数学培优竞赛新思维

数学培优竞赛一讲一练

(八年级)

主编　朱华伟

编者　吴　聪　杜瑞楠　刘亦俊

清华大学出版社

北　京

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛一讲一练. 八年级 / 朱华伟主编. —北京：清华大学出版社，2021.6
(数学培优竞赛新思维)
ISBN 978-7-302-56314-3

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①朱…　Ⅲ. ①中学数学课－初中－教学参考资料　Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 155982 号

责任编辑：王　定
封面设计：周晓亮
版式设计：思创景点
责任校对：成凤进
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：天津安泰印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　印　　张：11.75　　字　　数：316 千字
版　　次：2021 年 8 月第 1 版　　印　　次：2021 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：45.00 元

产品编号：087085-01

前　　言

从 1985 年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克竞赛（International Mathematical Olympiad，IMO）以来，中国代表队参加了 34 次 IMO，其中，20 次团队总分居第一位（有 12 次六位队员都获得金牌），8 次团队总分居第二位，2 次团队总分居第三位，各 1 次团队总分居第四、六、八位，共有 200 人参赛，共获金牌 157 块、银牌 35 块、铜牌 6 块. 早在 1994 年，中国科学院数学物理学部的王梓坤院士就写道：“（我国中学生在 IMO 中）连续获得团体冠军，个人金牌数也名列前茅，消息传来，全国振奋. 我国数学，现在有能人，后继有强手，国内外华人无不欢欣鼓舞.”这对青少年学好数学无疑是莫大的鼓舞和鞭策，极大地激发了青少年学习数学的热情.

为了给对数学有兴趣的初中生提供一个提高解题能力和培养创新精神的平台，我们以中考数学难题和国内外初中数学竞赛为背景，根据多年辅导初中生参加中考数学和初中数学竞赛所积累下来的经验、体会和素材，编写了这套“数学培优竞赛新思维”丛书. 本丛书包括《数学培优竞赛讲座》（七年级、八年级、九年级），以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》（七年级、八年级、九年级）.

《数学培优竞赛讲座》每册分培优篇和竞赛篇两大部分.

● 培优篇，与课堂教学同步，从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进，是课堂教学的自然延伸；在夯实基础的同时，通过新颖、有趣的数学问题，构建通往数学奥林匹克前沿的捷径；在学生力所能及的范围内扩展知识视野，提高思维能力；在巩固深化初中数学教材知识的同时，拓宽中考数学和竞赛数学的知识.

● 竞赛篇，以初中数学奥林匹克竞赛中的热点、难点问题为载体，介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧，有助于激发学生创新与发现的灵感. 这些内容是数学奥林匹克竞赛中生动活泼、富于创新性的内容. 这类问题的特点是涉及的数学知识较少而包含的技巧较多，理解和解决这类问题往往不需要很多专门的数学知识，而发现解法却相当困难，没有固定的模式可以套用. 它要求学生自己去探索、尝试，通过观察、思考，利用归纳、枚举、类比、排序、估计、构造、递降、递推、反证、奇偶分析、染色、赋值、不变量等方法，发现规律，找到解决问题的门径，这恰是数学奥林匹克竞赛试题所应有的风格. 这些内容可帮助学生开发智力，提高水平，从而参加高层次的竞赛.

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写，每讲的主要栏目如下.

（1）数学名言欣赏：以名人名言开宗明义，开启每讲的数学学习之旅.

（2）知识方法扫描：概括竞赛数学的相关知识、方法与技巧，突出重点、难点和赛点.

（3）典型例题解析：含“分析”“解”“分析与解”和“评注”，例题总个数控制在8道，由基础题（3道中考难度的试题）、提高题（3道全国初中数学联赛一试难度的试题）、综合题（2道全国初中数学联赛二试难度的试题）组成. 本书中很多例题的解答之后有评注，评注的作用是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析，以起到画龙点睛的效果；对可进一步深入研究的问题予以拓展引申，意在引导学生去创造；对一题多解的问题提出相关的解法，发现特技与通法之间的联系. 总之，评注的目的在于，一方面揭示问题的背景和来源，另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提出新问题的方法，使学生不仅知其然，更知其所以然，以期达到授之以渔的目的.

（4）强化训练：含选择题、填空题、解答题，为方便自学，在参考答案中给出了每题详细的解答过程.

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册，可以为使用者提供自我检测；书后附有详细解答，可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度.“一讲一练”与“讲座”配套使用，才能达到较好的学习效果.

希望通过本丛书的学习，学生能够发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创新，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而激发学习数学的兴趣.

本丛书是初中学生参加数学竞赛的宝典，是冲刺重点高中、破解中考数学压轴题的利器，是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友.

在本丛书的编写过程中，笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目，为求简明，书中未一一注明出处，在此谨向原题编者表示感谢. 由于笔者水平有限，书中难免会有疏漏之处，诚挚欢迎读者批评与指正.

朱华伟

2021年5月1日

目　　录

第 1 讲　三角形的概念

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 在平面直角坐标系 xOy 中,已知 $A(2,-2)$,在 y 轴上确定一点 P,使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形,则符合条件的点 P 共有________个.

2. 如图 1-1 所示,有一块三角形的草坪,现要在草坪上建一凉亭供大家休息,要使凉亭到草坪三条边的距离相等,凉亭的位置应选在________.

3. 如图 1-2 所示,用四条线段首尾相接连成一个框架,其中 $AB=12$,$BC=14$,$CD=18$,$DA=24$,则 A、B、C、D 任意两点之间的最长距离为________.

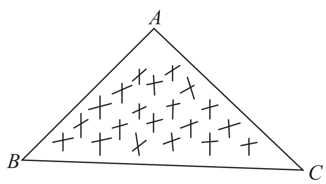


图 1-1

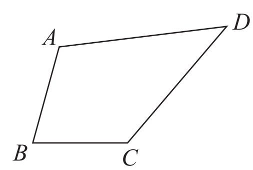


图 1-2

4. 定义:如果两条线段将一个三角形分成 3 个小等腰三角形,我们把这两条线段叫作这个三角形的三分线.在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B=30^\circ$,AD 和 DE 是 $\triangle ABC$ 的三分线,点 D 在 BC 边上,点 E 在 AC 边上,且 $AD=BD$,$DE=CE$,则 $\angle C$ 的值是________.

5. 边长为整数,周长为 20 的等腰三角形有________个.

6. 在等腰 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,$AC=8$,F 是 AB 边上的中点,点 D、E 分别在 AC、BC 边上运动,且保持 $AD=CE$.连接 DE、DF、EF.在此运动变化的过程中,下列结论:①$\triangle DEF$ 是等腰直角三角形;② 四边形 $CDFE$ 不可能为正方形;③DE 长度的最小值为 4;④ 连接 CF,CF 恰好把 $\triangle DFE$ 面积分成 $1:2$ 两部分,则 $CE=\dfrac{7}{3}$ 或 $\dfrac{14}{3}$.其中正确的结论个数是________.

7. 如图 1-3 所示,已知 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC=6\mathrm{cm}$,$\angle B=\angle C$,$BC=4\mathrm{cm}$,点 D 为 AB 的中点.若点 Q 以 $1.5\mathrm{cm/s}$ 的运动速度从点 C 出发,点 P 以 $1\mathrm{cm/s}$ 的速度从点 B 同时出发,都逆时针沿 $\triangle ABC$ 三边运动,则经过________s 后,点 P 与点 Q 第一次在 $\triangle ABC$ 的 AC 边上相遇.

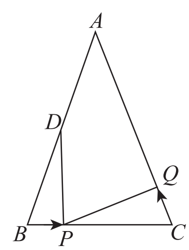


图 1-3

8. 如图 1-4 所示,正方形 $ABCD$ 的边长为 1,其面积记为 S_1,以 CD 为斜边作等腰直角三角形,以该等腰直角三角形的一条直角边为边向外作正方形,其面积记为 S_2,……,按此规律继续下去,则 S_9 的值为________.

9. 如图 1-5 所示，平行四边形 $ABCD$ 中，AE 平分 $\angle BAD$，交 BC 于点 E，且 $AB=AE$，延长 AB 与 DE 的延长线交于点 F.下列结论：①$\triangle ABC \cong \triangle EAD$；②$\triangle ABE$ 是等边三角形；③$AD=AF$；④$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CDE}$；⑤$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CEF}$.其中正确的是________.

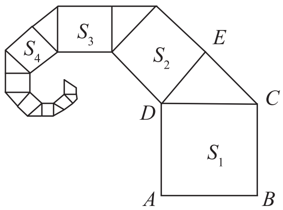


图 1-4

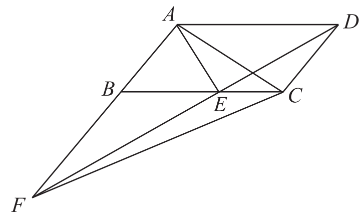


图 1-5

10. 如图 1-6 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，BD、CD 分别平分 $\angle ABC$、$\angle ACB$，M、N、Q 分别在 DB、DC、BC 的延长线上，BE、CE 分别平分 $\angle MBC$、$\angle BCN$，BF、CF 分别平分 $\angle EBC$、$\angle ECQ$，则 $\angle F=$________.

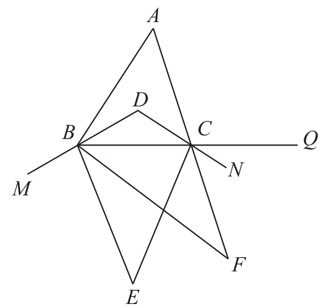
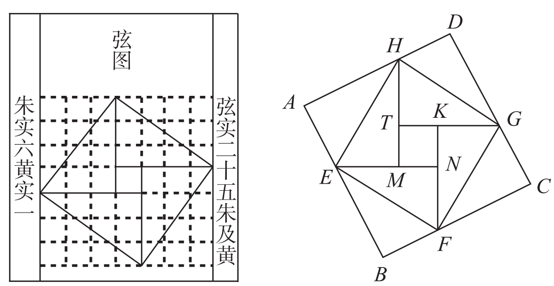


图 1-6

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11. 我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创制了一幅“弦图”，后人称其为“赵爽弦图”，如图 1-7(a) 所示.如图 1-7(b) 所示由弦图变化得到，它是由八个全等的直角三角形拼接而成，记图中正方形 $ABCD$、正方形 $EFGH$、正方形 $MNKT$ 的面积分别为 S_1、S_2、S_3.若正方形 $EFGH$ 的边长为 2，求 $S_1+S_2+S_3$.



