

集合不仅可用来表示数及其运算,更可用于非数值信息的表示和处理。因此,在程序语言、数据结构、数据库、算法设计和人工智能等领域都得到了广泛的应用。本章介绍集合的基本知识和应用。

3.1 集合的基本概念

3.1.1 集合与元素的基本概念

什么是集合和集合的元素?

德国数学家康托极其直观地将其定义为:把若干确定的有区别的(不论是具体的或抽象的)事物合并起来,看作一个整体,就称为一个**集合**,其中各事物称为该集合的**元素**。但就是这个直观的描述所产生的理论,在当时几乎导致了整个数学体系的崩溃,当时康托提出用一一对应准则来比较无穷集元素的个数,这种崩溃源于对无穷量的认识,许多数学家对康托的集合论观点产生激烈的质疑,直到 20 世纪初,许多数学成果都建立在集合论的基础之上,集合论才被数学界认可。

1908 年,策梅洛提出公理化集合论,后经改进形成无矛盾的集合论公理系统,简称 ZF 公理系统。原本直观的集合概念被建立在严格的公理基础之上,从而避免了一个集合是否属于自己的悖论的出现,这被称为公理化集合论。与此对应,1908 年以前由康托创立的集合论称为朴素集合论。公理化集合论是对朴素集合论的严格处理,它保留了朴素集合论的有价值的成果并消除了其可能存在的悖论。从康托提出集合论至今,集合论的每一步发展都是与康托的开拓性工作分不开的。

集合是一个不能精确定义的基本概念。

定义 3.1 一般把一些确定的、彼此不同的或具有共同性质的事物汇集成的一个整体,称为一个**集合**,组成集合的那些事物就称为集合的**元素**。

例如,清华大学的学生是一个集合,每名学生就是这个集合的一个元素;全体实数也是一个集合,每个实数就是这个集合的一个元素;26 个英文字母也是一个集合,每个英文字母就是这个集合的一个元素;等等。

一般用大写英文字母表示集合,用小写英文字母表示元素。

例如,以符号 A 表示一个集合, a 表示一个元素。如果 a 是 A 的元素,则称 a 属于 A ,

记为 $a \in A$, 也称 a 是 A 的元素或 A 包含 a , 如果 a 不是 A 的元素, 则称 a 不属于 A , 记为 $a \notin A$ 。

集合分为有穷集和无穷集。

定义 3.2 空集和只含有有限多个元素的集合称为有穷集, 否则称为无穷集。

集合的表示方法常用下面两种。

(1) 枚举法又称列举法, 将集合中的元素一一列出来, 或列出足够多的元素以反映集合中元素的特征, 元素之间用逗号“,”隔开, 并用花括号“{ }”在两边括起来, 表示这些元素构成整体。

枚举法: 列出集合的所有元素或部分元素, 可用于有穷集和有一定规律的无穷集。如 $A = \{a, b, \dots, z\}$, $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$, $C = \{a, \{c\}, \{c, d\}\}$ 集合中的元素还可以是集合。

(2) 谓词法又叫构造法, 如果 $P(x)$ 是表示元素 x 具有某种性质 P 的谓词, 则所有具有性质 P 的元素构成一个集合。

谓词法: 用谓词来描述集合中元素的性质。

如集合 $B = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge (x+5=0)\}$, 这是描述法表示, 则谓词描述法为

$$B = \{x \mid F(x) \wedge G(x)\}$$

其中, 设 $F(x): x \in \mathbf{R}, G(x): x+5=0$ 。

集合的性质:

(1) 集合的元素是彼此不同的, 相同的元素应该认为是同一个元素。如 $\{1, 3, 5\} = \{5, 3, 3, 1\}$ 。

(2) 集合的元素是无序的。如 $\{1, 3, 5\} = \{5, 3, 1\}$ 。

注: 元素与集合的关系是属于 \in 和不属于 \notin 。

本书规定: 对任何集合 A , 都有 $A \notin A$ 。

例 3.1 令 $A = \{a, \{b, c\}, d, \{\{d\}\}\}$, 则

$$\{b, c\} \in A \quad b \notin A \quad \{\{d\}\} \in A \quad \{d\} \notin A \quad d \in A$$

3.1.2 集合与集合间的关系

定义 3.3 设 A, B 是任意的两个集合, 若 A 的每一个元素都是 B 的元素, 则称 A 为 B 的子集, 也称 B 包含 A , 或称 A 包含于 B , 或称 A 被 B 包含。记为 $A \subseteq B$ 。

例如 $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{2, 3\}$, 则有 $A \subseteq B, C \subseteq B$ 。

如果 A 不被 B 包含, 则记为 $A \not\subseteq B$ 。

注: (1) 子集符号化为 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$;

