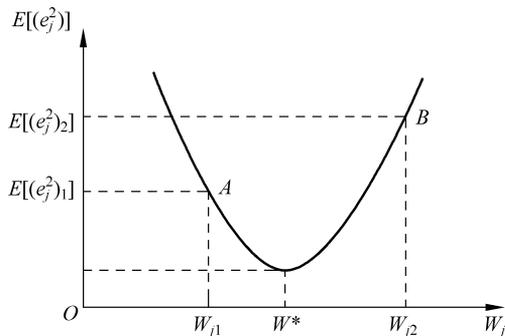


图 3-13 最陡下降法曲线图

一般是采用梯度下降的方法来进行迭代搜索出最小值，梯度下降又分为梯度下降、随机梯度下降和批量梯度下降。使用迭代搜索的方式一般都只能逼近维纳解，并不等同于维纳解。算法有两个关键：梯度 ∇_j 的计算以及收敛因子 μ 的选择。

1. ∇_j 的近似计算

想要得到最佳权系数,就需要滤波器输出的均方误差最小,均方误差代表着需要很多个误差,然后对误差的平方求平均值,这样在信号处理上就带来了问题,因为最佳权系数的求解是通过最陡梯度算法,也就是均方误差对权系数求偏导数得来的,但均方误差需要多个误差,是确定不了的,不知道滤波器权系数就无法确定均方误差,而不知道均方误差就无法确定滤波器权系数,这是互相矛盾的,两个条件必须先满足一个。从滤波器的结构和滤波器权系数的推导公式可以看出,均方误差和滤波器权系数是一个相互制约的关系,虽然通过最陡下降法得到了滤波器权系数的递推公式,但因为滤波器的结构,仍然无法确定滤波器权系数。为了解决这个问题,在实际工程上,只能用近似的方式,因此,由 Widrow 等提出采用梯度的估计值代替梯度的精确值,用单一时刻的误差平方代替均方误差计算来估计梯度,这样的算法也被称为维德罗-霍夫最小均方(Widrow-Hoff LMS)算法。一种粗略但是却十分有效地计算 ∇_j 的近似方法是:直接取 e_j^2 作为均方误差的估计值,即

$$\hat{\nabla}_j = \nabla [e_j^2] = 2e_j \nabla [e_j] \quad (3-85)$$

式中, $\nabla [e_j]$ 为

$$\nabla [e_j] = \nabla [d_j - \mathbf{W}^T \mathbf{X}_j] = -\mathbf{X}_j \quad (3-86)$$

将式(3-86)代入式(3-85)中,得到梯度的估计值

$$\hat{\nabla}_j = -2e_j \mathbf{X}_j \quad (3-87)$$

将式(3-87)代入式(3-84),于是最陡下降法的递推公式为

$$\mathbf{W}_{j+1} = \mathbf{W}_j + 2\mu e_j \mathbf{X}_j \quad (3-88)$$

2. μ 的选择

对权系数向量更新式(3-88)两边取数学期望,得

$$\begin{aligned} E[\mathbf{W}_{j+1}] &= E[\mathbf{W}_j] + 2\mu E[e_j \mathbf{X}_j] \\ &= E[\mathbf{W}_j] + 2\mu E\{\mathbf{X}_j [d_j - \mathbf{X}_j^T \mathbf{W}_j]\} \\ &= (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}_{xx}) E[\mathbf{W}_j] + 2\mu \mathbf{R}_{xd} \end{aligned} \quad (3-89)$$

式中, \mathbf{I} 为单位矩阵,且

$$\mathbf{R}_{dx} = E[d_j \mathbf{X}_j], \quad \mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T]$$

当 $j=0$ 时,有

$$E[\mathbf{W}_1] = (\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}_{xx}) E[\mathbf{W}_0] + 2\mu \mathbf{R}_{xd}$$

当 $j=1$ 时,有

$$\begin{aligned} E[\mathbf{W}_2] &= [\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}_{xx}] E[\mathbf{W}_1] + 2\mu \mathbf{R}_{xd} \\ &= [\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}_{xx}]^2 E[\mathbf{W}_0] + 2\mu [\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}_{xx}] \mathbf{R}_{xd} + 2\mu \mathbf{R}_{xd} \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