(a) (b)

图 1-7

12. 在如图 1-8 所示的 $\triangle ABC$ 中，AB 边长为 6cm，BC 边长为 8cm，AC 边长为 10cm.若 P、Q 分别从 A、B 出发，在三角形的边上运动.若 P、Q 两点在 AB 上相向运动，则需要 2s 相遇；若 P、Q 两点都沿着边逆时针运动 9s 后相遇.P 点运动的速度为多少？

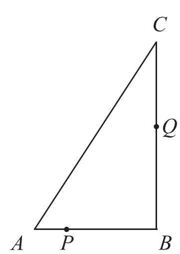


图 1-8

13. 如图 1-9 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC$，$\angle ABC=100^\circ$，边 BA 绕点 B 顺时针旋转 $m^\circ(0<m<180)$，得到线段 BD，连接 AD、DC. 若 $\triangle ADC$ 为等腰三角形，求 m 所有可能的取值.

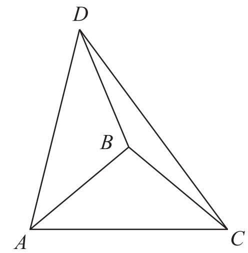


图 1-9

14. 如图 1-10 所示，$\triangle A_1B_1C_1$ 是边长为 1 的等边三角形，A_2 为等边 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心，连接 A_2B_1 并延长到点 B_2，使 $A_2B_1=B_1B_2$，以 A_2B_2 为边作等边 $\triangle A_2B_2C_2$，A_3 为等边 $\triangle A_2B_2C_2$ 的中心，连接 A_3B_2 并延长到点 B_3，使 $A_3B_2=B_2B_3$，以 A_3B_3 为边作等边 $\triangle A_3B_3C_3$，依次作下去得到等边 $\triangle A_nB_nC_n$，求等边 $\triangle A_6B_6C_6$ 的边长.

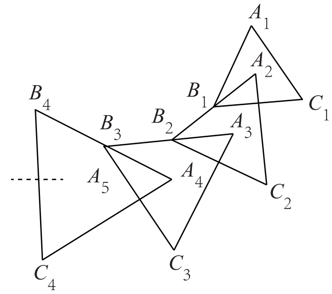


图 1-10

15. 如图 1-11 所示，将正三角形每条边四等分，然后过这些分点作平行于其他两边的直线，那么以图中线段为边的菱形的个数为多少个？

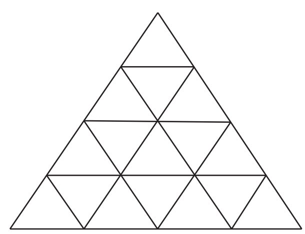


图 1-11

第 2 讲　多边形的概念及内角和

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 如图 2-1 所示,一个多边形纸片按图示的剪法剪一个内角后得到一个内角和为 2340° 的新多边形,则原多边形的边数为________.

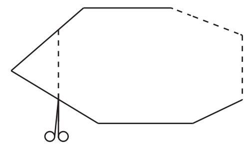


图 2-1

2. 如图 2-2 所示,下列图形都是由同样大小的正方形和正三角形按一定的规律组成,其中,第 1 个图形中一共有 5 个正多边形,第 2 个图形中一共有 13 个正多边形,第 3 个图形中一共有 26 个正多边形,则第 5 个图形中正多边形的个数为________.

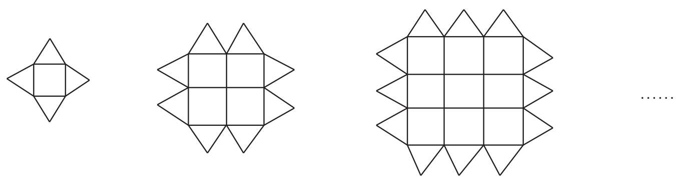


图 2-2

3. 如图 2-3 所示,$\angle ABC=\angle ACB$,AD、BD、CD 分别平分 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle EAC$、内角 $\angle ABC$ 和外角 $\angle ACF$,则以下结论:①$AD /\!/ BC$;②$\angle ACB=2\angle ADB$;③$\angle ADC=90^{\circ}-\angle ABD$;④$2\angle BDC=\angle BAC$.其中正确的结论为________.

4. 如图 2-4 所示,$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$BD\perp AC$ 于 D,I 为 $\triangle ABD$ 中三条内角平分线的交点,且 $\angle ACI=\dfrac{4}{5}\angle DBC$,则 $\angle BAC$ 的度数为________.

5. 在数学课拓展课上,小明发现:若一条直线经过平行四边形对角线的交点,则这条直线平分该平行四边形的面积.如图 2-5 所示是由 5 个边长是 1,且一个内角是 60° 的小菱形拼成的图形,P 是其中 4 个小菱形的公共顶点,小新在小明的启发下,将该图形沿着过点 P 的某条直线剪一刀,把它剪成了面积相等的两部分,则剪痕的长度是________.

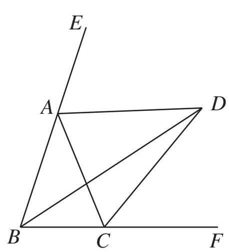


图 2-3

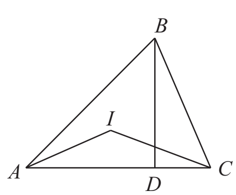


图 2-4

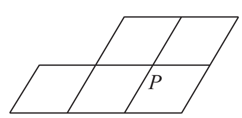


图 2-5

6. 两个凸多边形，它们的边数之和为12，对角线的条数之和为19，那么这两个多边形的边数分别是________和________.

7. 下列命题：① 正多边形既是轴对称图形又是中心对称图形；② 三角形的外心到三角形三边的距离相等；③ 边长为 a 的正六边形的面积等于$3\sqrt{3}a^2$；④ 边长分别是 6、8、10 的三角形的内切圆的面积是 4π.正确的命题是________.

8. 已知 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，连接 PA、PB、PC，把 $\triangle ABC$ 的面积三等分，则点 P 一定是________.

9. 如图2-6所示，$\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\triangle ABC$ 的角平分线 AD、BE 相交于点 P，过 P 作 $PF\perp AD$ 交 BC 的延长线于点 F，交 AC 于点 H，则下列结论：①$\angle APB=135^\circ$；②$PF=PA$；③$AE+BD=AB$；④$S_{\text{四边形}ABDE}=2S_{\triangle ABP}$；⑤$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{BD}$.其中正确的是________.

10. 如图2-7所示，在四边形 $ABDC$ 中，对角线 AD，BC 交于点 O，$\angle BAC=90^\circ$，$\angle BDC=90^\circ$，$BD=CD$，$AB=2$，$AC=4$，记 $\triangle AOC$ 的面积为 S_1、$\triangle BOD$ 的面积为 S_2，则 S_1-S_2 的值为________.

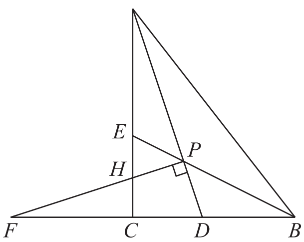


图 2-6

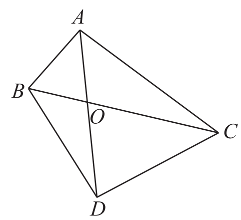


图 2-7

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11. 若一个凸多边形截去一个内角得到的新多边形的内角和是 540°，求原多边形的边数.

12. 若计算一个多边形内角和时，粗心的小明将其中一个内角没有加上去，而是加上了这个内角所对应的外角，这样计算出来的结果是 600°，则小明计算的这个多边形的边数为多少？

13. 如图 2-8 所示,①②③④⑤ 五个平行四边形拼成一个含 30° 内角的菱形 $EFGH$(不重叠无缝隙).若 ①②③④ 四个平行四边形面积的和为 $14\mathrm{cm}^2$,四边形 $ABCD$ 面积是 $11\mathrm{cm}^2$,求 ①②③④ 四个平行四边形周长的总和.

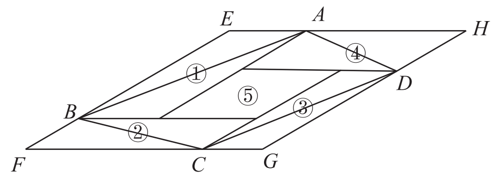


图 2-8

14. 如图 2-9 所示,五边形 $ABCDE$ 的内角都相等,且 $\angle BAC=\angle BCA$,$\angle DAE=\angle ADE$,求 $\angle CAD$.

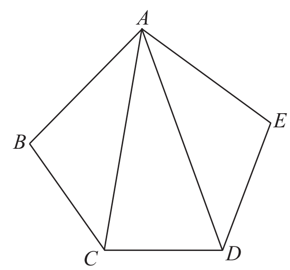


图 2-9

15. 如图 2-10 所示,在平面直角坐标系 xOy 中,多边形 $OABCDE$ 的顶点坐标分别是 $O(0,0)$,$A(0,6)$,$B(4,6)$,$C(4,4)$,$D(6,4)$,$E(6,0)$.若直线 l 经过点 $M(2,3)$,且将多边形 $OABCDE$ 分割成面积相等的两部分,求直线 l 的函数表达式.

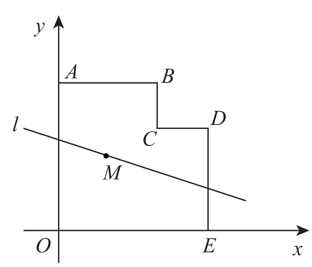


图 2-10

第 3 讲　全等三角形

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 下列说法:① 三边对应相等的两个三角形全等;② 两角、一边相等的两个三角形全等;③ 三角对应相等的两个三角形全等;④ 两边、一角对应相等的两个三角形全等.其中正确的为________.

2. 有下列四种说法:① 两个三角形全等,则它们成轴对称;② 等腰三角形的对称轴是底边上的中线;③ 若点 A、B 关于直线 MN 对称,则 AB 垂直平分 MN;④ 到角两边距离相等的点在这个角的平分线上.其中错误的说法有________个.

3. 如图 3-1 所示,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AB=CB$,$BO\perp AC$,把 $\triangle ABC$ 折叠,使 AB 落在 AC 上,点 B 与 AC 上的点 E 重合,展开后,折痕 AD 交 BO 于点 F,连接 DE、EF,有以下结论:①$AB=2BD$;② 图中有 4 对全等三角形;③ 若将 $\triangle DEF$ 沿 EF 折叠,则点 D 不一定落在 AC 上;④$BD=BF$.其中正确的是________.