(2) 对任何集合 A , 都有 $A \subseteq A$ 。

定义 3.4 设 A, B 是任意的两个集合, 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称集合 A 与 B 相等, 记为 $A = B$ 。

定理 3.1 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ 。

证明 充分性, 即证: $A = B \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ 。

$$A = B \Rightarrow (\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x(x \in B \rightarrow x \in A)) \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

必要性, 即证: $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ 。

反证法：假设 $A \neq B \Rightarrow (\exists x(x \in A \wedge x \notin B)) \Rightarrow A \not\subseteq B$ 或

$$A \neq B \Rightarrow (\exists x(x \in B \wedge x \notin A)) \Rightarrow B \not\subseteq A$$

与已知条件矛盾，所以 $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ 。

因此，定理成立。

今后证明两个集合相等，主要利用这个互为子集的判定条件，证明必要性时所使用的反证法也是常使用的方法。

定义 3.5 设 A, B 是任意的两个集合，若 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ ，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A \subset B$ 。

如果 A 不是 B 的真子集，则记为 $A \not\subset B$ 。

例如 $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{2, 3\}$ ，则有 $A \subset B, C \subset B, B \subseteq B$ 。

注：真子集符号化为 $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$ 。

例 3.2 判断下列集合 A, B 是否相等。

(1) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 1\}$ (2) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 3, 1\}$ (3) $A = \{\{1, 2\}, 3\}, B = \{2, 3, 1\}$

解

(1) 相等 (2) 相等 (3) 不相等

定义 3.6 不含任何元素的集合称为空集，记为 \emptyset 。

例如集合 $\{x \mid x^2 + 1 = 0 \cap x \in \mathbf{R}\}$ 就是空集。

注：空集符号化为 $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$ 。

定理 3.2 空集是任意集合的子集。

证明

$$\emptyset \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T$$

因右边的条件式中前件为假，所以整个条件式是真。

推论 空集是唯一的。

证明

假设存在空集 \emptyset_1 和 \emptyset_2 ，则 $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2$ 且 $\emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$ ，因此 $\emptyset_1 = \emptyset_2$ 。

根据子集和空集的定义，可知，对于每一个非空集合 A ，至少有两个不同的子集，分别是 \emptyset 和 A 。

例 3.3 判断下列命题是否为真。

(1) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (2) $\emptyset \in \emptyset$ (3) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (4) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

解

(1) 真 (2) 假 (3) 真 (4) 真

定义 3.7 在一定范围内，如果所有集合均为某一集合的子集，则称该集合为全集，记为 E 。

设全集 $E = \{a, b, c\}$ ，则它的所有子集为 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$ 。

定义 3.8 给定集合 A ，由 A 的所有子集为元素组成的集合称为集合 A 的幂集。记为 $P(A)$ 。

注：幂集符号化为 $P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ 。

例 3.4 设 $A = \{a, b, c\}$, 求 $P(A)$ 。

解

$$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

定理 3.3 设 A 为有穷集, A 含有 n 个元素, 则 A 的幂集 $P(A)$ 所含元素的个数为 2^n 。

证明 集合 A 的 m ($m=0, 1, 2, \dots, n$) 个元素组成的子集个数为从 n 个元素中取 m 个元素的组合数, 即 C_n^m , 故 $P(A)$ 的元素个数为 $|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ 。

根据二项式定理 $(x+y)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m x^m y^{n-m}$, 令 $x=y=1$, 得 $2^n = \sum_{m=0}^n C_n^m$, 故 $|P(A)| = 2^n$ 。

例 3.5 求下列集合的幂集。

- (1) $P(\emptyset)$ (2) $P(\{\emptyset\})$ (3) $P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$ (4) $P(\{1, \{2, 3\}\})$
 (5) $P(\{\{1, 2\}, \{2, 1, 1\}, \{2, 1, 1, 2\}\})$

解

- (1) $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
 (2) $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
 (3) $P(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
 (4) $P(\{1, \{2, 3\}\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2, 3\}\}, \{1, \{2, 3\}\}\}$
 (5) $P(\{\{1, 2\}, \{2, 1, 1\}, \{2, 1, 1, 2\}\}) = P(\{\{1, 2\}\}) = \{\emptyset, \{\{1, 2\}\}\}$

例 3.6 判断下列命题的真假。

- (1) $\{x\} \subseteq \{x\}$ (2) $\{x\} \in \{x\}$ (3) $\{x\} \in \{x, \{x\}\}$ (4) $\{x\} \subseteq \{x, \{x\}\}$
 (5) $\{x\} \subseteq \{x\} \cup x$ (6) 若 $x \in A, A \in P(B)$, 则 $x \in P(B)$
 (7) 若 $x \subseteq A, A \subseteq P(B)$, 则 $x \subseteq P(B)$

