

连续时间信号与系统的复频域分析

5.1 引言

傅里叶变换提供了一套在时域和频域中处理信号的强有力工具。信号的某些特性在频域中反而比在时域中更容易确定。但仍有一部分信号不存在傅里叶变换,因而无法使用频域分析法。而且傅里叶反变换求解比较复杂,即从频域到时域的转换比较复杂。本章介绍一种新的变换域方法,即拉普拉斯变换(Laplace Transform, LT),简称拉氏变换。该变换将时域映射到复频域,为连续时间信号与系统的分析提供了比傅里叶变换更为广泛的特性描述。

本章从傅里叶变换入手,介绍拉普拉斯变换的定义,详细描述利用拉普拉斯变换进行连续时间信号与系统的复频域分析,并针对实际应用介绍系统函数及其特性,最后描述系统的复频域方框图和流图的表示。

5.2 拉普拉斯变换

5.2.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

在信号的频域分析中,如果信号满足狄利克雷条件,那么信号的傅里叶变换就一定存在。某些特殊信号,如单位阶跃信号、斜坡信号等,虽然不满足狄利克雷条件,但是借助广义函数仍然可以求出傅里叶变换,只是变换式中包含冲激信号。一部分常见信号,如单边指数增长信号,不满足狄利克雷条件,因此,傅里叶变换并不存在。对于此类信号,如果想定性了解其频域特性,是不能直接进行傅里叶变换的。但是,如果将这类增长型信号乘以一个指数衰减因子 $e^{-\sigma t}$,当 σ 满足一定条件,使 $f(t)e^{-\sigma t}$ 成为指数衰减信号时,就可以对相乘后的信号进行傅里叶变换。本节从另一个角度说明信号的特性。

信号 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

令 $s = \sigma + j\omega$,上式可以写成

$$\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

用 $F(s)$ 表示上式, 得

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (5-2-1)$$

式(5-2-1) 称为信号 $f(t)$ 的拉普拉斯正变换, 表示为

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (5-2-2)$$

信号 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶反变换为

$$f(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}[F(\sigma + j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

两边同乘 $e^{\sigma t}$, 得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega \quad (5-2-3)$$

同样, 令 $s = \sigma + j\omega$, 可得 $d\omega = ds/j$ 。当 $\omega = \pm\infty$ 时, $s = \sigma \pm j\infty$, 代入式(5-2-3), 得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (5-2-4)$$

式(5-2-4) 称为信号 $f(t)$ 的拉普拉斯反变换, 表示为

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (5-2-5)$$

将式(5-2-2) 和式(5-2-5) 合起来就是一对拉普拉斯变换对, 简称拉氏变换对, 表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= F(s) \\ \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= f(t) \end{aligned}$$

或者

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$$

从上述傅里叶变换推导出拉普拉斯变换的过程中可以看出, $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 即为 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换 $F(\sigma + j\omega)$ 。换句话说, 将不满足绝对可积条件的信号 $f(t)$ 乘以 $e^{-\sigma t}$ 之后如果满足绝对可积条件, 则可对乘积信号进行傅里叶变换, 该傅里叶变换也称为广义傅里叶变换, 即双边拉普拉斯变换。因此, 拉普拉斯变换的引入扩大了信号变换的范围。

拉普拉斯变换与傅里叶变换的基本差别在于: 傅里叶变换将时域函数 $f(t)$ 变换为频域函数 $F(\omega)$, 或作相反的变化, 这里时域变量 t 和频域变量 ω 都是实数; 而拉普拉斯变换则是将时域函数 $f(t)$ 变换为复频域函数 $F(s)$, 或作相反的变化, 这里时域变量 t 是实数, 复频域变量 s 是复数。概括地说, 傅里叶变换建立了时域和频域间的联系, 而拉普拉斯变换则建立了时域与复频域间的联系。

