第1章 Chapter

绪　　论

内容提要

本章主要介绍水力学的定义及研究内容。同时介绍连续介质模型、液体的特征及主要物理力学性质和作用在液体上的力。

1.1　液体的连续介质模型

液体是由无数没有微观运动的质点组成的没有空隙存在的连续体,并且认为表征液体运动的各物理量在空间和时间上都是连续分布的。

在连续介质模型中,质点是最小单元,具有“宏观小”“微观大”的特性。

1.2　液体的主要物理性质

液体的主要物理性质有质量和重量、易流性、黏滞性、压缩性、表面张力等。

1. 质量和重量

质量是惯性的度量,质量越大,惯性越大。质量用符号 m 表示。

液体单位体积内所具有的质量称为液体的密度,用 ρ 表示。

对于均质液体,若其体积为 V,质量为 m,则其密度为 $\rho=\dfrac{m}{V}$。

一般情况下,可将密度视为常量。如水的密度 $\rho=1000\ \mathrm{kg/m^3}$。水银的密度 $\rho_m=13\,600\ \mathrm{kg/m^3}$。

2. 黏滞性

易流性:液体受到切力后发生连续变形的性质。

黏滞性:液体在流动状态之下抵抗剪切变形的性质。

切力、黏性、变形率之间的关系可由牛顿内摩擦定律给出:

$$F=\mu A\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{1.1}$$

式中，F 为相邻液层之间的内摩擦力，亦可写为应力的形式 $\tau=\frac{F}{A}$，在液体内部它们总是成对出现的；μ 为动力黏度；A 为流层间接触面的面积；$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$为液体的角变形率或流速梯度。

3. 压缩性

液体受压后体积减小的性质称为液体的压缩性。用体积压缩系数来衡量压缩性大小：

$$\beta=-\frac{\frac{\mathrm{d}V}{V}}{\mathrm{d}p} \tag{1.2}$$

β 的单位为 $\mathrm{m^2/N}$，其值越大，表示液体越易压缩。

β 的倒数称为体积弹性系数，用 K 表示，即

$$K=\frac{1}{\beta}=-\frac{\mathrm{d}p}{\frac{\mathrm{d}V}{V}} \tag{1.3}$$

其单位为 $\mathrm{N/m^2}$，K 值越大，液体越难压缩。

4. 表面张力

表面张力是液体自由表面在分子作用半径一薄层内，由于分子引力大于斥力而在表层沿表面方向产生的拉力。通常用表面张力系数 σ 来度量，其单位为 N/m。

1.3 作用于液体的力

液体无论是处于静止或运动状态都受到各种力的作用，这些力可以分为两类。

(1) 表面力：作用在液体的表面或截面上且与作用面的面积成正比的力，如压力 P、切力 F。表面力又称为面积力。

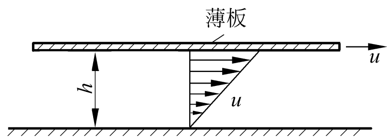
(2) 质量力：作用在脱离体内每个液体质点上的力，其大小与液体的质量成正比。如重力、惯性力。对于均质液体，质量力与体积成正比，故又称为体积力。

单位质量所受到的质量力称为单位质量力，由下式给出：

$$\left.\begin{aligned} f_x&=\frac{F_x}{M}\\ f_y&=\frac{F_y}{M}\\ f_z&=\frac{F_z}{M}\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

习题及解答

1.1 如图有一薄板在水面上以 $u=2.0$ m/s 的速度作水平运动，设流速沿水深 h 按线性分布。水深 $h=1.0$ cm，水温为 20℃。试求：(1)切应力 τ 沿水深 h 的分布；(2)若薄板的面积为 $A=2.0\ \mathrm{m}^2$，求薄板所受到的阻力 F。



题 1.1 图

解：(1) 按水温 20℃，查表查得水的动力黏度 $\mu=1.005\times10^{-3}\ \mathrm{N\cdot s/m^2}$，则由牛顿内摩擦定律有

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\mu\frac{u}{h}=1.005\times10^{-3}\ \mathrm{N\cdot s/m^2}\times\frac{2\ \mathrm{m/s}}{0.01\ \mathrm{m}}=0.201\ \mathrm{N/m^2}$$