解

- (1) 真 (2) 假 (3) 真 (4) 真 (5) 真 (6) 假 (7) 真

3.2 集合的运算

集合之间的关系和初级运算可以用文氏图进行形象的描述。文氏图的表示方法是首先画一个矩形表示全集 E , 在矩形内画一些圆或其他的几何图形来表示集合, 不同的圆代表不同的集合。

如集合 $A = \{a, b, c\}$, 用文氏图表示如图 3.1 所示。

集合的运算, 就是以给定集合为对象, 按照确定的规则得到另外一些新集合的过程。集合的基本运算有并 (\cup)、交 (\cap)、相对补 ($-$)、绝对补 (\sim) 和对称差 (\oplus) 等运算。

定义 3.9 设 A, B 为任意两集合, 由集合 A 的所有元素或集合 B 的所有元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的并集, 记作 $A \cup B$ 。

A 与 B 的并集符号化为 $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$ 。

例 3.7 设 $A = \{a, b, c, d\}, B = \{c, d, e, f\}$, 则 $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$ 。

注: 集合是由互不相同的元素组成的, 在 $A \cup B$ 中 c, d 只能写一次, 不能重写。

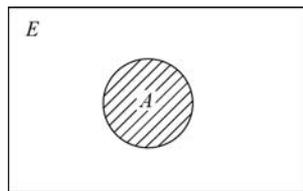


图 3.1 集合 A 的文氏图

定义 3.10 设 A, B 为任意两集合, 由集合 A 和集合 B 公共元素组成的集合, 称为集合 A 与 B 的交集, 记作 $A \cap B$ 。

A 与 B 的交集符号化为 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ 。

例 3.8 设 $A = \{a, b, c, d\}, B = \{c, d, e, f\}$, 则 $A \cap B = \{c, d\}$ 。

并集和交集的文氏图如图 3.2 和图 3.3 所示。

并集和交集的推广: 设 A_1, A_2, \dots, A_n 是有限多个集合, 则

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\}$$

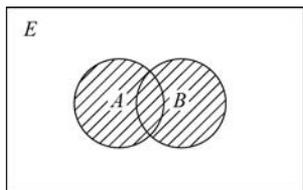


图 3.2 $A \cup B$ 的文氏图

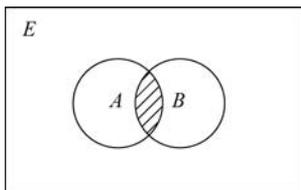


图 3.3 $A \cap B$ 的文氏图

定义 3.11 设 A, B 为任意两集合, 由属于集合 A 但不属于集合 B 的元素构成的集合, 称为集合 A 与 B 的差集(又称 B 对于 A 的补集或相对补集), 记作 $A - B$ 。

A 与 B 的差集符号化为 $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ 。

例 3.9 设 $A = \{a, b, c, d\}, B = \{c, d, e, f\}$, 则 $A - B = \{a, b\}$ 。

定义 3.12 设 E 为全集, A 为任意一集合, 则全集 E 与 A 的差集, 称为集合 A 的补集(又称绝对补集), 记作 $\sim A$ 。

A 的补集符号化为 $\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$ 。

特别地, $\sim E = \emptyset, \sim \emptyset = E$ 。

例 3.10 设 $E = \{a, b, c, d, e, f\}, A = \{c, d, e\}$, 则 $\sim A = \{a, b, f\}$ 。

差集和补集的文氏图如图 3.4 和图 3.5 所示。

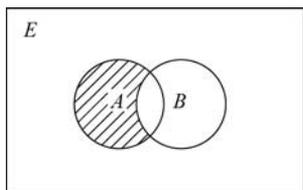


图 3.4 $A - B$ 的文氏图

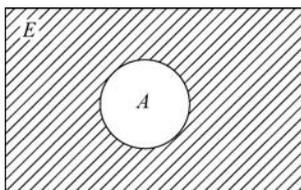


图 3.5 $\sim A$ 的文氏图

定义 3.13 设 A, B 为任意两集合, 由属于集合 A 而不属于集合 B 或者属于集合 B 而不属于集合 A 的元素构成的集合, 称为集合 A 与 B 的对称差, 记作 $A \oplus B$ 。

A 与 B 的对称差符号化为

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

等价定义: $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ 。

例 3.11 设 $A = \{a, b, c, d\}, B = \{c, d, e, f\}$, 则 $A \oplus B = \{a, b, e, f\}$ 。