5.2.2 单边拉普拉斯变换

实际工程应用中遇到的信号一般是因果信号, 即当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$; 或者信号虽然不是因果信号, 但是问题的讨论只需考虑 $t \geq 0$ 的情况。因此, 拉普拉斯变换式(5-2-2)

可以变为

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (5-2-6)$$

为以示区别,式(5-2-2)称为双边拉普拉斯变换,式(5-2-6)称为单边拉普拉斯变换。无论单边还是双边拉普拉斯变换,它的反变换都是式(5-2-5)。

式(5-2-6)中积分下限选取 0_- 的目的是在复频域分析 0 时刻时包含冲激信号。单边拉普拉斯变换对可以表示成

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (5-2-7)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (5-2-8)$$

除了特别说明,一般积分下限 0_- 简写成 0 ,含义相同。如无特别说明,本章所讲拉普拉斯变换均是指单边拉普拉斯变换。

5.2.3 单边拉普拉斯变换的收敛域

从前面的分析可以看出,拉普拉斯变换是将信号 $f(t)$ 乘以指数衰减因子 $e^{-\sigma t}$,当乘积 $f(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积条件时对其进行傅里叶变换所得。即当函数 $f(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积条件时,信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换才存在。因此, σ 的取值范围有一定的限制。对于单边信号 $f(t)$,当 $t \rightarrow \infty$ 时,如果存在一个值 σ_0 ,使得 $\sigma > \sigma_0$ 时函数 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的极限为 0 ,则 $f(t)e^{-\sigma t}$ 在 $\sigma > \sigma_0$ 时的全部范围内满足绝对可积条件。此时,信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换存在。通常将拉普拉斯变换存在的 σ 取值范围称为拉普拉斯变换的收敛域(Region Of Convergence, ROC)。而 σ 为复变量 s 的实部,在复频域平面上通常以 σ 为横坐标,以 $j\omega$ 为纵坐标,通过 σ_0 值点作垂直于 σ 轴的一条直线,满足所有 $\sigma > \sigma_0$ 的 σ 取值范围即是收敛域; σ_0 值点称为收敛坐标;通过 σ_0 值点作的垂直于 σ 轴的直线称为收敛轴。单边拉普拉斯变换的收敛域如图5-2-1所示。

下面对不同时段信号 $f(t)$ 的拉普拉斯变换的收敛域举例加以说明。

(1) 如果 $f(t)$ 是有限持续期的,则其拉普拉斯变换 $F(s)$ 的收敛域是整个 s 平面,如图5-2-2所示。

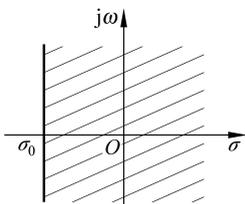


图 5-2-1 单边拉普拉斯变换的收敛域

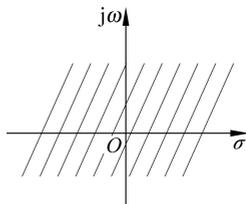


图 5-2-2 有限持续期信号的拉普拉斯变换的收敛域

【例 5-2-1】 求单位冲激信号 $\delta(t)$ 的拉普拉斯变换及其收敛域。

解:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = e^{-s(0)} = 1 \quad (5-2-9)$$

显然, $\delta(t)$ 的拉普拉斯变换独立于复变量 s 。因此, 对所有复变量 s , 收敛域为整个 s 平面。即

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1$$

(2) 如果 $f(t)$ 是右边信号, 则其拉普拉斯变换 $F(s)$ 的收敛域为 $\text{Re}[s] = \sigma > \sigma_0$, 如图 5-2-3 所示。其中, σ_0 为某一实数。

【例 5-2-2】 求因果实指数信号 $f(t) = Ae^{at}u(t)$ 的拉普拉斯变换及其收敛域。

解:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{at}u(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= A \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = A \cdot \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_0^{\infty} = \frac{A}{s-a}, \quad \text{Re}[s] > a \end{aligned}$$

即

$$Ae^{at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A}{s-a}, \quad \text{Re}[s] > a \quad (5-2-10)$$