重复以上迭代至 $j+1$,则有

$$E[\mathbf{W}_{j+1}] = [\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}_{xx}]^{j+1} E[\mathbf{W}_0] + 2\mu \sum_{i=0}^j [\mathbf{I} - 2\mu \mathbf{R}_{xx}]^i \mathbf{R}_{xd} \quad (3-90)$$

由于 \mathbf{R}_{xx} 是实值的对称阵,我们可以写出其特征值分解式为

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{Q} \mathbf{\Sigma} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{\Sigma} \mathbf{Q}^{-1} \quad (3-91)$$

\mathbf{Q} 称为正交矩阵或特征矩阵, 利用正定阵 \mathbf{Q} 的性质 $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}$, $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$, 且 $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$ 是对角阵, 其对角元素 λ_1 是 \mathbf{R}_{xx} 的特征值。将式(3-91)代入式(3-90)后得

$$E[\mathbf{W}_{j+1}] = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{Q}\mathbf{\Sigma}\mathbf{Q}^{-1}]^{j+1} E[\mathbf{W}_0] + 2\mu \sum_{i=0}^j [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{Q}\mathbf{\Sigma}\mathbf{Q}^{-1}]^i \mathbf{R}_{xd} \quad (3-92)$$

能够推导出(过程省略)

$$E[\mathbf{W}_{j+1}] = \mathbf{Q}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{R}_{xd} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}\mathbf{R}_{xd} = \mathbf{W}_{\text{opt}} \quad (3-93)$$

其中, $\mathbf{R}_{xx}^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}$ 。

由此可见, 当迭代次数无限增加时, 权系数向量的数学期望值可收敛至 Wiener 解, 其条件是对角阵 $(\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{\Sigma})$ 的所有对角元素均小于 1, 即

$$|1 - 2\mu\lambda_{\max}| < 1$$

或

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}} \quad (3-94)$$

式中, λ_{\max} 是 \mathbf{R}_{xx} 的最大特征值。 μ 称为收敛因子, 它决定达到式(3-93)的速率。事实上, \mathbf{W}_{j+1} 收敛于 \mathbf{W}_{opt} 是由比值 $d = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ 决定, 该比值叫作谱动态范围。大的 d 值预示要花费很长的时间才会收敛到最佳权值。克服这一困难的方法是产生正交数据。

3.3.4 LMS 算法流程

LMS 算法实际上是一种梯度最陡下降算法, 具有简单、计算量小、易于实现等特点。这种算法不需要计算相关矩阵, 也不需要进行矩阵运算, 只要自适应线性组合器在每次迭代运算时都已知输入信号和参考响应即可。LMS 算法进行梯度估计的方法是以误差信号每一次迭代的瞬时平方值替代其均方值。梯度可近似为

$$\hat{\nabla}_j = -2e_j \mathbf{X}_j$$

用梯度估计值 $\hat{\nabla}_j$ 替代最陡下降法中的梯度真值 ∇_j , 得 LMS 算法滤波器权矢量迭代公式

$$\mathbf{W}_{j+1} = \mathbf{W}_j + 2\mu e_j \mathbf{X}_j$$

由此可知, 自适应迭代下一时刻的权系数矢量可以由当前时刻的权系数矢量加上以误差函数为比例因子的输入矢量得到。因此, LMS 算法也称随机梯度法。

基本 LMS 自适应算法步骤如下:

(1) 设定滤波器 $W(n)$ 的初始值 $W(1) = 0$, $0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}}$, λ_{\max} 为输入向量自相关矩阵 \mathbf{R} 的最大特征值。

(2) 计算滤波器实际输出估计值

$$\hat{d}(n) = \mathbf{W}^T(n) \mathbf{X}(n)$$

(3) 计算估计误差

$$e(n) = d(n) - \hat{d}(n)$$

(4) 计算 $(n+1)$ 时刻的滤波器系数

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + 2\mu e(n) \mathbf{X}(n)$$

(5) 将 n 增加至 $n+1$, 重复步骤(2)~步骤(4)。

3.4 应用实例

【例 3-4】 维纳滤波预测运动轨迹

假设一个点目标在 x, y 平面上绕单位圆做圆周运动, 由于外界干扰, 其运动轨迹发生了偏移。其中, x 方向的干扰为均值为 0, 方差为 0.05 的高斯噪声; y 方向干扰为均值为 0, 方差为 0.06 的高斯噪声。