对称差的文氏图如图 3.6 所示。

例 3.12 设任意集合 A , 给定全集 E , 求 $A \oplus A, E \oplus A, \emptyset \oplus A, A \oplus \sim A$ 。

解

$A \oplus A = \emptyset; E \oplus A = \sim A; \emptyset \oplus A = A; A \oplus \sim A = E$ 。

例 3.13 分别对条件(1)~(5), 确定集合 X 与下述哪些集合相等。

$S_1 = \{1, 2, \dots, 8, 9\}, S_2 = \{2, 4, 6, 8\}, S_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}, S_4 = \{3, 4, 5\},$

$S_5 = \{3, 5\}$

- (1) 若 $X \cap S_3 = \emptyset$, 则 $X = ?$
- (2) 若 $X \subseteq S_4, X \cap S_2 = \emptyset$, 则 $X = ?$
- (3) 若 $X \subseteq S_1, X \not\subseteq S_3$, 则 $X = ?$
- (4) 若 $X - S_3 = \emptyset$, 则 $X = ?$
- (5) 若 $X \subseteq S_3, X \not\subseteq S_1$, 则 $X = ?$

解

- (1) $X = S_2$; (2) $X = S_5$; (3) $X = S_1, S_2, S_4$; (4) $X = S_3, S_5$;
- (5) X 与 S_1, S_2, \dots, S_5 都不等。

以上定义了集合之间的基本运算及其文氏图表示。

根据以上对集合基本运算的定义, 可以得到集合论中的关于集合运算的基本定律。

设 A, B, C 是集合, 则下列运算定律成立。

- (1) 幂等律: $A \cup A = A, A \cap A = A$ 。
- (2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ 。
- (3) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ 。
- (4) 分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ 。
- (5) 同一律: $A \cup \emptyset = A, A \cap E = A$ 。
- (6) 零律: $A \cup E = E, A \cap \emptyset = \emptyset$ 。
- (7) 排中律: $A \cup \sim A = E$ 。
- (8) 矛盾律: $A \cap \sim A = \emptyset$ 。
- (9) 吸收律: $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$ 。
- (10) 德·摩根律: $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C), A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C),$
 $\sim(B \cup C) = \sim B \cap \sim C, \sim(B \cap C) = \sim B \cup \sim C,$
 $\sim \emptyset = E, \sim E = \emptyset$ 。
- (11) 双重否定律: $\sim(\sim A) = A$ 。

我们选证其中的一部分, 在这些证明中大量用到命题逻辑的等价式。在集合之间关系的证明中, 主要涉及两种类型的证明, 一种是证明一个集合为另一个集合的子集, 另一种是证明两个集合相等。

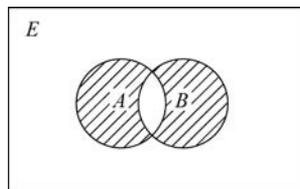


图 3.6 $A \oplus B$ 的文氏图

证明一个集合为另一个集合的子集的基本思想是：设 A, B 为两个集合公式，欲证公式 $A \subseteq B$ ，即证对于任意的 x 有 $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$ 成立。

证明两个集合相等的基本思想是：设 A, B 为两个集合公式，欲证公式 $A = B$ ，按照集合相等的定义即证 $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ 为真，也就是证明对于任意的 x 有 $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$ 和 $(x \in B) \Rightarrow (x \in A)$ 成立。对于某些恒等式可将这两个方向的推理合到一起，就是 $(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$ 。

例 3.14 证明 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ 。

证明 对任意的 x ,

$$\begin{aligned} x \in A - (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in (B \cup C)) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (\neg x \in B \wedge \neg x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \wedge x \in (A - C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C) \end{aligned}$$

所以等式 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ 成立。

例 3.15 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ 。

$$\begin{aligned} \text{证明 } A \cup (A \cap B) &= (A \cap E) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (E \cup B) \\ &= A \cap E \\ &= A \end{aligned}$$

例 3.16 证明 $A \cap E = A$ 。

证明 对任意 x ,

$$x \in A \cap E \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in E \Leftrightarrow x \in A$$