【例 5-2-3】 求阶跃信号 $f(t) = Au(t)$ 的拉普拉斯变换及其收敛域。

解: 利用例 5-2-2 的结果, 令 $a=0$, 得

$$Au(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A}{s}, \quad \text{Re}[s] > 0 \quad (5-2-11)$$

(3) 如果 $f(t)$ 是左边信号, 则其拉普拉斯变换 $F(s)$ 的收敛域为 $\text{Re}[s] = \sigma < \sigma_0$, 如图 5-2-4 所示。其中, σ_0 为某一实数。

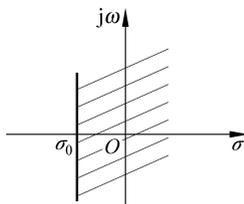


图 5-2-3 右边信号的拉普拉斯变换的收敛域

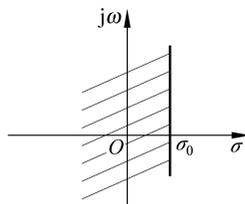


图 5-2-4 左边信号的拉普拉斯变换的收敛域

【例 5-2-4】 求反因果实指数信号 $f(t) = Ae^{at}u(-t)$ 的拉普拉斯变换及其收敛域。

解:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{at}u(-t) \cdot e^{-st} dt \\ &= A \int_{-\infty}^0 e^{(a-s)t} dt = A \cdot \left. \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right|_{-\infty}^0 = -\frac{A}{s-a}, \quad \text{Re}[s] < a \end{aligned}$$

即

$$Ae^{at}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{A}{s-a}, \quad \text{Re}[s] < a$$

当 $a=0$ 时, 有

$$Au(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{A}{s}, \quad \text{Re}[s] < 0$$

(4) 如果 $f(t)$ 是双边信号, 则其拉普拉斯变换 $F(s)$ 的收敛域为 $\sigma_1 < \text{Re}[s] < \sigma_2$, 其中, σ_1 和 σ_2 均为实数, 且 $\sigma_1 < \sigma_2$ 。

【例 5-2-5】 求双边实指数信号 $f(t) = e^{-b|t|}$ ($b > 0$) 的拉普拉斯变换及其收敛域。

解:

$$f(t) = e^{-b|t|} = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$$

显然, $f(t)$ 由因果实指数信号 $e^{-bt}u(t)$ 和反因果实指数信号 $e^{bt}u(-t)$ 组成, 称 $f(t)$ 为非因果信号。

因为

$$e^{-bt}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+b}, \quad \text{Re}[s] > -b$$

$$e^{bt}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{1}{s-b}, \quad \text{Re}[s] < b$$

所以, 当 $b > 0$ 时, 有

$$e^{-b|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b}, \quad -b < \text{Re}[s] < b$$

其收敛域如图 5-2-5 所示。

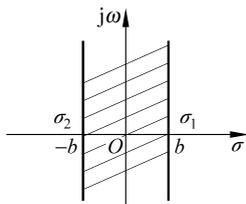


图 5-2-5 双边实指数信号的拉普拉斯变换的收敛域

(5) $F(s)$ 的收敛域之内不含极点, 收敛域的边界由极点限定, 或延伸到无穷远。

综上所述, 可以得出以下结论: 右边信号的收敛域在 s 平面上最右极点的右边; 左边信号的收敛域在 s 平面上最左极点的左边; 双边信号的收敛域在平行于虚轴的一个带状区域之内。

【例 5-2-6】 设拉普拉斯变换为 $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, 绘出其可能的收敛域。

解: $F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ 存在 3 种收敛域情况, 如图 5-2-6 所示。