要求:

- (1) 产生满足要求的 x 方向和 y 方向随机噪声 500 个样本;
- (2) 明确期望信号和观测信号;
- (3) 设计 FIR 维纳滤波器, 确定最佳传递函数, 并用该滤波器处理观测信号, 得到其最佳估计。(注: 自行设定误差判定阈值, 根据阈值确定滤波器的阶数或传递函数的长度)

问题分析与思路: 物体的运动轨迹分解为 x 方向和 y 方向, 并假设两个方向上运动相互独立。分别将运动轨迹离散为一系列点, 作为滤波器的输入, 分别在两个方向上进行滤波, 最终再合成运动轨迹。

程序设计思路: 生成期望信号-添加噪声-计算相关矩阵-求解最佳滤波器系数-滤波运算-输出信号-合成轨迹。

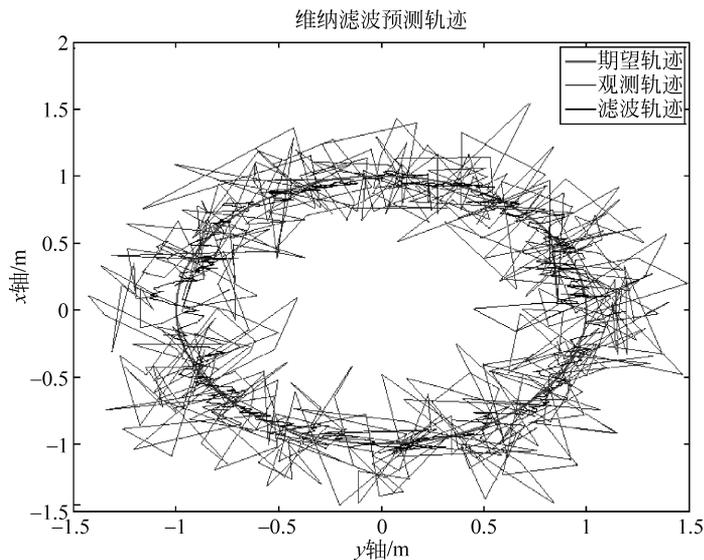


图 3-14 维纳滤波预测运动轨迹

MATLAB 程序完整代码:

```
% 该程序使用 Wiener 滤波方法对圆周运动轨迹进行控制
% 信号模型: d = s + no 观测信号 = 期望信号 + 噪声信号
% 进行一次 Wiener 滤波, 得到最佳滤波器系数
clear
close all
N = 500;
theta = linspace(0, 2 * pi, N);           % 极坐标参数
s_x = cos(theta);                         % x, y 方向上的期望信号
```

```

s_y = sin(theta);
no_x = normrnd(0, sqrt(0.05), 1, N);           % 高斯白噪声
no_y = normrnd(0, sqrt(0.06), 1, N);
d_x = s_x + no_x;                             % 观测信号
d_y = s_y + no_y;
M = 500; % M 为滤波器的阶数
%% 对 x 方向上数据进行滤波
rxx = xcorr(d_x);
Rxx = zeros(N);
% temp = toeplitz(rxx);
for i = 1:N                                     % 观测信号的相关矩阵
    for j = 1:N
        Rxx(i, j) = rxx(N + i - j);
    end
end
rx = xcorr(s_x, d_x);                          % 观测信号与期望信号的相关矩阵
Rxd = rx(N:N + M - 1);                        % 向量而非矩阵
hopt_x = Rxx \ Rxd';
% de_x = conv(hopt_x, d_x);
de_x = zeros(1, N);
for n = 1:N
    for i = 1:n - 1
        de_x(n) = de_x(n) + hopt_x(i) * d_x(n - i);
    end
end
de_x(1:2) = d_x(1:2);
ems_x = sum(d_x.^2) - Rxd * hopt_x;
e_x = de_x - s_x;
% de_x(N - 1:N) = d_x(N - 1:N);
%% 对 y 方向上数据进行滤波 处理思路同 x 方向
ryy = xcorr(d_y); Ryy = zeros(N);
for i = 1:N
    for j = 1:N
        Ryy(i, j) = ryy(N + i - j);
    end
end
% temp = toeplitz(ryy); % Ryy = temp(1:M, N:N + M - 1);
ryd = xcorr(s_y, d_y);
% temp = toeplitz(ryd);
% Ryd = temp(1:N, N:length(temp));
Ryd = ryd(N:N + M - 1); hopt_y = Ryy \ Ryd';
% de_y = conv(hopt_y, d_y);
de_y = zeros(1, N);
for n = 1:N
    for i = 1:n - 1
        de_y(n) = de_y(n) + hopt_y(i) * d_y(n - i);
    end
end
de_y(1:2) = d_y(1:2); ems_y = sum(d_y.^2) - Ryd * hopt_y; e_y = de_y - s_y;
% de_y(N - 1:N) = d_y(N - 1:N);
%% plot
figure
plot(s_x, s_y, 'r', 'linewidth', 2)
hold on