所以等式 $A \cap E = A$ 成立。

由此可以看出，集合运算的规律和命题演算的某些规律是一致的，所以命题演算的方法是证明集合等式的基本方法。此外，证明集合等式还可以应用已知等式代入的方法。

除了以上集合的基本运算定律以外，还有一些关于集合运算性质的重要结论。

设 A, B, C 是集合，则下列关于集合的**重要运算性质**成立。

- (1) $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$
- (2) $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$
- (3) $A - B \subseteq A$
- (4) $A - B = A \cap \sim B$
- (5) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$
- (6) $A \oplus B = B \oplus A$
- (7) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
- (8) $A \oplus \emptyset = \emptyset \oplus A = A$
- (9) $A \oplus A = \emptyset$

$$(10) A \oplus B = A \oplus C \Leftrightarrow B = C$$

例 3.17 证明 $A \oplus B = A \oplus C \Leftrightarrow B = C$ 。

证明 先证 $A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$ 。

已知 $A \oplus B = A \oplus C$, 则

$$\begin{aligned} A \oplus (A \oplus B) &= A \oplus (A \oplus C) \\ \Rightarrow (A \oplus A) \oplus B &= (A \oplus A) \oplus C \\ \Rightarrow \emptyset \oplus B &= \emptyset \oplus C \\ \Rightarrow B &= C \end{aligned}$$

$B = C \Rightarrow A \oplus B = A \oplus C$ 显然成立。

所以等式 $A \oplus B = A \oplus C \Leftrightarrow B = C$ 成立。

例 3.18 证明 $A - B = A \cap \sim B$ 。

证明 对任意 x ,

$$\begin{aligned} x \in (A - B) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \sim B \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap \sim B) \end{aligned}$$

所以等式 $A - B = A \cap \sim B$ 成立。

例 3.19 证明 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$ 。

证明

(1) 先证 $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$ 。

已知 $A \cup B = B$, 对 $\forall x$,

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B$$

所以 $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$ 。

反之证 $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ 。

$B \subseteq A \cup B$ 显然成立, 现在证 $A \cup B \subseteq B$ 。

已知 $A \subseteq B$, 对 $\forall x$,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Rightarrow x \in B \Rightarrow A \cup B \subseteq B$$

所以 $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ 。

因此等式 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ 成立。

(2) 再证 $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$ 。

显然 $A \cap B \subseteq A$ 成立, 现在证 $A \subseteq A \cap B$ 。

已知 $A \subseteq B$, 对 $\forall x$,

$$x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in A \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B) \Rightarrow A \subseteq A \cap B$$

所以 $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$ 。

反之证 $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$ 。

反证法 假设 A 不是 B 的子集, 则

$$\begin{aligned} \exists x(x \in A \wedge x \notin B) &\Rightarrow \exists x(x \in A \cap B \wedge x \notin B) \\ &\Rightarrow \exists x(x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin B) = 0 \end{aligned}$$

假设 A 不是 B 的子集不成立, 即 $A \subseteq B$ 。

所以 $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$ 。

因此等式 $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$ 成立。

(3) 最后证明 $A \cap B = A \Rightarrow A - B = \emptyset$ 。

$$A - B = A \cap \sim B = (A \cap B) \cap \sim B = A \cap (B \cap \sim B) = A \cap \emptyset = \emptyset$$

反之证 $A - B = \emptyset \Rightarrow A \cap B = A$ 。

因为 $A - B = A \cap \sim B = \emptyset$

$$\Rightarrow (A \cap \sim B) \cup B = \emptyset \cup B$$

$$\Rightarrow A \cup B = B$$

$$\Rightarrow A \cap B = A$$

因此等式 $A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$ 成立。

例 3.20 证明 $(A - B) \cup B = A \cup B$ 。

证明 $(A - B) \cup B = (A \cap \sim B) \cup B$

$$= (A \cup B) \cap (\sim B \cup B)$$

$$= (A \cup B) \cap E$$

$$= A \cup B$$

除了上述的基本定律和重要运算性质之外,关于集合之间的关系的证明,还有利用已知某些集合之间的关系,进而推导出这些集合之间的另外一些关系。

例 3.21 证明 $A - B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = B$ 。

证明 $A \cup B = (A - B) \cup B$ (根据例 3.20 等式)

$$= \emptyset \cup B$$

$$= B$$

因此 $A - B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = B$ 。

3.3 集合中元素的计数

定义 3.14 集合 A 中的元素个数称为集合 A 的**基数**,记为 $\text{card } A$ 或 $|A|$ 。

设 A 为集合,若 $\text{card } A = |A| = n$, n 为自然数,称 A 为有穷集合,否则称为无穷集合。

如 $A = \{a, b, c\}$, $\text{card } A = |A| = 3$; $B = \{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $\text{card } B = |B| = 0$ 都是有穷集合。自然数集合 \mathbf{N} , 整数集合 \mathbf{Z} , 有理数集合 \mathbf{Q} , 实数集合 \mathbf{R} , 复数集合 \mathbf{C} 等都是无穷集合。

无穷集合的基数问题比较复杂,因此这里重点讨论有穷集合的计数问题。

使用文氏图可以很方便地解决有穷集中元素的计数问题。首先根据已知条件把对应的文氏图画出来。一般情况,每一条性质决定一个集合,有多少条性质,就有多少个集合。如果没有特殊的说明,任何两个集合都画成相交的,然后将已知的元素个数填入该集合的区域内。常常从 n 个集合的交集填起,根据计算的结果将数字逐步填入所有的空白区域。若交集的数字是未知的,可以设为 x ,之后再根据题目中的已知条件,列出一方程或方程组,就可以求得所需要的结果。

例 3.22 有 120 名软件开发人员,其中 52 名熟悉 Java 语言,40 名熟悉 C# 语言,25 名熟悉这两种语言。试问:有多少名软件开发人员对这两种语言都不熟悉?