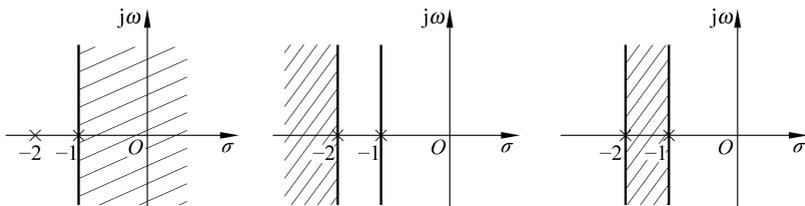


图 5-2-6 $F(s)$ 的收敛域

5.2.4 典型信号的拉普拉斯变换

利用式(5-2-1),可以求出任意信号的拉普拉斯变换。

1. 复指数信号 $Ae^{(a+j\omega_0)t}u(t)$

根据

$$Ae^{at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A}{s-a}, \quad \text{Re}[s] > a$$

得

$$Ae^{(a+j\omega_0)t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A}{s-a-j\omega_0}, \quad \text{Re}[s] > a \quad (5-2-12)$$

2. 正弦信号 $A\sin\omega_0 tu(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[A\sin\omega_0 tu(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{A}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})u(t)\right] = \frac{A}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0}\right) \\ &= \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}[s] > 0 \end{aligned}$$

即

$$A\sin\omega_0 tu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}[s] > 0 \quad (5-2-13)$$

3. 余弦信号 $A\cos\omega_0 tu(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[A\cos\omega_0 tu(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{A}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})u(t)\right] = \frac{A}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0}\right) \\ &= \frac{As}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}[s] > 0 \end{aligned}$$

即

$$A\cos\omega_0 tu(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{As}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}[s] > 0 \quad (5-2-14)$$

4. 余弦衰减信号 $Ae^{at}\cos\omega_0 tu(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[Ae^{at}\cos\omega_0 tu(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{A}{2}e^{at}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})u(t)\right] \\ &= \mathcal{L}\left[\frac{A}{2}(e^{(a+j\omega_0)t} + e^{(a-j\omega_0)t})u(t)\right] \\ &= \frac{A}{2}\left(\frac{1}{s-(a+j\omega_0)} + \frac{1}{s-(a-j\omega_0)}\right) \\ &= \frac{A(s-a)}{(s-a)^2 + \omega_0^2}, \quad \text{Re}[s] > a \end{aligned}$$

即

$$Ae^{at} \cos \omega_0 t u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A(s-a)}{(s-a)^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}[s] > a \quad (5-2-15)$$

5. 幂指数信号 $At^n u(t)$ (n 为正整数)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[At^n u(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} At^n u(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} At^n e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} At^n \left(-\frac{1}{s}\right) de^{-st} \\ &= -\frac{A}{s} \left(t^n e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-st} n \cdot t^{n-1} dt \right) \\ &= \frac{An}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt \\ &= \frac{An}{s} \mathcal{L}[t^{n-1} u(t)], \quad \operatorname{Re}[s] > 0 \end{aligned}$$

依此类推,得

$$\mathcal{L}[At^n u(t)] = \frac{An}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdots \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{An!}{s^{n+1}}$$

即

$$\mathcal{L}[At^n u(t)] = \frac{An!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (5-2-16)$$

当 $n=1$ 时,斜坡信号 $Atu(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[Atu(t)] = \frac{A}{s^2}, \quad \operatorname{Re}[s] > 0 \quad (5-2-17)$$

6. 反因果余弦衰减信号 $Ae^{at} \cos \omega_0 t u(-t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[Ae^{at} \cos \omega_0 t u(-t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{A}{2} e^{at} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) u(-t)\right] \\ &= \frac{A}{2} \mathcal{L}[(e^{(a+j\omega_0)t} + e^{(a-j\omega_0)t}) u(-t)] \end{aligned}$$

根据 $Ae^{at} u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{-A}{s-a}, \operatorname{Re}[s] < a$, 有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[Ae^{at} \cos \omega_0 t u(-t)] &= \frac{A}{2} \left[\frac{-1}{s-(a+j\omega_0)} + \frac{-1}{s-(a-j\omega_0)} \right] \\ &= \frac{-A(s-a)}{(s-a)^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}[s] < a \end{aligned}$$