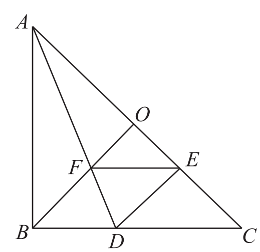


图 3-1

4. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=30^\circ$,AB 边长为 10,AC 边的长度可以在 3、5、7、9、11 中取值,那么满足这些条件的互不全等的三角形有________个.

5. 如图 3-2 所示,点 C 在线段 AB 上,$DA\perp AB$,$EB\perp AB$,$FC\perp AB$,且 $DA=BC$,$EB=AC$,$FC=AB$,$\angle AFB=51^\circ$,则 $\angle DFE=$________.

6. 如图 3-3 所示,$\triangle ABC$ 的内角 $\angle ABC$ 和外角 $\angle ACD$ 的平分线相交于点 E,BE 交 AC 于点 F,过点 E 作 $EG\parallel BD$ 交 AB 于点 G,交 AC 于点 H,连接 AE,有以下结论:

①$\angle BEC=\dfrac{1}{2}\angle BAC$;②$\triangle HEF\cong\triangle CBF$;③$BG=CH+GH$;④$\angle AEB+\angle ACE=90^\circ$.其中正确的结论有________.

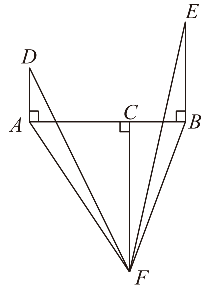


图 3-2

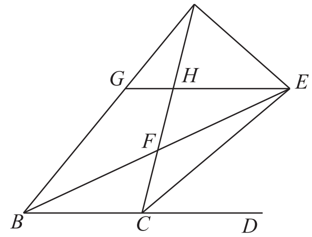


图 3-3

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(2,0)$，$B(0,2)$，若点 C 在第一象限内，$CO=CB$，且 $\triangle AOC$ 为等腰三角形，则满足条件的点 C 的个数为________.

8. 在平面直角坐标系中，已知点 A 的坐标为 $(8,0)$，$\triangle AOP$ 为等腰三角形且面积为 16，则满足条件的点 P 有________.

9. 如图 3-4 所示，在正方形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在边 BC、DC 上，AE、AF 分别交 BD 于点 M、N，连接 CN、EN，且 $CN=EN$. 有以下结论：① $AN=EN$，$AN\perp EN$；② $BE+DF=EF$；③ $\angle DFE=2\angle AMN$；④ $MN^2=BM^2+DN^2$. 其中正确结论个数是________.

10. 如图 3-5 所示，在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中，点 E、F、G 分别在边 AB、AD、CD 上，EG 与 BF 交于点 P，$AE=2$，$BF=EG$，$DG>AE$，则 DP 的最小值为________.

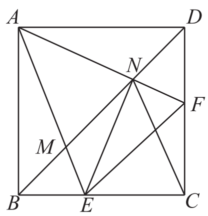


图 3-4

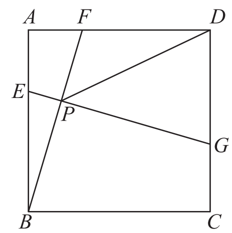


图 3-5

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11. 将两个全等的直角三角形的直角边对齐拼成平行四边形，若这两个直角三角形直角边的长分别是 1cm，2cm，求拼成的平行四边形较长的对角线长.

12. (1) 问题：如图 3-6(a) 所示，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 为 BC 边上一点(不与点 B、C 重合)，将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 $90°$ 得到 AE，连接 EC，则线段 BC、DC、EC 之间满足的等量关系式为________________.

(2) 探索：如图 3-6(b) 所示，在 Rt$\triangle ABC$ 与 Rt$\triangle ADE$ 中，$AB=AC$，$AD=AE$，将 $\triangle ADE$ 绕点 A 旋转，使点 D 落在 BC 边上，试探索线段 AD，BD、CD 之间满足的等量关系，并证明你的结论.

(3) 应用：如图 3-6(c) 所示，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ACB=\angle ADC=45°$. 若 $BD=9$，$CD=3$，求 AD 的长.

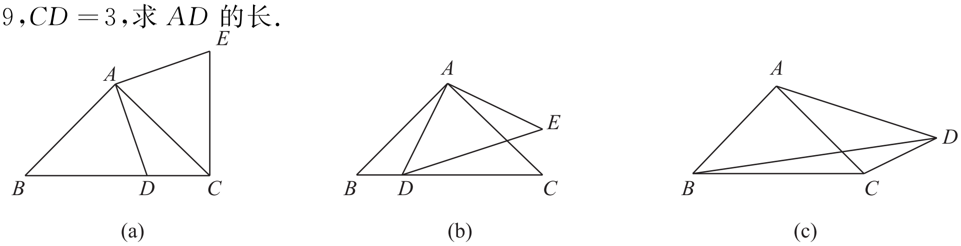


图 3-6

13. 如图 3-7 所示，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，$AC=10$，$BC=4$，射线 $AX\perp CA$，点 P 从点 C 出发沿着射线 CA 方向运动，点 Q 在射线 AX 上，并且保持 $PQ=AB$，若点 P 的速度为每秒 2 个单位长度，运动时间为 t，当 t 为多少时，才能使 $\triangle ABC$ 与 $\triangle PQA$ 全等.

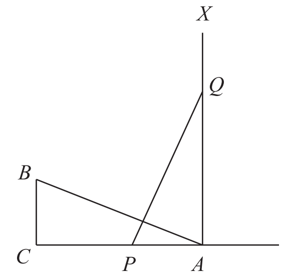


图 3-7

14. 如图 3-8 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=60^{\circ}$，D 是 AB 上一点，$AC=BD$，P 是 CD 中点. 求证：$AP=\frac{1}{2}BC$.

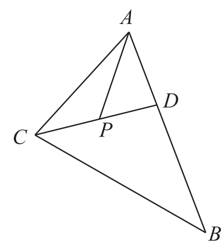


图 3-8

15. 如图 3-9 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$AC=8\text{cm}$，$BC=15\text{cm}$，点 M 从 A 点出发沿 $A\to C\to B$ 路径向终点运动，终点为 B 点，点 N 从 B 点出发沿 $B\to C\to A$ 路径向终点运动，终点为 A 点，点 M 和 N 分别以 2cm/s 和 3cm/s 的运动速度同时开始运动，两点都要到达相应的终点时才能停止运动. 分别过 M 和 N 作 $ME\perp l$ 于 E，$NF\perp l$ 于 F. 设运动时间为 ts，要使以点 M、E、C 为顶点的三角形与以点 N、F、C 为顶点的三角形全等，求 t.

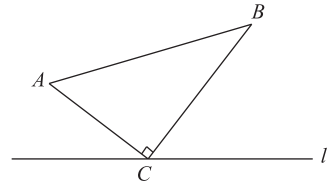


图 3-9

第 4 讲　轴对称

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 如图 4-1 所示,等腰 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,$AD \perp BC$ 于点 D,$\angle ABC$ 的平分线分别交 AC、AD 于 E、F 两点,M 为 EF 的中点,AM 的延长线交 BC 于点 N,连接 DM.有以下结论:①$\triangle AFE$ 为等腰三角形;②$\triangle BDF \cong \triangle ADN$;③$NF$ 垂直平分 AB;④DM 平分 $\angle BMN$;⑤$AE=EN=NC$.其中正确结论的个数是________.

2. 如图 4-2 所示,点 A 为 $\angle MON$ 的角平分线上一点,过 A 任作一直线分别与 $\angle MON$ 的两边交于 B、C,P 为 BC 的中点,过 P 作 BC 的垂线交 OA 于点 D,若 $\angle MON=130°$,则$\angle BDC=$________.

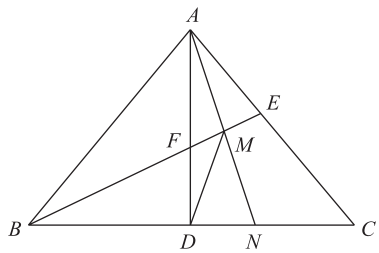


图 4-1

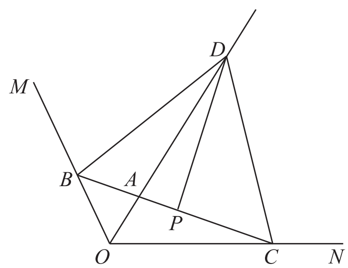


图 4-2

3. 如图 4-3 所示,在 Rt$\triangle ABC$ 的纸片中,$\angle C=90°$,$AC=5$,$AB=13$.点 D 在边 BC 上,以 AD 为折痕将 $\triangle ADB$ 折叠得到 $\triangle ADB'$,AB' 与边 BC 交于点 E.若 $\triangle DEB'$ 为直角三角形,则 BD 的长是________.

4. 如图 4-4 所示,把平面内一条数轴 x 绕原点 O 逆时针旋转角 $\theta(0°<\theta<90°)$ 得到另一条数轴 y,x 轴和 y 轴构成一个平面斜坐标系.规定:过点 P 作 y 轴的平行线,交 x 轴于点 A,过点 P 作 x 轴的平行线,交 y 轴于点 B,若点 A 在 x 轴上对应的实数为 a,点 B 在 y 轴上对应的实数为 b,则称有序实数对 (a,b) 为点 P 的斜坐标.在某平面斜坐标系中,已知 $\theta=60°$,点 M 的斜坐标为 $(2,3)$,点 N 与点 M 关于 y 轴对称,则点 N 的斜坐标为________.(温馨提示:直角三角形中 30° 所对的直角边等于斜边的一半)

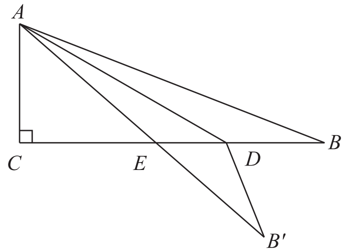


图 4-3

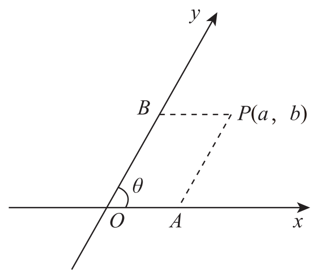


图 4-4

5. 如图4-5所示，已知在平面直角坐标系中，点 A 的坐标是(0,2)，点 B 是 x 轴正半轴上的一点，点 P 是第一象限内一动点.若点 A 与点 A' 关于 x 轴对称，且 $BM \perp PA'$，若动点 P 满足 $\angle APA' = 2\angle OBA'$，则 $\dfrac{PA'-PA}{PM}=$________.