解 设用集合 A, B 分别表示熟悉 Java 和 C# 语言的软件开发人员。根据题意画出文

氏图,并把已知的集合基数填入该集合的相应区域,如图 3.7 所示。

$$|A|=52, \quad |B|=40, \quad |A \cap B|=25, \quad |A-B|=27, \quad |B-A|=15,$$

$$|A \cup B| = |A-B| + |A \cap B| + |B-A| = 27 + 25 + 15 = 67$$

$$\text{所以 } |\sim(A \cup B)| = 120 - 67 = 53.$$

因此,有 53 名软件开发人员对这两种语言都不熟悉。

例 3.23 对 24 名会外语的科技人员进行掌握外语情况的调查,其统计结果如下:会英、日、德和法语的人分别为 13、5、10 和 9 人;其中同时会英语和日语的有 2 人;会英、德和法语中任两种语言的的都是 4 人。已知会日语的人既不会法语也不会德语,分别求只会一种语言的人数和会三种语言的人数。

解 设用集合 A, B, C, D 分别表示会英、法、德、日语的人,根据题意得文氏图,如图 3.8 所示。

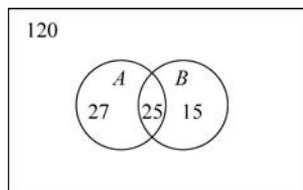


图 3.7 例 3.22 的文氏图

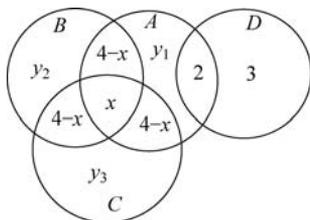


图 3.8 例 3.23 的文氏图

设同时会三种语言的有 x 人,只会英、法或德语一种语言的分别是 y_1, y_2, y_3 人。则有

$$\begin{cases} y_1 + 2(4-x) + x + 2 = 13 \\ y_2 + 2(4-x) + x = 9 \\ y_3 + 2(4-x) + x = 10 \\ y_1 + y_2 + y_3 + 3(4-x) + x = 19 \end{cases}$$

解方程组得 $x=1, y_1=4, y_2=2, y_3=3$ 。

因此,只会英、法、德、日语一种语言的分别是 4、2、3、3 人;会三种语言的为 1 人。

例 3.24 求 1~1000 之间(包含 1 和 1000 在内),既不能被 5 和 6 整除,也不能被 8 整除的数有多少个。

解 设集合 $S = \{x | x \in \mathbf{Z} \wedge 1 \leq x \leq 1000\}$, $A = \{x | x \in S \wedge x \text{ 能被 } 5 \text{ 整除}\}$, $B = \{x | x \in S \wedge x \text{ 能被 } 6 \text{ 整除}\}$, $C = \{x | x \in S \wedge x \text{ 能被 } 8 \text{ 整除}\}$,根据题意得文氏图,如图 3.9 所示。

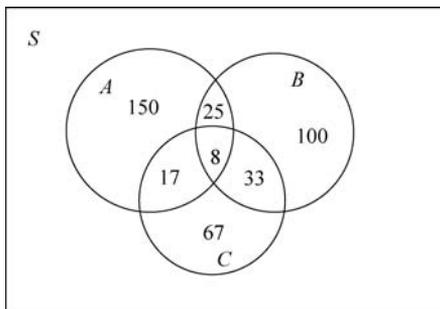


图 3.9 例 3.24 的文氏图

$\text{lcm}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示 x_1, x_2, \dots, x_n 的最小公倍数, 则

$$|A| = \text{int}(1000/5) = 200$$

$$|B| = \text{int}(1000/6) = 166$$

$$|C| = \text{int}(1000/8) = 125$$

$$|A \cap B| = \text{int}(1000/\text{lcm}(5, 6)) = 33$$

$$|A \cap C| = \text{int}(1000/\text{lcm}(5, 8)) = 25$$

$$|B \cap C| = \text{int}(1000/\text{lcm}(6, 8)) = 41$$

$$|A \cap B \cap C| = \text{int}(1000/\text{lcm}(5, 6, 8)) = 8$$

因此, 不能被 5、6 和 8 整除的数有 $1000 - (200 + 166 + 125 - 33 - 25 - 41 + 8) = 600$ 个。

定理 3.4 (包含排斥原理) 设 S 为有穷集, P_1, P_2, \dots, P_m 是 m 个性质。 S 中的任何元素 x 或者具有性质 P_i , 或者不具有性质 P_i ($i=1, \dots, m$), 两种情况必具其一。