切应力 τ 为常数，沿间隙呈矩形分布。则薄板所受到的阻力为

(2) $F=\tau A=0.201\ \mathrm{N/m^2}\times2\ \mathrm{m^2}=0.402\ \mathrm{N}$

1.2 如图有一宽浅的矩形渠道，其流速分布可由下式表示：

$$u=0.002\frac{\rho g}{\mu}\left(hy-\frac{y^2}{2}\right)$$

式中，ρ 为水的密度；g 为重力加速度；μ 为水的动力黏度。

当水深 $h=0.5$ m 时，试求：(1)切应力 τ 的表达式；(2)渠底($y=0$)、水面($y=0.5$ m)处的切应力 τ；(3)绘制沿铅垂线方向的切应力分布图。

解：(1) 切应力 τ 的表达式为

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=0.002\rho g(h-y)$$

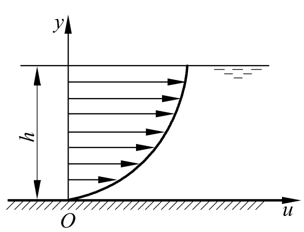
(2) 在渠底：

$$\tau\big|_{y=0}=0.002\times9810\ \mathrm{N/m^3}\times0.5\ \mathrm{m}=9.81\ \mathrm{N/m^2}$$

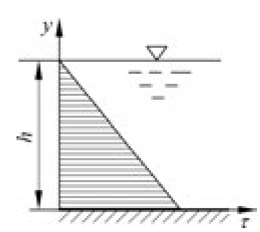
在水面：

$$\tau\big|_{y=0.5}=0$$

(3) 由于切应力为线性分布，由已知两处的 τ 即可绘出切应力分布图如题 1.2 解图所示。



题 1.2 图



题 1.2 解图

1.3 如图有一圆管，其水流流速分布为抛物线型分布

$$u=0.001\frac{g}{\nu}(r_0^2-r^2)$$

式中，g 为重力加速度；ν 为水的运动黏度。设半径 $r_0=0.5$ m。

试求：(1)切应力的表达式；(2)计算 $r=0$ 和 $r=r_0$ 处的切应力，并绘制切应力的分布图；(3)用图分别表示图中矩形液块 A、B、C 经过微小时段 $\mathrm{d}t$ 后的形状以及上、下表面切应力的方向。

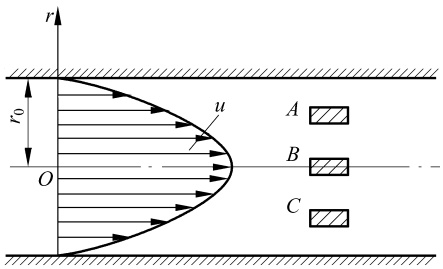
解：由牛顿内摩擦定律可求出 τ 的表达式。

(1) $\tau=-\mu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=0.002\rho g r$

(2) $\tau|_{r=0}=0$

$\tau|_{r=r_0}=0.002\times 9810\ \mathrm{N/m^3}\times 0.5\ \mathrm{m}=9.81\ \mathrm{N/m^2}$

(3) 作用在液块 A、B、C 上、下表面切应力的方向如题 1.3 解图所示。



题 1.3 图

题 1.3 解图

1.4 由内外两个圆筒组成的量测液体黏度的仪器如图所示。两筒之间充满被测液体。内筒半径为 r_1，外筒与转轴连接，其半径为 r_2，旋转角速度为 ω。内筒悬挂于一金属丝下，金属丝上所受的力矩 M 可以通过扭转角的值确定。外筒与内筒底面间隙为 δ，内筒高度为 H，试推导所测液体动力黏度 μ 的计算式。

解：内筒侧面的黏性切应力为 $\tau=\mu\dfrac{\omega r_2}{\delta_1}$，其中 $\delta_1=r_2-r_1$，阻力矩

$$M_1=\mu\frac{\omega r_2}{\delta_1}2\pi r_1 H r_1$$

而内筒之底面上，距转轴为 r 处的切应力为

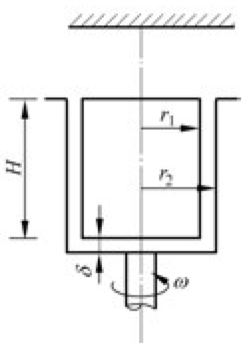
$$\tau=\mu\omega\frac{r}{\delta}$$

这样内筒的底面受到的阻力矩为

$$M_2=\int_0^{r_1}\mu\frac{\omega r}{\delta}2\pi r^2\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\mu\frac{\omega}{\delta}\pi r_1^4$$