6. 如图4-6所示，BD 平分 $\angle ABC$，$S_{\triangle ABC}=8$，$AB=4$，E 为 BC 上一动点，在 BD 上找一点 F，使 $EF+FC$ 的值最小，则这个最小值为________.

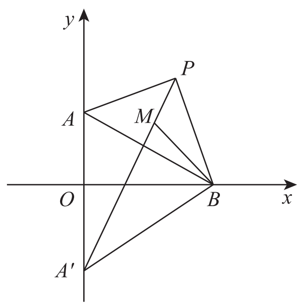


图 4-5

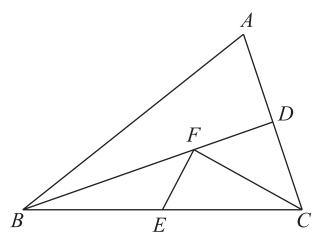


图 4-6

7. 如图4-7所示，$\angle AOB=30°$，M、N 分别是 OA、OB 上的定点，P、Q 分别是边 OB、OA 上的动点，若记 $\angle AMP=\alpha$，$\angle ONQ=\beta$，当 $MP+PQ+QN$ 最小时，则 α 与 β 的数量关系是________.

8. 若等腰三角形的周长为30cm，一边长为6cm，则腰长为________.

9. 如图4-8所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，点 E、F 分别在边 AD、DC 上，$DE=DF$，且 $\angle EBF=60°$，若 $AE=2$，$FC=3$，则 EF 的长度为________.

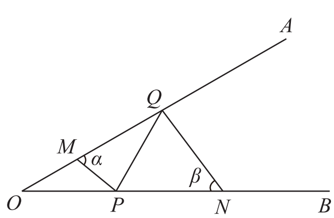


图 4-7

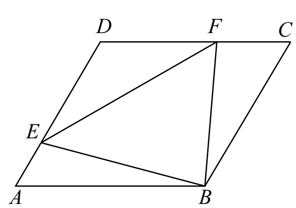


图 4-8

10. 腰长为4的等腰 Rt$\triangle ABC$ 放在如图4-9所示的平面直角坐标系中，点 A、C 均在 y 轴上，$C(0,2)$，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=4$，平行于 y 轴的直线 $x=-2$ 交线段 AB 于点 D，点 P 是

直线 $x=-2$ 上一动点,且在点 D 的上方.当 $S_{\triangle ABP}=4$ 时,以 PB 为一边作等腰 Rt$\triangle BPM$,则所有符合条件的点 M 的坐标是________.

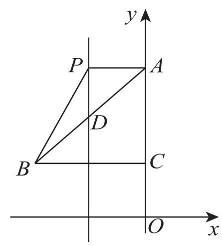


图 4-9

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 如图 4-10 所示,在平行四边形 $ABCD$ 中,$AD=16$,点 E 在边 AD 上,点 F 在 BC 的延长线上,且满足 $BF=BE=18$,过点 C 作 CE 的垂线交 BE 于点 G.若 CE 恰好平分 $\angle BEF$,求 BG 的长.

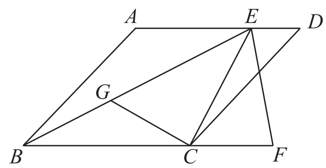


图 4-10

12. 如图 4-11 所示,在正方形 $ABCD$ 中,边长为 4.以 AD 为斜边向上作等腰 Rt$\triangle AFD$,点 G 是 FD 的中点,连接 AG.作点 G 关于 AD 的对称点 E,连接 DE、CE,并延长 CE 交 AG 于点 H.求 CH 的长.

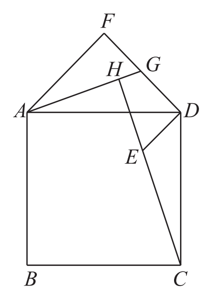


图 4-11

13. 如图 4-12 所示,已知在矩形 $ABCD$ 中,$AD>AB$,O 为对角线的交点,过 O 作一直线分别交 BC、AD 于 M、N.

(1) 求证:$S_{梯形ABMN}=S_{梯形CDNM}$.

(2) 当 M、N 满足什么条件时,将矩形 $ABCD$ 以 MN 为折痕翻折后能使点 C 恰好与点 A 重合(只写出满足的条件,不要求证明).

(3) 在(2)的条件下,若翻折后不重叠部分的面积是重叠部分面积的$\frac{1}{2}$,求$\frac{BM}{MC}$的值.

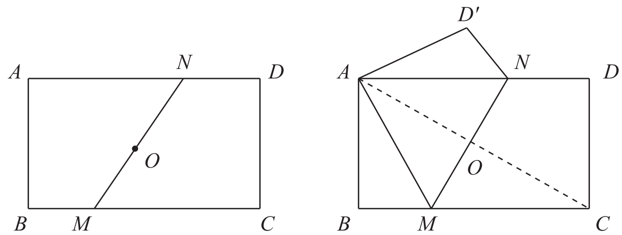


图 4-12

14.如图4-13所示,鹏城大学建立分校,校本部与分校隔着两条平行的小河,$l_1 \parallel l_2$表示小河甲,$l_3 \parallel l_4$表示小河乙,A为校本部大门,B为分校大门.为方便人员来往,要在两条小河上各建一座桥,桥面垂直于河岸.图中的尺寸是:甲河宽8m,乙河宽10m,A到甲河垂直距离为40m,B到乙河垂直距离为20m,两河距离100m,A、B两点水平距离(与小河平行方向)120m,为使A、B两点间来往路程最短,两座桥都按这个目标而建,那么,此时A、B两点间来往的路程是多少?

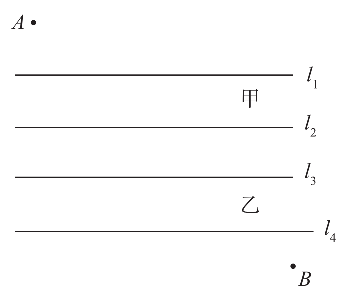


图 4-13

15. 如图 4-14 所示，四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle ABE$ 是等边三角形，M 为对角线 BD（不含点 B）上任意一点，将 BM 绕点 B 逆时针旋转60° 得到 BN，连接 EN、AM、CM.

（1）求证：$\triangle AMB \cong \triangle ENB$.

（2）① 当点 M 在何处时，$AM+CM$ 的值最小；

② 当点 M 在何处时，$AM+BM+CM$ 的值最小，并说明理由.

（3）当 $AM+BM+CM$ 的最小值为$\sqrt{3}+1$ 时，求正方形的边长.

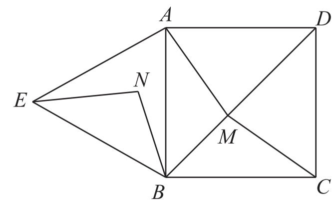


图 4-14

第 5 讲　等腰三角形和等边三角形

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 在等边三角形所在平面内找一点 P,使得 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$ 都是等腰三角形,这样的点 P 的个数有________.

2. 如图 5-1 所示,在等边 $\triangle ABC$ 中,中线 AD、BE 交于 F,则图中等腰三角形共有________个.

3. 如图 5-2 所示,若点 C 是线段 AB 上的一点,$\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 都是同侧的等边三角形,AE 交 CD 于 M,BD 交 CE 于 N,交 AE 于 O.下列结论:① $DB=AE$;② $\angle AMC=\angle DNC$;③ $\angle AOB=120°$;④ $DN=AM$;⑤ $\triangle CMN$ 是等边三角形;⑥ OC 是 $\angle MON$ 的平分线.其中正确的个数为________.

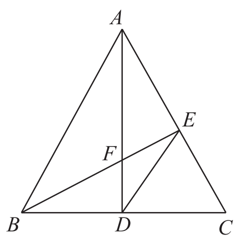


图 5-1

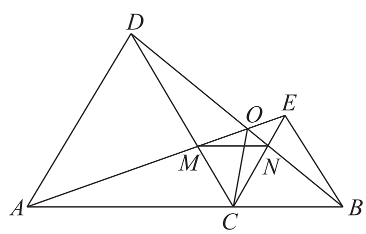


图 5-2

4. 如图 5-3 所示,$\triangle ADB$、$\triangle BCD$ 都是等边三角形,点 E、F 分别是 AB、AD 上的两个动点,满足 $AE=DF$.连接 BF、DE,BF 与 DE 相交于点 G,$CH\perp BF$,垂足为 H,连接 CG.若 $DG=a$,$BG=b$,且 a,b 满足下列关系:$a^2+b^2=5$,$ab=2$,则 $GH=$________.

5. 如图 5-4 所示,在平行四边形 $ABCD$ 中,分别以 AB、AD 为边作等边 $\triangle ABE$ 和等边 $\triangle ADF$,分别连接 CE、CF 和 EF,下列结论:① $\triangle CDF\cong\triangle EBC$;② $\triangle CEF$ 是等边三角形;③ $\angle CDF=\angle EAF$;④ $EF\perp CD$.其中一定成立的是________.

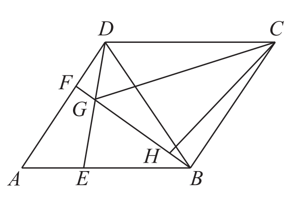


图 5-3

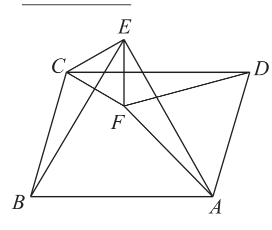


图 5-4

6. 直线 $y=x+3$ 与坐标轴交于 A,B 两点,点 C 在坐标轴上,$\triangle ABC$ 为等腰三角形,则满

足条件的点 C 最多有________个.

7. 在等腰 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle BAC=120^\circ$,$AD\perp BC$ 于点 D,点 P 是 BA 延长线上一点,O 是线段 AD 上一点,$OP=OC$,给出下面的结论:①$\angle APO+\angle DCO=30^\circ$;②$\triangle OPC$ 是等边三角形;③$AC=AO+AP$;④$\triangle ABC$ 的面积等于四边形 $AOCP$ 的面积. 其中正确的有________.

8. 如图 5-5 所示,若点 D 为等边 $\triangle ABC$ 内一点,且 $DA=4$,$DB=3$,$DC=5$,则此等边 $\triangle ABC$ 的面积为________.