若 A_i 表示 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集, 则 S 中不具有性质 P_1, P_2, \dots, P_m 的元素数为

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_m| &= |S| - \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| - \\ &\quad \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + \\ &\quad (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned}$$

推论 S 中至少具有一条性质的元素数为

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| &= \sum_{i=1}^m |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| + \\ &\quad \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \\ &\quad \dots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned}$$

证明 设 A_1, A_2 为有穷集合, 其元素个数分别为 $|A_1|, |A_2|$ 。

若 A_1, A_2 不相交, 即 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 则 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$ 。

若 A_1, A_2 相交, 即 $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, 则 $|A_1| = |A_1 \cap \bar{A}_2| + |A_1 \cap A_2|$ 。

同理

$$|A_2| = |A_2 \cap \bar{A}_1| + |A_1 \cap A_2|$$

则

$$|A_1| + |A_2| = |A_1 \cap \bar{A}_2| + |A_2 \cap \bar{A}_1| + 2|A_1 \cap A_2|$$

但

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1 \cap \bar{A}_2| + |A_2 \cap \bar{A}_1| + |A_1 \cap A_2|$$

故

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

又由于

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |E| - |A_1 \cup A_2|$$

所以

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |E| - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2|$$

同理可得到三个集合的情况:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |E| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

依此可推广到 m 个集合的情况:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = \sum_{i=1}^m |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - \sum_{i=1}^m |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

根据包含排斥原理,例 3.24 中既不能被 5 和 6 整除,也不能被 8 整除的数有

$$\begin{aligned} |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| &= |S| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - (|A \cap B \cap C|) \\ &= 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 \\ &= 600 \end{aligned}$$

例 3.25 用包含排斥原理及推论计算例 3.22。

解

设用集合 A, B 分别表示熟悉 Java 和 C# 语言的软件开发人员。

$$\begin{aligned} |A| &= 52, \quad |B| = 40, \quad |A \cap B| = 25, \\ |\bar{A} \cap \bar{B}| &= 120 - (|A| + |B|) + |A \cap B| \\ &= 120 - (52 + 40) + 25 \\ &= 53 \end{aligned}$$

因此,有 53 名软件开发人员对这两种语言都不熟悉。

例 3.26 某班有 25 个学生,其中 14 人会打台球,12 人会打乒乓球,6 人会打台球和乒乓球,5 人会打台球和网球,还有 2 人会打这三种球,已知 6 个会打网球的人都会打台球或乒乓球。求不会打球的人数。

解 设用集合 A, B, C 分别表示会打台球、会打乒乓球、会打网球的人。

$$|A| = 14, \quad |B| = 12, \quad |A \cap B| = 6, \quad |A \cap C| = 5, \quad |A \cap B \cap C| = 2, \quad |C| = 6$$

$$\begin{aligned} \text{又 } 6 &= |C \cap (A \cup B)| \\ &= |(C \cap A) \cup (C \cap B)| \\ &= |C \cap A| + |C \cap B| - |A \cap B \cap C| \\ &= 5 + |C \cap B| - 2 \end{aligned}$$

故

$$|C \cap B| = 3$$

先求出会打球的人,25 - 会打球的人 = 不会打球的人。

由包含排斥原理可知,会打球的人数为

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| + \\ &\quad |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| \\ &= (14 + 12 + 6) - (6 + 5 + 3) + 2 \\ &= 20 \end{aligned}$$

故 $25 - 20 = 5$ 人。

也可以直接求出不会打球的人数,计算如下:

$$\begin{aligned} |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| &= 25 - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + \\ &\quad |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C| \\ &= 25 - (14 + 12 + 6) + (6 + 5 + 3) - 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

因此,不会打球的有 5 人。

习题 3

1. 列出下述集合的全部元素:

(1) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x \text{ 是偶数} \wedge x < 15\}$;

(2) $B = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge 4 + x = 3\}$;

(3) $C = \{x \mid x \text{ 是十进制的数字}\}$ 。

2. 用谓词法表示下列集合:

(1) {奇整数集合};

(2) {小于 7 的非负整数集合};

(3) $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ 。

3. 用列元素法表示下列集合。

(1) $S_1 = \{x \mid x \text{ 是十进制的数字}\}$;