即

$$Ae^{at} \cos \omega_0 t u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{-A(s-a)}{(s-a)^2 + \omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}[s] < a \quad (5-2-18)$$

表 5-2-1 列出了典型信号的拉普拉斯变换对其收敛域。

表 5-2-1 典型信号的拉普拉斯变换对

序号	单边信号 $f(t), t > 0$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	ROC
1	$\delta(t)$	1	整个 s 平面
2	$\delta^{(n)}(t)$	$s^n (n=1, 2, 3, \dots)$	整个 s 平面
3	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}[s] > 0$
4	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}[s] > 0$
5	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\text{Re}[s] > -\alpha$
6	$\sin\omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}[s] > 0$
7	$\cos\omega_0 t u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}[s] > 0$
8	$e^{-at} \sin\omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}[s] > -\alpha$
9	$e^{-at} \cos\omega_0 t u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}[s] > -\alpha$
10	$t e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$\text{Re}[s] > -\alpha$
11	$t^n e^{-at} u(t)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$	$\text{Re}[s] > -\alpha$
12	$t \sin\omega_0 t u(t)$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$	$\text{Re}[s] > 0$
13	$t \cos\omega_0 t u(t)$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$	$\text{Re}[s] > 0$

5.3 拉普拉斯变换的性质

拉普拉斯变换建立了时域与复频域之间的关系。由于拉普拉斯变换是广义的傅里叶变换,因此,这两种变换的性质在很多方面是相似的,而且利用其性质可使时域函数的拉普拉斯变换及拉普拉斯反变换的求取更为方便简捷。但在进行拉普拉斯变换时,其收敛域不可忽略。下面介绍拉普拉斯变换的性质,其中类同于傅里叶变换的性质不予证明。

5.3.1 线性性质

设

$$f_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s), \quad \text{Re}[s] > \sigma_1$$

$$f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_2(s), \quad \text{Re}[s] > \sigma_2$$

则

$$af_1(t) + bf_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} aF_1(s) + bF_2(s), \operatorname{Re}[s] > \max(\sigma_1, \sigma_2) \quad (5-3-1)$$

其中, a, b 均为常数, $\operatorname{Re}[s] > \max(\sigma_1, \sigma_2)$ 表示 $F_1(s)$ 与 $F_2(s)$ 收敛域的交集。

需要指出的是, 两个信号经过线性运算后, 其拉普拉斯变换的收敛域有时会超出这些交集。下面举例说明。

【例 5-3-1】 已知

$$f_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \operatorname{Re}[s] > -1$$

$$f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \operatorname{Re}[s] > -1$$

求 $f_1(t) - f_2(t)$ 的拉普拉斯变换 $F(s)$ 。

解: $F_1(s)$ 、 $F_2(s)$ 的收敛域分别如图 5-3-1(a)、(b) 所示。

$$\begin{aligned} F(s) &= F_1(s) - F_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}, \quad \operatorname{Re}[s] > -2 \end{aligned}$$

其收敛域如图 5-3-1(c) 所示。

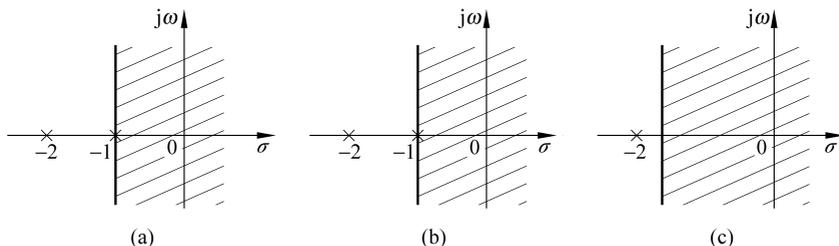


图 5-3-1 $F_1(s)$ 、 $F_2(s)$ 和 $F_1(s) - F_2(s)$ 的收敛域

信号 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 线性组合后, 在 $s = -1$ 的极点被 $s = -1$ 的零点所抵消; 而收敛域总是由极点或者无限远点确定。因此, 信号线性组合后的收敛域向左延伸, 说明如遇零点和极点相抵消, 线性运算后的收敛域将扩大。