9. 如图 5-6 所示,已知 $\angle XOY=60^\circ$,点 A 在边 OX 上,$OA=2$.过点 A 作 $AC\perp OY$ 于点 C,以 AC 为一边在 $\angle XOY$ 内作等边 $\triangle ABC$,点 P 是 $\triangle ABC$ 围成的区域(包括各边)内的一点,过点 P 作 $PD\parallel OY$ 交 OX 于点 D,作 $PE\parallel OX$ 交 OY 于点 E.设 $OD=a$,$OE=b$,则 $a+2b$ 的取值范围是________.

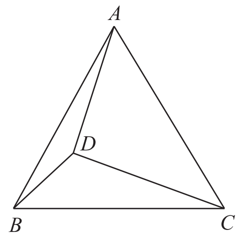


图 5-5

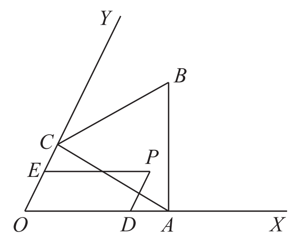


图 5-6

10. 边长为 a 的等边三角形,记为第一个等边三角形,取其各边的三等分点,顺次连接得到一个正六边形,记为第 1 个正六边形,取这个正六边形不相邻的三边中点,顺次连接又得到一个等边三角形,记为第 2 个等边三角形,取其各边的三等分点,顺次连接又得到一个正六边形,记为第 2 个正六边形,……,按此方式依次操作,则第 6 个正六边形的边长为________.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 如图 5-7 所示,在 $\triangle ABC$ 中,$AC=BC$,$\angle ACB=100^\circ$,点 D 在线段 AB 上运动(D 不与 A、B 重合),连接 CD,作 $\angle CDE=40^\circ$,DE 交 BC 于点 E.若 $\triangle CDE$ 是等腰三角形,求 $\angle ADC$ 的度数.

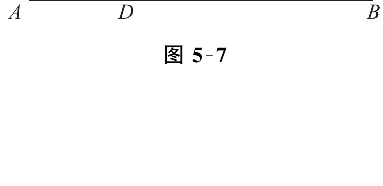


图 5-7

12.已知,如图5-8所示,在$\triangle ABC$中,$\angle A=90°$,D是AC上一点,且$\angle ADB=2\angle C$,P是BC上任一点,$PE\perp BD$于E,$PF\perp AC$于F,求证:$PE^2+AF^2=BP^2$.

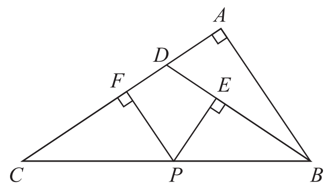


图 5-8

13. 如图5-9所示,在四边形$ABCD$中,AC和BD是对角线.$\triangle ABC$是等边三角形,$\angle ADC=30°$,$AD=4$,$BD=6$,求CD的长度.

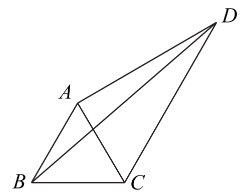


图 5-9

14. 在菱形$ABCD$中,$\angle BAD=60°$.

(1) 如图5-10(a)所示,点E为线段AB的中点,连接DE、CE.若$AB=4$,求线段EC的长.

(2) 如图5-10(b)所示,M为线段AC上一点(不与A、C重合),以AM为边向上构造等边$\triangle AMN$,线段MN与AD交于点G,连接NC、DM,Q为线段NC的中点,连接DQ、MQ,判断DM与DQ的数量关系,并证明你的结论.

(3) 在(2)的条件下,若$AC=\sqrt{3}$,请你直接写出$DM+CN$的最小值.

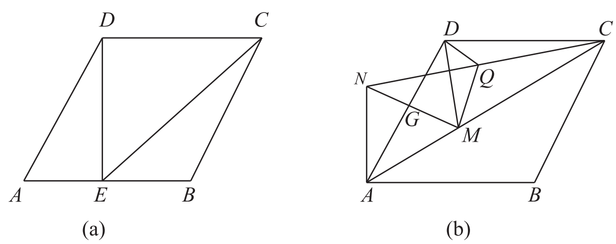


图 5-10

15. 如图5-11所示,$\triangle ABC$是等边三角形,点$A(-3,0)$,点$B(3,0)$,点D是y轴上的一个动点,连接BD,将线段BD绕点B逆时针旋转$60°$,得到线段BE,连接DE,得到$\triangle BDE$,求OE的最小值.

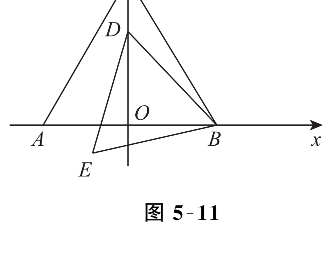


图 5-11

第 6 讲　直角三角形

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 如图 6-1 所示,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$BC=3$,$AC=4$,点 D 是 AB 的中点,将 $\triangle ACD$ 沿 CD 翻折得到 $\triangle ECD$,连接 AE、BE,则线段 BE 的长等于________.

2. 如图 6-2 所示,在平行四边形 $ABCD$ 中,$CD=2AD$,$BE\perp AD$ 于点 E,F 为 DC 中点,连接 EF、BF.有下列结论:①$\angle ABC=2\angle ABF$;②$EF=BF$;③$S_{四边形DEBC}=2S_{\triangle EFB}$;④$\angle CFE=3\angle DEF$.其中正确结论的个数为________个.

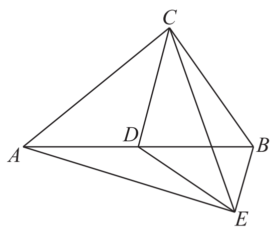


图 6-1

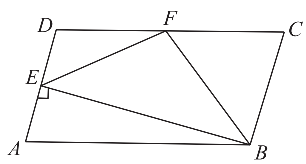


图 6-2

3. 如图 6-3 所示,$\angle MON=90°$,长方形 $ABCD$ 的顶点 B、C 分别在边 OM、ON 上,当 B 在边 OM 上运动时,C 随之在边 ON 上运动,若 $CD=5$,$BC=24$,运动过程中,点 D 到点 O 的最大距离为________.

4. 如图 6-4 所示,在正方形 $ABCD$ 中,点 E 在 AB 上,且 $BE=\frac{1}{4}AB$,点 F 是 BC 的中点,点 G 是 DE 的中点,延长 DF,与 AB 的延长线交于点 H.以下 4 个结论:①$FG=\frac{1}{2}EH$;②$\triangle DFE$ 是直角三角形;③$FG=\frac{1}{2}DE$;④$DE=EB+BC$.其中正确结论的个数有________个.

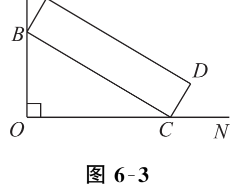


图 6-3

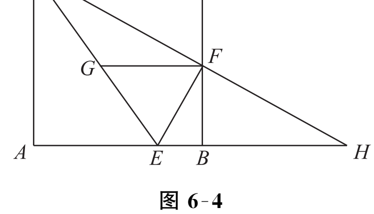


图 6-4

5. 如图 6-5 所示，在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，四边形 $OABC$ 是长方形，点 A、C 的坐标分别为 $A(10,0)$，$C(0,4)$，点 D 是 OA 的中点，点 P 为线段 BC 上的点.小明同学写出了一个以 OD 为腰的等腰 $\triangle ODP$ 的顶点 P 的坐标$(3,4)$，请你写出其余所有符合这个条件的点 P 坐标________.

6. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=5$，$BC=8$，P 是 BC 边上的动点，过点 P 作 $PD\perp AB$ 于点 D，$PE\perp AC$ 于点 E，则 $PD+PE$ 的长为________.

7. 在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，过点 O 作 $OE\perp BD$ 交 AD 于点 E，已知 $AB=2$，$\triangle DOE$ 的面积为$\dfrac{5}{4}$，则 AE 的长为________.

8. 如图 6-6 所示，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle ACB=90^\circ$，点 P 为 $\triangle ABC$ 外一点，$CP=\sqrt{2}$，$BP=3$，AP 的最大值为________.

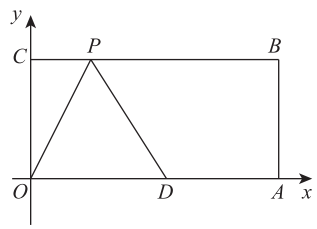


图 6-5

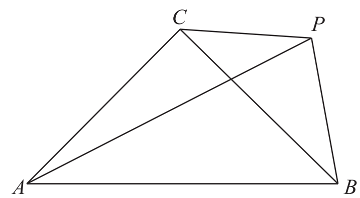


图 6-6

9. 如图 6-7 所示，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=12$，$BC=5$，分别以 AB、AC、BC 为边在 AB 的同侧作正方形 $ABDE$、$ACFG$、$BCIH$，则图中阴影部分的面积之和为________.

10. 如图 6-8 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=3$，$AC=4$，点 D 是 BC 的中点，将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折得到 $\triangle AED$，连接 CE，则线段 CE 的长等于________.

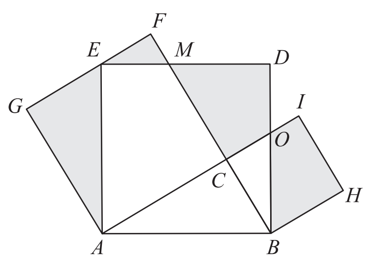


图 6-7

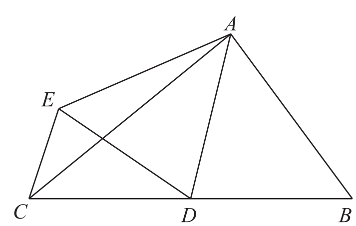


图 6-8

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 如图 6-9 所示,在平面直角坐标系 xOy 中,点 A、B 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上运动,点 M 为线段 AB 的中点.点 D、E 分别在 x 轴、y 轴的负半轴上运动,且 $DE=AB=10$.以 DE 为边在第三象限内作正方形 $DGFE$,则线段 MG 长度的最大值为多少.