由于 $M=M_1+M_2$，则有

$$\mu=\frac{M}{\dfrac{\omega}{\delta}\pi r_1^4\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2\delta r_2 H}{r_1^2\delta_1}\right)}$$



题 1.4 图

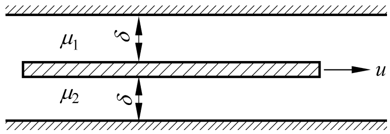
1.5 一极薄平板在动力黏度分别为 μ_1 和 μ_2 两种油层界面上以 $u=0.6\ \mathrm{m/s}$ 的速度运动，如图所示。$\mu_1=2\mu_2$，薄平板与两侧壁面之间的流速均按线性分布，距离 δ 均为 3 cm。两油层在平板上产生的总切应力 $\tau=25\ \mathrm{N/m^2}$。求油的动力黏度 μ_1 和 μ_2。

解：由牛顿内摩擦定律可知

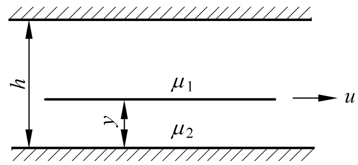
$$\tau=\tau_1+\tau_2=\mu_1\frac{du}{dy}+\mu_2\frac{du}{dy}$$
$$=\mu_2\left(2\frac{du}{dy}+\frac{du}{dy}\right)=3\mu_2\frac{0.6}{0.03}=60\mu_2$$

由于 $60\mu_2=\tau=25\ \text{N/m}^2$，所以

$$\mu_2=0.415\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2,\quad \mu_1=2\mu_2=0.830\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2$$



题 1.5 图



题 1.6 图

1.6 如图所示，有一很窄间隙，高为 h，其间被一平板隔开，平板向右拖动速度为 u，平板一边液体的动力黏度为 μ_1，另一边液体的动力黏度为 μ_2，计算平板放置的位置 y。要求：(1)平板两边切应力相同；(2)拖动平板的阻力最小。

解：(1) 由牛顿内摩擦定律可写出

$$\tau_1=\mu_1\frac{u}{h-y},\quad \tau_2=\mu_2\frac{u}{y}$$

由于平板两边的 $\tau_1=\tau_2$，即

$$\mu_1\frac{u}{h-y}=\mu_2\frac{u}{y}$$

可解出 $y=\dfrac{\mu_2 h}{\mu_1+\mu_2}$，由于总切应力为

$$\tau=\mu_1\frac{u}{h-y}+\mu_2\frac{u}{y}$$

根据极值原理 $\dfrac{d\tau}{dy}=\dfrac{\mu_1 u}{(h-y)^2}-\mu_2\dfrac{u}{y^2}=0$，可解出

$$y=\frac{h}{1+\sqrt{\dfrac{\mu_1}{\mu_2}}}$$

1.7 (1) 一直径为 5 mm 的玻璃管铅直插在 20℃ 的水银槽内，试问管内液面较槽中液面低多少？(2)为使水银测压管的误差控制在 1.2 mm 之内，试问测压管的最大直径为多大？

解：(1) $h=\dfrac{10.8}{d}=\dfrac{10.8}{5}\ \text{mm}=2.16\ \text{mm}$

(2) 由 $1.2=\dfrac{10.8}{d}$，则得 $d=9$ mm。

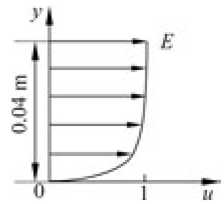
1.8 温度为 10℃ 的水，若使体积压缩 1/2000，问压强需增加多少？

解：查得温度 $t=10$℃ 时弹性系数 $K=2.11\times10^9\ \text{N/m}^2$，则根据弹性系数公式有

$$dp=K\frac{dV}{V}=2.11\times10^9\ \text{N/m}^2\times\frac{1}{2000}=1.06\times10^6\ \text{N/m}^2$$