```

```

plot(d_x,d_y,'b')
hold on
plot(de_x,de_y,'k-')
title('维纳滤波预测轨迹')
legend('期望轨迹','观测轨迹','滤波轨迹')
ylabel('x轴/m');
xlabel('y轴/m');

```

【例 3-5】 Kalman 滤波在温度测量中的应用

假设我们要研究的对象是一个房间的温度。根据经验判断,这个房间的温度大概在 25℃,可能受空气流通、阳光等因素影响,房间内温度会小幅度地波动。我们以分钟为单位,定时测量房间温度,这里的 1 分钟,可以理解为采样时间。假设测量温度时,外界的天气是多云,阳光照射时有时无,同时房间不是 100%密封的,可能有微小的与外界空气的交换,即引入过程噪声 w_k ,其方差为 Q_k ,大小假定为 $Q_k=0.01$ (假如不考虑过程噪声的影响,即真实温度是恒定的,那么这时候 $Q_k=0$)。对照式(3-59),相应地, $A(k)=1$, $Q_k=0.01$,状态 x 是在第 k 分钟时的房间温度,是一维的。那么该系统的状态方程可以写为

$$x(k) = x(k-1) + w(k)$$

现在用温度计开始测量房间的温度,假设温度计的测量误差为 $\pm 0.5^\circ\text{C}$,从出厂说明书上我们得知该温度计的方差为 0.25。也就是说,温度计第 k 次测量的数据不是 100%准确的,它是有测量噪声 v_k ,并且其方差 $R_k=0.25$,因此容易想到该系统的观测方程为

$$y(k) = C(k)x(k) + v(k)$$

总的来说 $x(k)$ 表示温度,是一维变量, $A(k)=1$ 、 $C(k)=1$, w_k 、 v_k 的方差分别为 Q_k 、 R_k 。

模型建好以后,就可以利用 Kalman 滤波了。假如要估算第 k 时刻的实际温度值,首先要根据第 $k-1$ 时刻的温度值来预测 k 时刻的温度。

(1) 假定第 $k-1$ 时刻的温度值测量值为 24.9°C ,房间真实温度为 25°C ,该测量值的偏差是 0.1°C ,即协方差 $P(k-1)=0.1^2$ 。

(2) 在第 k 时刻,房间的真实温度是 25.1°C ,温度计在该时刻测量的值为 25.5°C ,偏差为 0.4°C 。我们用于估算第 k 时刻的温度有两个温度值,分别是 $k-1$ 时刻 24.9°C 和 k 时刻的 25.5°C ,如何融合这两组数据,得到最逼近真实值的估计呢?