(2) $S_2 = \{x \mid x = 2 \cup x = 5\}$;

(3) $S_3 = \{x \mid x \in \mathbf{N} \cap 3 < x < 12\}$;

(4) $S_4 = \{x \mid x^2 - 1 = 0 \cap x > 3\}$;

(5) $S_5 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{Z} \cap 0 \leq x \leq 2 \cap 1 \leq y \leq 0\}$ 。

4. 对任意集合 A, B, C , 确定下列命题的真假性。

(1) 如果 $A \in B \wedge B \in C$, 则 $A \in C$ 。

(2) 如果 $A \in B \wedge B \in C$, 则 $A \in C$ 。

(3) 如果 $A \subset B \wedge B \in C$, 则 $A \in C$ 。

5. 求下列集合的幂集。

(1) $\{a, b, c\}$

(2) $\{a, \{b, c\}\}$

(3) $\{\emptyset\}$

(4) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$$(5) \{\{a, b\}, \{a, a, b\}, \{a, b, a, b\}\}$$

6. 给定自然数集合 N 的下列子集。

$$A = \{1, 2, 7, 8\}$$

$$B = \{x \mid x^2 < 50\}$$

$$C = \{x \mid x \text{ 可以被 } 3 \text{ 整除且 } 0 \leq x \leq 30\}$$

$$D = \{x \mid x = 2^K, K \in I \wedge 0 \leq K \leq 6\}$$

列出下面集合的元素。

$$(1) A \cup B \cup C \cup D$$

$$(2) A \cap B \cap C \cap D$$

$$(3) B - (A \cup C)$$

$$(4) (\bar{A} \cap B) \cup D$$

7. 对下列集合,画出其文氏图。

$$(1) \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$(2) A - (B - \bar{C})$$

$$(3) A \cap (\bar{B} \cup C)$$

8. 设 F 表示一年级大学生的集合, S 表示二年级大学生的集合, M 表示数学专业学生的集合, R 表示计算机专业学生的集合, T 表示学离散数学课学生的集合, G 表示星期一晚上参加音乐会的学生的集合, H 表示星期一晚上很迟才睡觉的学生的集合。问: 下列各句子所对应的集合表达式分别是什么?

(1) 所有计算机专业二年级的学生在学离散数学课。

(2) 这些且只有这些学离散数学课的学生或者星期一晚上去听音乐会的学生在星期一晚上很迟才睡觉。

(3) 学离散数学课的学生都没参加星期一晚上的音乐会。

(4) 这个音乐会只有大学一、二年级的学生参加。

(5) 除去数学专业和计算机专业以外的二年级学生都去参加了音乐会。

9. 对 60 个人的调查表明,有 25 人阅读《每周新闻》杂志,26 人阅读《时代》杂志,26 人阅读《幸运》杂志,9 人阅读《每周新闻》和《幸运》杂志,11 人阅读《每周新闻》和《时代》杂志,8 人阅读《时代》和《幸运》杂志,还有 8 人什么杂志都不阅读。那么阅读全部 3 种杂志的有多少人? 只阅读《每周新闻》的有多少人? 只阅读《时代》的有多少人? 只阅读《幸运》的有多少人? 只阅读一种杂志的有多少人?

10. 75 个学生去书店买语文、数学、英语课外书,每种书每个学生至多买 1 本。已知有 20 个学生每人买 3 本书,55 个学生每人至少买 2 本书。设每本书的价格都是 1 元,所有的学生总共花费 140 元。那么恰好买 2 本书的有多少个学生? 至少买 2 本书的学生花费多少元? 买一本书的有多少个学生? 至少买一本书的有多少个学生? 没买书的有多少个学生?

11. 设 $|A| = 3, |P(B)| = 64, |P(A \cup B)| = 256$, 求 $|B|, |A \cap B|, |A - B|, |A \oplus B|$ 。

12. 求不超过 120 的素数个数。

13. 求 1~250 这 250 个整数中,至少能被 2、3、5、7 之一整除的数的个数。

14. 化简下列各式。

$$(1) (A \cap B) \cup (A - B)$$

$$(2) A \cup (B - A) - B$$

$$(3) (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$$

15. 设 A, B, C 为任意三个集合,

(1) 证明: $(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$ 。

(2) 在什么条件下, (1) 中的等号成立?

16. 75 名儿童到游乐场玩, 他们可以骑旋转木马, 坐滑翔铁道, 乘宇宙飞船。已知其中 20 人这三种游戏都玩过, 其中 55 人至少乘过其中的两种。若每样乘坐一次的费用是 5 元, 游乐场总共收入 700 元, 试确定有多少儿童没有乘坐其中任何一种。