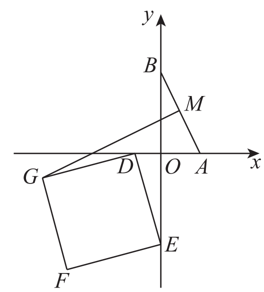


图 6-9

12. 如图 6-10 所示,在正方形 $ABCD$ 中,以 AB 为腰向正方形内部作等腰 $\triangle ABE$,点 G 在 CD 上,且 $CG=3DG$.连接 BG 并延长,与 AE 交于点 F,与 AD 延长线交于点 H.连接 DE 交 BH 于点 K,连接 CK.若 $AE^2=BF\cdot BH$,$FG=\frac{13}{5}\sqrt{5}$,求 $S_{\text{四边形}EFKC}$.

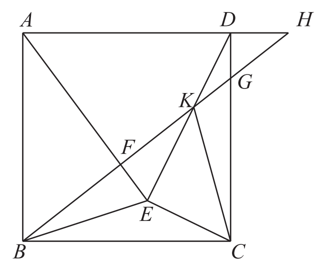


图 6-10

13. 如图 6-11 所示,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=6$,$BC=4$,点 E 是边 BC 上一动点,把 $\triangle DCE$ 沿 DE 折叠得 $\triangle DFE$,射线 DF 交直线 CB 于点 P,当 $\triangle AFD$ 为等腰三角形时,求 DP 的长.

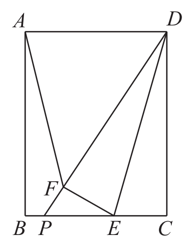


图 6-11

14. 已知在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=6$，$BC=8$，现要将 Rt$\triangle ABC$ 扩充成等腰三角形，且扩充部分是以 BC 为直角边的直角三角形，求扩充后的等腰三角形的周长.

15. 如图 6-12 所示，$\triangle ABC$ 是等边三角形，$AB=4$，E 是 AC 的中点，D 是直线 BC 上一动点，线段 ED 绕点 E 逆时针旋转 90°，得到线段 EF，当点 D 运动时，求 AF 的最小值.

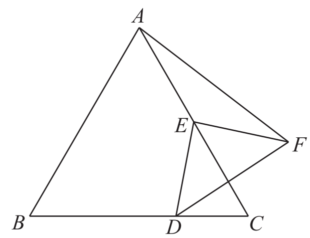


图 6-12

第 7 讲　整式的乘法和乘法公式

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 已知 $a+b+c=0$,$a^2+b^2+c^2=1$,则代数式 $a^4+b^4+c^4+ab+bc+ca$ 的值为________.

2. 如果一个正整数可以表示为两个连续奇数的平方差,那么称该正整数为“和谐数”(如 $8=3^2-1^2$,$16=5^2-3^2$,即 8、16 均为“和谐数”),在不超过 2017 的正整数中,所有的“和谐数”之和为________.

3. 已知实数 x、y、z 满足 $x^2+y^2+z^2=3$,则 $xy+yz+zx$ 的最大值为________.

4. 观察下列算式:

① $(x-1)(x+1)=x^2-1$;

② $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$;

③ $(x-1)(x^3+x^2+x+1)=x^4-1$.

寻找规律,并判断 $2^{2018}+2^{2017}+\cdots+2^2+2+1$ 的值的末位数字为________.

5. 若二项式 $4m^2+9$ 加上一个单项式后是一个含 m 的完全平方式,则满足条件的单项式有________.

6. 已知 $a=\sqrt{5}-1$,则 $2a^3+7a^2-2a-12$ 的值等于________.

7. 如果对于不小于 8 的自然数 n,当 $3n+1$ 是一个完全平方数时,$n+1$ 能表示成 k 个完全平方数的和,那么 k 的最小值为________.

8. 已知 $\frac{1}{a}-|a|=\frac{1}{2}$,则 $\frac{1}{a}+|a|$ 的值为________.

9. 已知实数 x、y、z 满足 $x^2+y^2+z^2=4$,则 $(2x-y)^2+(2y-z)^2+(2z-x)^2$ 的最大值为________.

10. 设 x^3-2x^2+ax+b 除以 $(x-1)(x-2)$ 的余式为 $2x+1$,则代数式 $a+b$ 的值为________.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 若 x^2+6x+k^2 恰好是一个整式的平方,求常数 k 的值.

12. 如图 7-1 所示，正方形的面积可以用两种方法得出，即 c^2 或 $(b-a)^2+4\times\frac{1}{2}ab$，由此可推出 $a^2+b^2=c^2$. 若直角三角形中两直角边的和 $a+b=4$，斜边 c 的长为 3，利用该等式来计算直角三角形的面积.

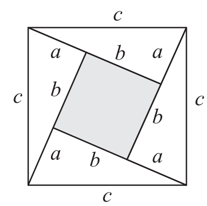


图 7-1

13. 已知实数 a、b 满足 $a^2=\sqrt{2}b+3$，$b^2=\sqrt{2}a+3$，且 $a\neq b$，求 ab 的值.

14. 工厂接到订单，需要边长为 $a+3$ 和 3 的两种正方形卡纸.

(1) 仓库只有边长为 $a+3$ 的正方形卡纸，现决定将部分边长为 $a+3$ 的正方形纸片，按图 7-2(a) 所示裁剪得边长为 3 的正方形.

① 如图 7-2(b) 所示，求裁剪正方形后剩余部分的面积（用含 a 代数式来表示）.

② 剩余部分沿虚线又剪拼成一个如图 7-2(c) 所示的长方形（不重叠、无缝隙），求拼成的长方形的边长（用含 a 代数式来表示）.

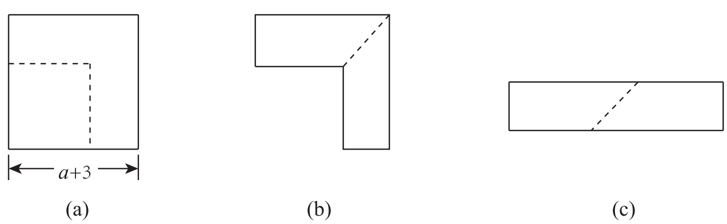


图 7-2

(2) 若将裁得正方形与原有正方形卡纸放入长方体盒子底部，按图 7-3(a) 和 (b) 两种方式放置，两种方式中两张正方形纸片均有部分重叠，盒子底部中未被这两张正方形纸片覆盖的部分用阴影表示. 设图 7-3(a) 中阴影部分的面积为 S_1，图 7-3(b) 中阴影部分的面积为 S_2，测得

盒子底部长方形长比宽多 3,求 S_2-S_1.

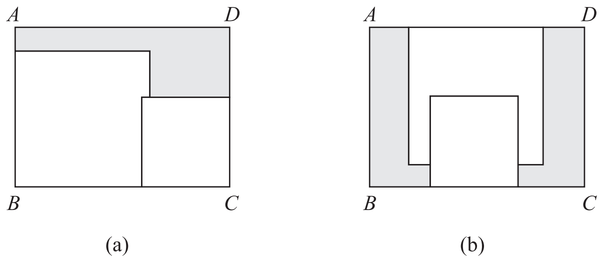


图 7-3

15. 求满足 $2p^2+p+8=m^2-2m$ 的所有质数 p 和正整数 m.

第 8 讲　整式的除法

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 若 x^3+ax^2+bx+8 有两个因式 $x+1$ 和 $x+2$,则 $a+b=$________.

2. 已知 a、b、c 均为不等于 1 的正数,且 $a^{-2}=b^3=c^6$,则 abc 的值为________.

3. 已知 $a+x^2=2010$,$b+x^2=2011$,$c+x^2=2012$,且 $abc=24$,则代数式 $\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}+\frac{a}{bc}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$ 的值为________.

4. 多项式 $9x^4+5x^2y^2-8y^4-8xy^3+18x^3y$ 除以 $3x-2y$ 的商式为________,余式为________.

5. 设 $x=1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots-2018^2+2019^2$,以 2020 除 x,所得余数为________.

6. 已知 $(3x+1)^5=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$,则 $a-b+c-d+e-f$ 值为________.

7. 若 $x^3-x^2+x-2=0$,则 $x^4+2x^3-2x^2+x-1=$________.

8. 已知 $x+y-2$ 是二元二次式 $x^2+axy+by^2-5x+y+6$ 的一个因式,则 $a+b=$________.

9. 若 x^3-6x^2+ax+b 能被 $(x-1)(x-3)$ 整除,则 a^2-b^2 的值________.

10. 已知 $a^2+4a+1=0$,且 $\frac{a^4+ma^2+1}{3a^3+ma^2+3a}=5$,则 $m=$________.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 设 a、b、c、d 都是正整数,并且 $a^5=b^4$,$c^3=d^2$,$c-a=19$,求 $d-b$ 的值.

12. 已知多项式 $2x^2+3xy-2y^2-x+8y-6=(x+2y+m)(2x-y+n)$,求 $\frac{m^3+1}{n^2-1}$ 的值.

13. 已知 a、b、c 为有理数,且多项式 x^3+ax^2+bx+c 能够被 x^2+3x-4 整除.

(1) 求 $4a+c$ 的值.

(2) 求 $2a-2b-c$ 的值.

(3) 若 a、b、c 为整数,且 $c \geqslant a > 1$,试比较 a、b、c 的大小.

14. 已知多项式 $2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$ 能被 x^2+x-2 整除,求 $\frac{a}{b}$ 的值.

15. 一个关于 x 的二次多项式 $f(x)$,它被 $x-1$ 除时余 2,它被 $x-3$ 除时余 28,它还可被 $x+1$ 整除,求 $f(x)$.

第 9 讲　因式分解

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 将 x^5+x^4+1 因式分解得________.

2. 已知 $a=2002x+2003$,$b=2002x+2004$,$c=2002x+2005$,则多项式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值为________.

3. 计算:$3\times\left(\frac{2016-\sqrt{2016^2-12\times2017}}{2\times3}\right)^2-2016\times\frac{2016-\sqrt{2016^2-12\times2017}}{2\times3}=$______.

4. 若 $x^2+kx+20$ 能在整数范围内因式分解,则 k 可取的整数值有________个.

5. 分解因式 $(xy-1)^2-(x+y-2xy)(2-x-y)=$________.

6. 因式分解 x^2-ax+b,甲看错了 a 的值,分解的结果为 $(x+6)(x-1)$,乙看错了 b 的值,分解的结果为 $(x-2)(x+1)$,那么 x^2-ax+b 分解因式正确的结果为________.

7. 四边形的四条边长依次为 a、b、c、d,且它们满足 $a^2+b^2+c^2+d^2=2(ac+bd)$,则此四边形的形状为________.