首先,利用 $k-1$ 时刻温度值预测第 k 时刻的温度,其预计偏差 $P'_k = P(k-1) + Q_k = 0.02$,计算 Kalman 增益 $H_k = P'_k / (P'_k + R_k) = 0.0741$,那么这时候利用 k 时刻的观测值,得到温度的估计值为

$$\hat{x}(k) = 24.9 + 0.0741 \times (25.1 - 24.9) = 24.915^\circ\text{C}$$

可见,与 24.9°C 和 25.5°C 相比较,Kalman 估计值 24.915°C 更接近真实值 25.1°C 。此时更新 k 时刻的偏差 $P_k = (1 - H_k C_k) P'_k = 0.0186$ 。最后由 $\hat{x}(k) = 24.915^\circ\text{C}$ 和 $P_k = 0.0186$,可以继续对下一时刻观测数据 y_{k+1} 进行更新和处理。

(3) 这样,Kalman 滤波器就不不断地把方差递归,从而估算出最优的温度值。当然,我们需要确定 Kalman 滤波器两个初始值,分别是 x_0 和 P_0 。

MATLAB 程序完整代码:

```

% 程序说明:Kalman 滤波用于一维温度测量的实例
function Kalman_main

```


$$x(n) = \sin(40\pi n) + \sin(80\pi n) + \sin(120\pi n) \quad (3-96)$$

式中, $\text{Noise}x(n)$ 是输入信号, $x(n)$ 是三频率分量合成的谐波信号, $\text{Noise}(n)$ 是信噪比为 3dB 或者 -3dB 的高斯白噪声。实验分别对输入了信噪比为 3dB 或者 -3dB 的高斯白噪声的正弦波信号进行滤波处理, 将正弦波看作期望信号, 步长设置为 0.001, 滤波器长度设置为 200。实验结果如图 3-15~图 3-17 所示。

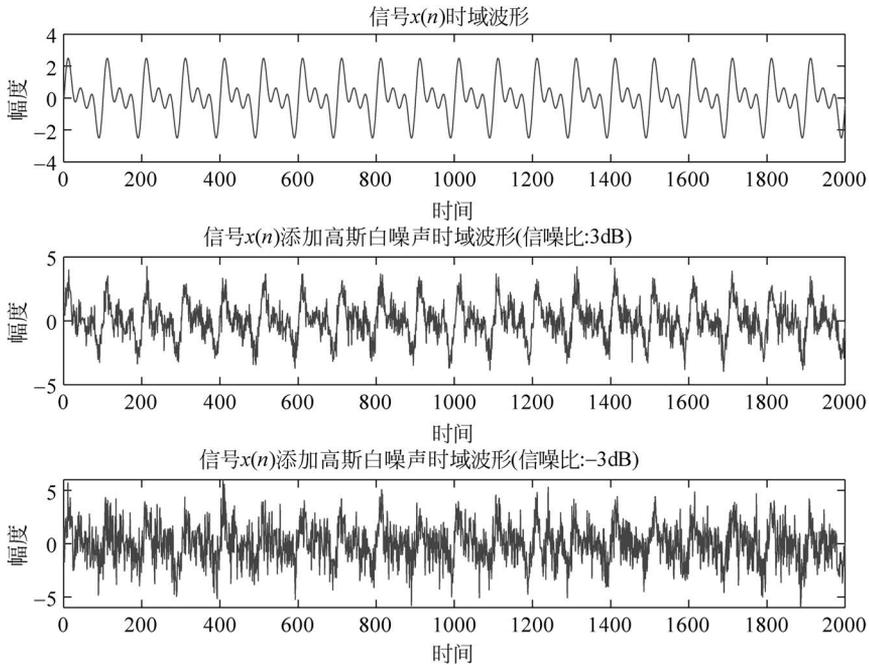


图 3-15 LMS 算法滤波器的输入信号时域波形(正弦波)