补充题及解答

1.1 如图所示，水流在平板上运动，靠近板壁附近的流速呈抛物线型分布，E 点为抛物线的端点，$y=0.04$ m 处的流速为 $u=1.0$ m/s，并且流速梯度$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=0$，水的动力黏度 $\mu=1.0\times10^{-3}$ Pa·s，试求 $y=0,2,4$ cm 处的切应力。



补充题 1.1 图

解：设流速分布为

$$u=Ay^2+By+C \tag{1}$$

由题给条件：$y=0, u=0$，代入式(1)可得出 $C=0$。

由 $y=0.04$ m，$u=1.0$ m/s 代入式(1)可得出

$$0.0016A+0.04B=1 \tag{2}$$

再由

$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0.04}=2Ay+B=0$$

可得出 $0.08A+B=0$，解得

$$B=-0.08A \tag{3}$$

将式(3)代入式(2)可解出

$$-0.0016A=1$$

即 $A=-625$，则 $B=50$，将 A、B、C 的值代入式(1)得

$$u=-625y^2+50y$$

可求出切应力

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=1.0\times10^{-3}(-1250y+50)$$

这样有

$$\tau|_{y=0}=5.0\times10^{-2}\ \mathrm{N/m^2},\quad \tau|_{y=0.02}=2.5\times10^{-2}\ \mathrm{N/m^2},\quad \tau|_{y=0.04}=0$$

1.2 一转轴在轴承中转动，如图所示，转轴直径 $d=0.36$ m，轴承长度 $l=1.0$ m，轴与轴承之间的间隙 $\delta=0.2$ mm，其中充满动力黏度 $\mu=0.75\ \mathrm{N\cdot s/m^2}$ 的润滑油。如果已知轴的转速 $n=200$ r/min，求轴克服油的黏性阻力所消耗的功率。

解：由于油层与轴承接触面上的速度为零。油层与轴接触面上的速度为

$$u=r\omega=r\frac{\pi n}{30}=0.18\times\frac{3.14\times200}{30}\ \mathrm{m/s}=3.77\ \mathrm{m/s}$$

设油层在缝隙内的速度是线性的，即

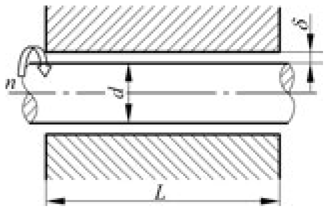
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{u}{\delta}$$

轴表面上的切力

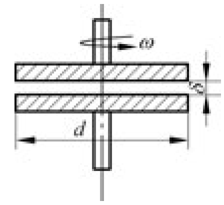
$$F=\mu A\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=0.75\times3.14\times0.36\times1.0\times\frac{3.77}{0.0002}\ \mathrm{N}=1.598\times10^4\ \mathrm{N}$$

克服摩擦所消耗的功率

$$N=F\times u=1.598\times10^4\ \mathrm{N}\times3.77\ \mathrm{m/s}=6.02\times10^4\ \mathrm{W}$$



补充题 1.2 图



补充题 1.3 图

1.3 如图所示，上、下两平行圆盘的直径为 d，两盘之间的间隙为 δ，间隙中流体的动力黏度为 μ。若下盘不动，上盘以角速度 ω 旋转，不计空气摩擦力，求转动圆盘所需的阻力矩 M。

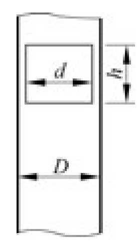
解：假设两盘之间流体的速度为直线分布，上盘半径 r 处的切应力为

$$\tau=\mu\frac{u}{\delta}=\frac{\mu r\omega}{\delta}$$

则所需阻力矩为

$$M=\int_0^{\frac{d}{2}}(\tau\times 2\pi r\,\mathrm{d}r)r=\frac{2\pi\mu\omega}{\delta}\int_0^{\frac{d}{2}}r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi\mu\omega d^4}{32\delta}$$