8. 已知 $N=5^2\times3^{2n+1}\times2^n-3^n\times6^{n+2}$,则 N 可因式分解为________.

9. 因式分解:$x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3=$________.

10. 小华在抄因式分解的题目时,不小心漏抄了 x 的指数,她只知道该数为不大于 10 的非负整数,并且能利用平方差公式因式分解,她抄在作业本上的式子是 $x^{\square}-4y^2$("□"表示漏抄的指数,且 $x,y\neq0$),则这个指数可能的结果有________.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. a、b、c 为正整数,且 $a^2+b^3=c^4$,求 c 的最小值.

12. 如果关于 x 的方程 $x^2+bx-c=0$ 可变形为 $(x-m)(x-n)=0$,其中 m、n 都是整数,并且 $b=9a-3$,$c=8a-2$,求 b、c 的值.

13. 求所有满足下列条件的四位数$\overline{abcd}$,使得$\overline{abcd}=(\overline{ab}+\overline{cd})^2$,其中数字 c 可以是 0.

14. 若多项式 x^2+mx+4 在整数范围内可因式分解,求 m 的值.

15. 小明在解方程$\sqrt{24-x}-\sqrt{8-x}=2$时采用了下面的方法:

$(\sqrt{24-x}-\sqrt{8-x})(\sqrt{24-x}+\sqrt{8-x})=(\sqrt{24-x})^2-(\sqrt{8-x})^2=(24-x)-(8-x)=16$,又有$\sqrt{24-x}-\sqrt{8-x}=2$,可得$\sqrt{24-x}+\sqrt{8-x}=8$,将这两式相加可得$\begin{cases}\sqrt{24-x}=5\\\sqrt{8-x}=3\end{cases}$,将$\sqrt{24-x}=5$两边平方可解得 $x=-1$,经检验 $x=-1$ 是原方程的解.

请你学习小明的方法,解方程$\sqrt{x^2+42}+\sqrt{x^2+10}=16$.

第 10 讲　因式分解的应用

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 已知关于 x 的方程 $x^4+2x^3+(3+k)x^2+(2+k)x+2k=0$ 有实根,并且所有实根的乘积为 -2,则所有实根的平方和为________.

2. 已知多项式 $2x^2+3xy-2y^2-x+8y-6$ 可以分解为 $(x+2y+m)(2x-y+n)$ 的形式,那么 $\frac{m^3+1}{n^2-1}$ 的值是________.

3. 若 $a^4+b^4+a^2b^2=5$,$ab=2$,则 a^2+b^2 的值是________.

4. 已知 a、b、c 为三个非负数,且满足 $3a+2b+c=5$,$2a+b-3c=1$,设 $S=3a+b-7c$,则 S 的最大值为________,最小值为________.

5. 已知 $d=x^4-2x^3+x^2-12x-5$,则当 $x^2-2x-5=0$ 时,d 的值为________.

6. 已知实数 x、y、z 满足 $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$,则 $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$ 的值是________.

7. 若 $a=\frac{3}{8}x-20$,$b=\frac{3}{8}x-18$,$c=\frac{3}{8}x-16$,则 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$ 的值为________.

8. 大于 20,小于 30 且能整除 $3^{48}-1$ 的整数是________.

9. 多项式 $x^2-mxy+9y^2$ 能用完全平方公式因式分解,则 m 的值是________.

10. 在日常生活中,取款、上网等都需要密码,有一种用“因式分解”法产生的密码,方便记忆.原理是:如对于多项式 x^4-y^4,因式分解的结果是 $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$,若取 $x=9$,$y=9$ 时,则各个因式的值是 $x-y=0$,$x+y=18$,$x^2+y^2=162$.于是,把 018162 作为一个六位数的密码.对于多项式 $4x^3-xy^2$,取 $x=10$,$y=10$,用上述方法产生的密码是________.(写出一个即可)

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 我们知道,任意一个正整数 n 都可以进行这样的分解:$n=p\times q$(其中 p、q 是正整数,且 $p\leqslant q$),在 n 的所有这种分解中,如果 p、q 两因数之差的绝对值最小,我们就称 $p\times q$ 是 n 的最佳分解.并规定:$F(n)=\frac{p}{q}$.例如 12 可以分解成 1×12,2×6 或 3×4,因为 $12-1>6-2>$

$4-3$,所以 3×4 是 12 的最佳分解,所以 $F(12)=\dfrac{3}{4}$.

(1) 如果一个正整数 a 是另外一个正整数 b 的平方,那么我们称正整数 a 是完全平方数.求证:对任意一个完全平方数 m,总有 $F(m)=1$.

(2) 如果一个两位正整数 t,$t=10x+y$($1\leqslant x\leqslant y\leqslant9$,$x$、$y$ 为自然数),交换其个位上的数与十位上的数得到的新数减去原来的两位正整数所得的差为 18,那么我们称这个数 t 为"吉祥数",求所有"吉祥数"中 $F(t)$ 的最大值.

12. 已知 $m^2=n+4$,$n^2=m+4$($m\neq n$),求 $m^3-2mn+n^3$ 的值.

13. 如图 10-1 所示,已知点 $A(3,4)$,点 $B(-1,1)$,在 x 轴上有两动点 $E(n,0)$,$F(m,0)$(其中 F 在 E 的右边),且 m、n 满足 $m^3-n^3+mn^2-nm^2=2m^2+2n^2$.求点 E 的坐标,使四边形 $ABEF$ 的周长取得最小值.

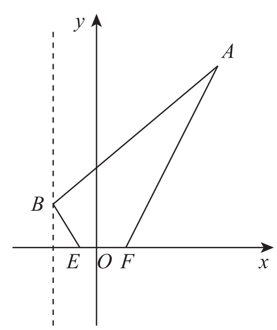


图 10-1

14. 如图 10-2 所示，在正方形 $ABCD$ 中，点 G 是边 CD 上一点(不与端点 C、D 重合)，以 CG 为边在正方形 $ABCD$ 外作正方形 $CEFG$，且 B、C、E 三点在同一直线上，设正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 的边长分别为 a 和 $b(a>b)$.

(1) 分别用含 a、b 的代数式表示图 10-2(a) 和(b) 中阴影部分的面积 S_1、S_2.(结果要化简)

(2) 如果 $a+b=5$，$ab=3$，求 S_1 的值.

(3) 当 $S_1<S_2$ 时，求 $\dfrac{a}{b}$ 的取值范围.

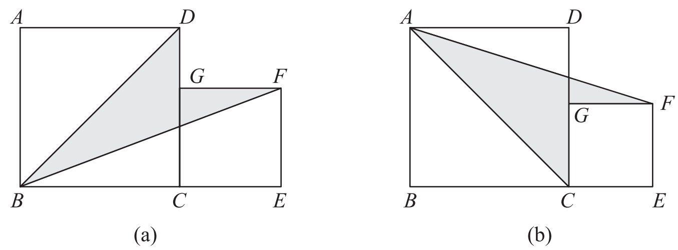


图 10-2

15. 已知 a、b 是方程 $x^2-x-3=0$ 的两个根，求 $2a^3+b^2+3a^2-11a-b+6$ 的值.

第 11 讲　非负数

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 多项式 $5x^2-4xy+4y^2+12x+25$ 的最小值为________.

2. 若实数 a、b 满足 $\frac{1}{2}a-ab+b^2+2=0$,则 a 的取值范围是________.

3. 方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{7}$ 的正整数解 (x,y) 的组数是________.

4. 若非负数 a、b、c 满足 $a>0$,$a+b+c=6$,则数据 a、b、c 的方差的最大值是________.

5. 已知 $a>0$,$b>0$,$a+b=2$,则 $\frac{a^2+b^2}{a+b}$ 的最小值是________.

6. 已知若干个正数,互不相等,均不为 1,每个数都等于其中另两个数的积,则这组数至少有________个.

7. 已知正整数 a、b、c 满足不等式 $a^2+b^2+c^2+43\leqslant ab+9b+8c$,则 $a+b+c$ 的值为________.

8. 设实数 a、b 满足 $a^2(b^2+1)+b(b+2a)=40$,$a(b+1)+b=8$,则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$________.

9. 已知 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+14=0$,则 $x+y+z=$________.

10. 若数 a 使关于 x 的不等式组 $\begin{cases}\frac{x-1}{2}<\frac{x+1}{3},\\ 5x-2\geqslant x+a\end{cases}$ 有且只有 4 个整数解,且使关于 y 的方程 $\frac{y+a}{y-1}+\frac{2a}{1-y}=2$ 的解为非负数,则符合条件的所有整数 a 的和为________.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 规定:输入数据 x、y 时,若输出的是代数式称为“诗 S”,若输出的是等式称为“远方 M”.回答下列问题:

(1) 当输入正整数 x、y 时,得到“远方 M”和“诗 S”,若“远方 M”为 $2y=x^2-1$,求证“诗 S”:$2(x+y+1)$ 是完全平方式.

(2) 当输入 x、y 时,求“远方 M”:$x(x-1)+xy+y=51$ 的 x、y 的正整数解.

(3) 若正数 x、y 互为倒数,求“诗 S”:$S=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2y}$ 的最小值.

12. 设实数 a、b、c 满足 $abc \neq 0$，且 $14(a^2+b^2+c^2)=(a+2b+3c)^2$，求代数式 $\dfrac{a^2+2b^2+3c^2}{ab+ac+bc}$ 的值.

13. 已知 a、b、c 为正整数，且 $a>b>c$，若 $b+c$、$a+c$、$a+b$ 是三个连续正整数的平方，求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值.

14. 已知实数 a、b 满足 $a^2+b^2=1$，求 a^4+ab+b^4 的最小值.

15. 某城市有一段马路需整修，这段马路的长不超过 3500m，今有甲、乙、丙三个施工队，分别施工人行道、非机动车道和机动车道.他们于某天零时同时开工，每天 24h 连续施工.若干天后的零时甲完成任务；几天后的 18 时，乙完成任务；自乙队完成的当天零时起，再过几天后的 8 时，丙完成任务.已知三个施工队每天完成的施工任务分别为 300m、240m、180m，问这段马路有多长？

第 12 讲　分式的运算

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 已知 $a+b=\sqrt{5}$,则$\dfrac{a^2+a^2b^2+b^2+2ab}{a+ab+b}+ab=$________.

2. 若 a、b、c 都是负数,且$\dfrac{c}{a+b}<\dfrac{a}{b+c}<\dfrac{b}{c+a}$,则 a、b、c 的大小关系为________.

3. 计算$\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{y-z}{y+z}+\dfrac{z-x}{z+x}+\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}=$________.