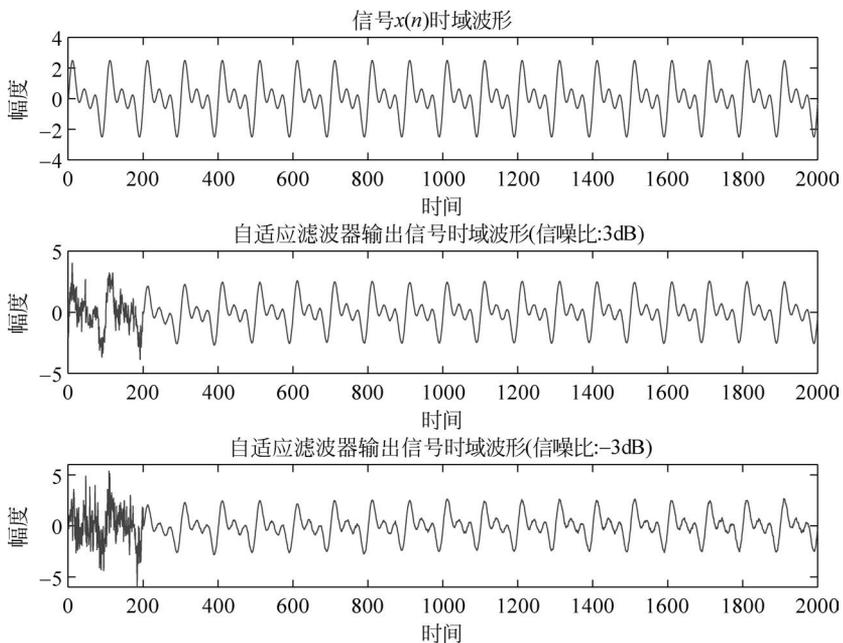


图 3-16 LMS 算法滤波器的输出信号时域波形(正弦波)

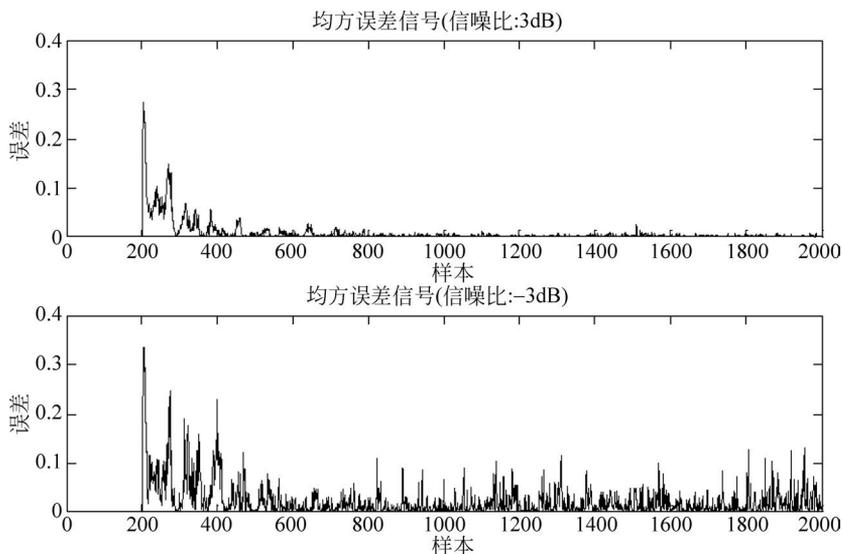


图 3-17 均方误差信号波形(正弦波)

实验结果分析:

通过程序运行的结果图可以看出,基于 LMS 算法设计的滤波器能够很好地完成滤波功能。当输入信号是正弦波时,LMS 滤波器拥有非常好的收敛性能,并且误差信号是逐渐收敛于最佳维纳解的。此外,无论是信噪比为 3dB 的输入信号还是信噪比为 -3dB 的输入信号,都能够较好地完成滤波,通过比较看出,信噪比为 3dB 的输入信号比信噪比为 -3dB 的输入信号滤波效果好,收敛性会更好。

MATLAB 程序完整代码:

```

clc,clear,close all;
% 第一部分(创建信号:正余弦噪声信号)
N = 2000;           % 采样点数
Fs = 2000;         % 采样频率
t = 0:1/Fs:1;      % 时间
x = sin(2 * pi * 20 * t) + sin(2 * pi * 40 * t) + sin(2 * pi * 60 * t);
a = 1;
Noisex_1 = awgn(x,3);           % 添加高斯白噪声,信噪比 3dB
Noisex_2 = awgn(x,-3);         % 添加高斯白噪声,信噪比 -3dB

figure(1);
subplot(3,1,1);
plot(x);
axis([0,2000,-4,4]);
ylabel('幅度');
xlabel('时间');
title('信号 x(n)时域波形');
subplot(3,1,2);
plot(Noisex_1);
axis([0,2000,-5,5]);
ylabel('幅度');
xlabel('时间');
title('信号 x(n)添加高斯白噪声时域波形(信噪比:3dB)');