1.4 有一重量为 $G=9.5$ N 的圆柱体，直径 $d=150$ mm，高度 $h=160$ mm，在一内径 $D=150.5$ mm 的圆管中以速度 $u=4.6$ cm/s 匀速下滑，求圆柱体和管壁间隙中油液的动力黏度 μ。



补充题 1.4 图

解：由力的平衡条件

$$G=\tau A$$

而

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$

则

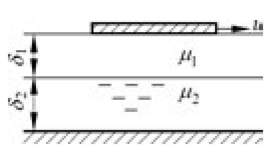
$$G=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}A$$

$$\mathrm{d}u=0.046\ \mathrm{m/s},\quad \mathrm{d}r=\frac{0.1505\ \mathrm{m}-0.15\ \mathrm{m}}{2}=0.000\,25\ \mathrm{m}$$

代入上式可解出

$$\mu=\frac{G\mathrm{d}r}{\mathrm{d}uA}=\frac{9.5\times 0.000\,25}{0.046\times 0.16\times 3.14\times 0.15}\ \mathrm{Pa\cdot s}=0.685\ \mathrm{Pa\cdot s}$$

1.5 如图所示，在水槽的静止液体表面上，有一面积 $A=1500\ \mathrm{cm}^2$ 的平板，拉动平板以速度 $u=0.5$ m/s 作水平移动，使平板与槽底之间的水流作层流运动。平板下液体分两层，它们的动力黏度与厚度分别为 $\mu_1=0.142\ \mathrm{N\cdot s/m^2}$，$\delta_1=0.1$ cm；$\mu_2=0.235\ \mathrm{N\cdot s/m^2}$，$\delta_2=0.14$ cm。试绘制平板间液体的流速分布图和切应力分布图，并计算平板所受的内摩擦力 F。



补充题 1.5 图

解：由于平板与槽底之间的水流为层流，其切应力可用牛顿内摩擦定律求解，表面液层速度等于平板移动速度。设在液层分界面上，流速为 u'，切应力为 τ，因 δ_1、δ_2 很小，近似认为流速按直

线分布。

上层液体的切应力

$$\tau_1=\mu_1\frac{u-u'}{\delta_1}$$

下层液体的切应力

$$\tau_2=\mu_2\frac{u'-0}{\delta_2}$$

根据题给条件 $\tau=\tau_1=\tau_2$，即

$$\mu_1\frac{u-u'}{\delta_1}=\mu_2\frac{u'}{\delta_2}$$

可解出

$$u'=\frac{\mu_1\delta_2 u}{\mu_2\delta_1+\mu_1\delta_2}=\frac{0.142\times0.0014\times0.5}{0.235\times0.001+0.142\times0.0014}\ \text{m/s}=0.23\ \text{m/s}$$

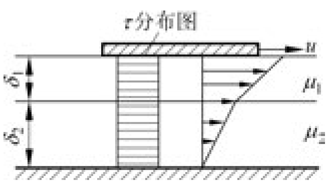
因为

$$\tau=\tau_1=\mu_1\frac{u-u'}{\delta_1}=0.142\frac{0.5-0.23}{0.001}\ \text{N/m}^2=38.34\ \text{N/m}^2$$

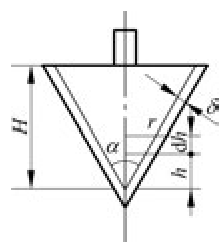
平板所受的内摩擦力

$$F=\tau_1 A=38.34\ \text{N/m}^2\times1500\times10^{-4}\ \text{m}^2=5.75\ \text{N}$$

切应力分布如补充题 1.5 解图所示。



补充题 1.5 解图



补充题 1.6 图

1.6 一圆锥体绕其垂直中心轴以等角速度 ω 旋转，如图所示。已知锥体高为 H，锥顶角为 2α，锥体与锥腔之间的间隙为 δ，间隙内润滑油的动力黏度为 μ，试求锥体旋转所需的阻力矩 M 的表达式。

解：设高度为 h 处的圆锥半径为 $r=h\tan\alpha$，沿 h 增加一微分量 $\mathrm{d}h$，其微分表面积 $\mathrm{d}A=2\pi r\dfrac{\mathrm{d}h}{\cos\alpha}$。设缝隙内的流速按直线变化，则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{u}{\delta}=\frac{\omega r}{\delta}$$