5.3.2 尺度变换性质

设

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s), a > 0, \quad \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$$

则

$$f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \operatorname{Re}[s] > a\sigma_0 \quad (5-3-2)$$

证明: 当 $a > 0$ 时, 有

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{s}{a}\tau} d\left(\frac{\tau}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \operatorname{Re}[s] > a\sigma_0$$

其中, $a > 0$ 确保了 $f(at)$ 是因果信号。

【例 5-3-2】 求信号 $f(t) = \delta(at)$ 的拉普拉斯变换, 其中, $a > 0$ 。

解: 因为 $\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1$, 所以有 $\delta(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1/a$ 。

5.3.3 时域平移性质

设

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s), \quad \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$$

则

$$f(t-t_0)u(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)e^{-st_0}, \quad t_0 \geq 0, \quad \operatorname{Re}[s] > \sigma_0 \quad (5-3-3)$$

需要说明的是, 单边拉普拉斯变换之所以要限定 $t_0 \geq 0$ 以及 $f(t-t_0)u(t-t_0)$, 是因为单边拉普拉斯变换的积分区间是 $[0, +\infty)$ 。当信号 $f(t)$ 在时间轴上移动时, 有可能使积分区间的信号发生变化, 因此, 要加以限定, 使移动后的信号波形与原始信号 $f(t)$ 的波形形状相同。例如, 信号 $f(t)$ 如图 5-3-2(a) 所示, 在 $t_0 > 0$ 时向右移动 t_0 个单位, 如图 5-3-2(b) 所示。很明显看到, 对于单边拉普拉斯变换来说, 图 5-3-2(a) 和 (b) 所示信号在积分区间 $[0, +\infty)$ 的波形并不相同, 而图 5-3-2(a) 所示信号在积分区间 $[0, +\infty)$ 的波形和图 5-3-2(c) 所示信号在积分区间 $[t_0, +\infty)$ 的波形是相同的。

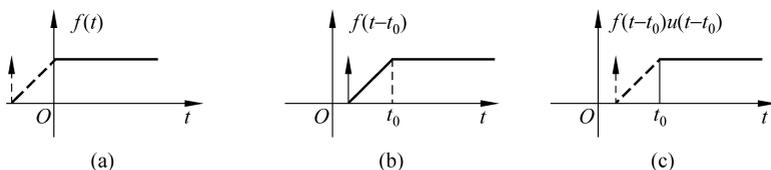


图 5-3-2 拉普拉斯变换时域平移特性在积分区间的变化

【例 5-3-3】 已知 $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0, a > 0$, 求 $\mathcal{L}[f(at-t_0)]u(at-t_0)$ 。

解: 由于 $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s), \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$, 其中, $a > 0$, 根据尺度变换性质和时域平移性质, 得

$$f(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s)e^{-st_0}, \quad \operatorname{Re}[s] > \sigma_0$$

$$f(at-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{st_0}{a}}, \quad \operatorname{Re}[s] > a\sigma_0$$

另一种方法为

$$f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \operatorname{Re}[s] > a\sigma_0$$

$$f(at-t_0) = f\left[a\left(t-\frac{t_0}{a}\right)\right] \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{st_0}{a}}, \quad \operatorname{Re}[s] > a\sigma_0$$

【例 5-3-4】 分别求 $f_1(t) = tu(t), f_2(t) = t-t_0, f_3(t) = (t-t_0)u(t), f_4(t) = tu(t-t_0)$ 和 $f_5(t) = (t-t_0)u(t-t_0)$ 的拉普拉斯变换。

解: 信号 $f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t), f_5(t)$ 的波形分别如图 5-3-3(a)、(b)、(c)、