```

```

subplot(3,1,3);
plot(Noisex_2);
axis([0,2000,-6,6]);
ylabel('幅度');
xlabel('时间');
title('信号 x(n) 添加高斯白噪声时域波形(信噪比: -3dB)');

% 第二部分(LMS 算法滤波)
k = 200; % 滤波器长度
u = 0.001; % 步长
y_1 = zeros(1,N); % 输出信号定义
y_1(1:k) = Noisex_1(1:k);
w_1 = zeros(1,k);
e_1 = zeros(1,N);
% 用 LMS 算法迭代滤波
for i = k+1:N
    XN_1 = Noisex_1(i-k+1:i);
    y_1(i) = w_1 * XN_1;
    e_1(i) = x(i) - y_1(i);
    w_1 = w_1 + 2 * u * e_1(i) * XN_1;
    E_1(i) = e_1(i)^2;
end
y_2 = zeros(1,N);
y_2(1:k) = Noisex_2(1:k);
w_2 = zeros(1,k);
e_2 = zeros(1,N);
% 用 LMS 算法迭代滤波
for i = k+1:N
    XN_2 = Noisex_2(i-k+1:i);
    y_2(i) = w_2 * XN_2;
    e_2(i) = x(i) - y_2(i);
    w_2 = w_2 + 2 * u * e_2(i) * XN_2;
    E_2(i) = e_2(i)^2;
end

figure(2);
subplot(3,1,1);
plot(x);
axis([0,2000,-4,4]);
ylabel('幅度');
xlabel('时间');
title('信号 x(n) 时域波形');
subplot(3,1,2);
plot(y_1);
axis([0,2000,-5,5]);
ylabel('幅度');
xlabel('时间');
title('自适应滤波器输出信号时域波形(信噪比:3dB)');
subplot(3,1,3);
plot(y_2);
axis([0,2000,-6,6]);
ylabel('幅度');
xlabel('时间');
title('自适应滤波器输出信号时域波形(信噪比: -3dB)');

```

```

figure(3);
subplot(2,1,1);
plot(E_1);
title('均方误差信号(信噪比:3dB)');
subplot(2,1,2);
plot(E_2);
title('均方误差信号(信噪比:-3dB)');
    
```

习题

3-1 比较维纳滤波器和卡尔曼滤波器的主要异同点。

3-2 对于如图习题 3-2 所示的系统模型,假设 $h(n)$ 是因果的,用相关函数法推导出维纳滤波器的维纳-霍夫方程的离散形式,以及从该方程中解出了最佳滤波器 $h_{\text{opt}}(n)$ 后的最小均方误差的最简式。

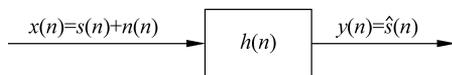


图 习题 3-2

3-3 写出卡尔曼滤波的状态方程与量测方程,并解释。画出卡尔曼滤波的信号模型。

3-4 在测试某正弦信号 $x(n) = \sin \frac{\pi}{4}n$ 的过程中叠加有白噪声,即测试结果为

$$y(n) = \sin \frac{\pi}{4}n + v(n)$$

设计一个长为 $N=4$ 的有限冲激响应滤波器,对 $y(n)$ 进行处理后得到 $\hat{x}(n)$,它与 $x(n)$ 的误差的均方值最小。求该滤波器的冲激响应和估计误差的均方值。

3-5 考虑如图习题 3-5 所示的自适应噪声对消系统,(1)写出性能函数的表达式;(2)确定自适应增益的范围;(3)写出这种情况下的 LMS 算法。

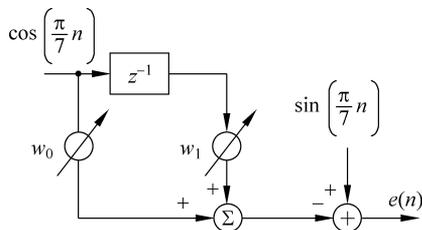


图 习题 3-5