所以在 $\mathrm{d}h$ 范围内的力矩为

$$\mathrm{d}M=r\tau\mathrm{d}A=r\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}A=r\mu\frac{\omega r}{\delta}2\pi r\frac{\mathrm{d}h}{\cos\alpha}=2\pi\mu\frac{\omega}{\delta}\frac{\tan^3\alpha}{\cos\alpha}h^3\mathrm{d}h$$

则作用于锥体的阻力矩为

$$M=\int\mathrm{d}M=2\pi\mu\frac{\omega}{\delta}\frac{\tan^3\alpha}{\cos\alpha}\int_0^H h^3\mathrm{d}h=2\pi\mu\frac{\omega}{\delta}\frac{\tan^3\alpha}{\cos\alpha}\frac{H^4}{4}$$

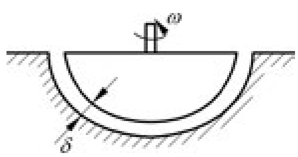
1.7 一半球体，其半径为 R，它绕竖直轴旋转的角速度为 ω，半球体与凹槽之间隙为 δ，如图所示，槽面涂有润滑油，其动力黏度为 μ。试推证半球体旋转时，所需的旋转力矩为 $M=\frac{4}{3}\pi R^4 \frac{\mu\omega}{\delta}$。

解：由于球面上的任意点到转轴的距离为 $R\sin\theta$，则该点的切应力

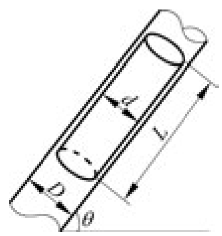
$$\tau=\mu \frac{\omega R}{\delta}\sin\theta$$

旋转力矩为 $M=\iint\limits_A \tau R\sin\theta \mathrm{d}A$，将 $\mathrm{d}A=2\pi R\sin\theta R\mathrm{d}\theta$ 及 τ 的表达式代入可得

$$M=2\pi R^4 \frac{\mu\omega}{\delta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=-2\pi R^4 \frac{\mu\omega}{\delta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}\cos\theta=\frac{4}{3}\pi R^4 \frac{\mu\omega}{\delta}$$



补充题 1.7 图



补充题 1.8 图

1.8 一个圆柱体沿管道内壁下滑。圆柱体直径 $d=100$ mm，长度 $L=300$ mm，自重 $G=10$ N。管道直径 $D=101$ mm，倾角 $\theta=45°$，内壁涂有润滑油，如图所示。测得圆柱体下滑速度为 $u=0.23$ m/s，求润滑油的动力黏度 μ。

解：自重沿流动方向的分量与圆柱所受阻力平衡，则

$$G\sin\theta=F=\mu A \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\mu 2\pi \frac{d}{2}L \frac{u}{\delta}$$

代入具体数值可得

$$\mu=\frac{\delta\times G\times\sin\theta}{\pi\times d\times L\times u}=\frac{0.0005\ \mathrm{m}\times 10\ \mathrm{N}\times 0.707}{3.14\times 0.1\ \mathrm{m}\times 0.3\ \mathrm{m}\times 0.23\ \mathrm{m/s}}=0.163\ \mathrm{N\cdot s/m^2}$$

第2章 Chapter

水 静 力 学

内容提要

水静力学研究液体平衡(包括静止和相对平衡)规律及其在工程实际中的应用。其主要任务是根据液体的平衡规律,计算静水中的点压强,确定受压面上静水压强的分布规律和求解作用于平面和曲面上的静水总压力等。

2.1 静水压强及其特性

在静止液体中,作用在单位面积上的静水压力定义为静水压强,用字母 p 表示,即

$$p=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta A} \tag{2.1}$$

单位是 N/m^2(或 Pa),kN/m^2(或 kPa)。

静水压强具有两个特性:

(1) 静水压强的方向垂直指向作用面;

(2) 静止液体中任一点处各个方向的静水压强的大小都相等,与该作用面的方位无关,即

$$p_x=p_y=p_z=p_n$$

2.2 液体平衡微分方程

1. 欧拉液体平衡微分方程

其平衡微分方程为

$$\left.\begin{aligned}f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0\\ f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0\\ f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$