4. 已知$a+b+c=0$,$abc\neq0$,则代数式$\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}+\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}=$________.

5. 若存在三个实数 m、p、q,满足 $m+p+q=18$,且$\dfrac{1}{m+p}+\dfrac{1}{p+q}+\dfrac{1}{m+q}=\dfrac{7}{9}$,则$\dfrac{m}{p+q}+\dfrac{p}{m+q}+\dfrac{q}{m+p}$ 的值为________.

6. 已知关于 x 的方程 $x+\dfrac{1}{x}=a+\dfrac{1}{a}$ 的两根分别为 a 和$\dfrac{1}{a}$,则方程 $x+\dfrac{1}{x-1}=a+\dfrac{1}{a-1}$ 的两根为________.

7. 设非零实数 a、b、c 满足$\begin{cases}a+2b+3c=0,\\2a+3b+4c=0,\end{cases}$则$\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ 的值为________.

8. 已知实数 a、b、c,满足 $abc=-1$,$a+b+c=4$,$\dfrac{a}{a^2-3a-1}+\dfrac{b}{b^2-3b-1}+\dfrac{c}{c^2-3c-1}=\dfrac{4}{9}$,则 $a^2+b^2+c^2=$________.

9. 如图 12-1 所示,$\triangle ABC$ 的面积为 S,在 BC 上有点 A',且 $BA':A'C=m(m>0)$;在 CA 的延长线有点 B',且 $CB':AB'=n(n>1)$;在 AB 的延长线有点 C',且 $AC':BC'=k(k>1)$. 则 $S_{\triangle A'B'C'}=$________.

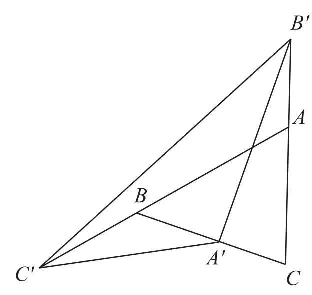


图 12-1

10. 已知 a、b、c、n 是互不相等的正整数,且$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{n}$也是整数,则 n 的最大值是________.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 已知 a^2-6a+9 与 $|b-1|$ 互为相反数,求代数式 $\left(\dfrac{4}{a^2-b^2}+\dfrac{a+b}{ab^2-a^2b}\right)\div\dfrac{a^2+ab-2b^2}{a^2b+2ab^2}+\dfrac{b}{a}$ 的值.

12. 求和 $S=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\cdots+\dfrac{2^n}{1+x^{2n}}$.

13. 已知三角形的三边长分别为 a、b、c,且满足 $\dfrac{2a^2}{1+a^2}=b$,$\dfrac{2b^2}{1+b^2}=c$,$\dfrac{2c^2}{1+c^2}=a$.求三角形的面积.

14. 已知 $\dfrac{ab}{a+b}=4$,$\dfrac{ac}{a+c}=5$,$\dfrac{bc}{b+c}=6$,求 $17a+13b-7c$ 的值.

15. 已知 a、b、c、d、x、y、z、w 是互不相等的非零实数,且 $\dfrac{a^2b^2}{a^2y^2+b^2x^2}=\dfrac{b^2c^2}{b^2z^2+c^2y^2}=\dfrac{c^2d^2}{c^2w^2+d^2z^2}=\dfrac{abcd}{xyzw}$,求 $\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}+\dfrac{c^2}{z^2}+\dfrac{d^2}{w^2}$ 的值.

第 13 讲　分式方程

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 关于 x 的方程$\frac{x+1}{x+2}-\frac{x}{x-1}=\frac{a}{x^{2}+x-2}$的根为负数,则 a 的值为________.

2. 方程$\frac{1}{(x-1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+8)}+\frac{1}{(x+8)(x+11)}=\frac{1}{3x-3}-\frac{1}{24}$的解为________.

3. 若关于 x 的分式方程$\frac{1}{x-2}-\frac{ax-1}{2-x}=4$有正整数解,且关于 y 的不等式组$\begin{cases}1-3(y-7)\geqslant -2,\\ \frac{a+y}{2}\leqslant y-3\end{cases}$有解,则所有符合条件的整数 a 的值的积是________.

4. 分式方程$\frac{1}{x^{2}+3x+2}+\frac{1}{x^{2}+5x+6}+\frac{1}{x^{2}+7x+12}=\frac{1}{x+4}$的解是 $x=$________.

5. 已知 $a^{2}-a-1=0$,且$\frac{2a^{4}-3xa^{2}+2}{a^{3}+2xa^{2}-a}=-\frac{93}{112}$,则 $x=$________.

6. 已知$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0,\\ \frac{1}{x}-\frac{6}{y}-\frac{5}{z}=0,\end{cases}$则$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=$________.

7. 若 x 满足$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x+\frac{1}{3}}}}=\frac{7}{11}$,则 $x=$________.

8. 若关于 x 的分式方程$\frac{2}{x-2}+\frac{mx}{x^{2}-4}=\frac{3}{x+2}$无解,则 $m=$________.

9. 某汽车从 A 地驶向 B 地,若行驶速度为 a km/min,则 11 点到达,若行驶速度为$\frac{2}{3}a$ km/min,则 11:20 时距离 B 地还有 10km;如果改变出发时间,若行驶速度为$\frac{3}{4}a$ km/nin,则 11 点到达,若行驶速度为 a km/min,则 11:20 时已经超过 B 地 30km.A、B 两地的路程是________km.

10. 有一个正在向上匀速移动的自动扶梯，旅客A从其顶端往下匀速行至其底端，共走了60级，B从其底端往上匀速行至其顶端，共走了30级（扶梯行驶，两人也在梯上行走，且每次只跨1级），且A的速度（即单位时间所走的级数）是B的速度的3倍，那么自动扶梯露在外面的级数是________.

二、解答题（每题10分，共50分）

11. 解下列分式方程（组）：

（1）$\dfrac{5x-96}{x-19}+\dfrac{x-8}{x-9}=\dfrac{4x-19}{x-6}+\dfrac{2x-21}{x-8}$；

（2）$\begin{cases}\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{bc}{b+c}=\dfrac{1}{4},\\ \dfrac{ca}{c+a}=\dfrac{1}{5}.\end{cases}$

12. 已知$\dfrac{a}{1+a+ab}+\dfrac{b}{1+b+bc}+\dfrac{c}{1+c+ca}=1$，求证：$abc=1$.

13. 如图13-1所示，四边形$ABCD$是矩形，甲、乙两人分别从A、B同时出发，沿矩形按逆时针方向前进，即按$A\to B\to C\to D\to\cdots$顺序前进，已知甲的速度为65m/min，乙的速度为74m/min，问乙至少跑第几圈时才有可能第一次追上甲？又乙至多跑第几圈时一定能追上甲？请说明理由.

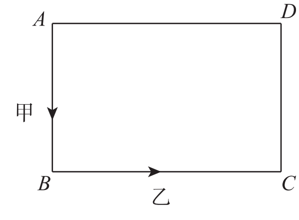


图13-1

14. 如图13-2所示是一个长为400m的环形跑道,其中A、B为跑道对称轴上的两点,且A、B之间有一条50m的直线通道.甲、乙两人同时从A点出发,甲按逆时针方向以速度v_1沿跑道跑步,当跑到B点处时继续沿跑道前进,乙按顺时针方向以速度v_2沿跑道跑步,当跑到B点处时沿直线通道跑回A点处.假设两人跑步时间足够长.求:

(1) 如果$v_1:v_2=3:2$,那么甲跑了多少路程后,两人首次在A点处相遇?

(2) 如果$v_1:v_2=5:6$,那么乙跑了多少路程后,两人首次在B点处相遇?

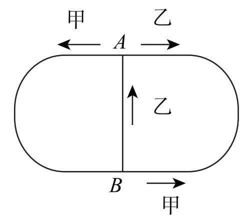


图 13-2

15. 某商场在一楼至二楼间安装了一部自动扶梯,以匀速向上行驶.甲、乙两同学同时从扶梯上匀速走到二楼,且甲每分钟走动的级数是乙的两倍.已知甲走了24级到扶梯顶部,乙走了16级到扶梯顶部(甲、乙两同学每次只跨一级台阶).

(1) 扶梯露在外面的部分有多少级?

(2) 如果与扶梯并排有从二楼到一楼的楼梯道,台阶数与扶梯级数相同,甲、乙各自到扶梯顶部后按原速再下楼梯到楼梯底部再乘扶梯,若楼梯与扶梯之间的距离忽略不计,问甲第1次追上乙时是在扶梯上还是在楼梯上?他已经走动的级数是多少级?

第 14 讲　有理式的恒等变形

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 若 $M=3x^2-8xy+9y^2-4x+6y+13$(x、y 是实数),则 M________0.(填“$>$”“$<$”或“$=$”)

2. 若 $x+y=1$,$x^3+y^3=\frac{1}{3}$,则 $x^5+y^5=$________.

3. 已知实数 x、y、z 满足 $x^2+y^2+z^2=4$,则 $(2x-y)^2+(2y-z)^2+(2z-x)^2$ 的最大值为________.

4. 如果 a、b、c 均为正数,且 $a(b+c)=152$,$b(c+a)=162$,$c(a+b)=170$,那么 abc 的值是________.

5. 已知 x、y、z 是三个互不相同的非零实数,设 $a=x^2+y^2+z^2$,$b=xy+yz+zx$,$c=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$,$d=\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$,则 a 与 b 的大小关系是________,c 与 d 的大小关系是________.

6. 已知 w、x、y、z 四个数都不等于零,也互不相等,如果 $w+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{w}$,那么 $w^2x^2y^2z^2=$________.

7. 当 $m=$________时,$x^3+y^3+z^3+mxyz(xyz\neq 0)$ 能被 $x+y+z$ 整除.

8. 已知 $a+b+c=0$,$a^3+b^3+c^3=0$,则 $a^{15}+b^{15}+c^{15}=$________.

9. 计算:

$$\frac{(10^4+324)\times(22^4+324)\times(34^4+324)\times(46^4+324)\times(58^4+324)}{(4^4+324)\times(16^4+324)\times(28^4+324)\times(40^4+324)\times(52^4+324)}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

10. 已知 $2^a\times 5^b=2^c\times 5^d=10$,则 $(a-1)(d-1)-(b-1)(c-1)=$________.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 设 $a>b>c$,求证:$(2b-c-a)^2-4(2a-b-c)(2c-a-b)=9(a-c)^2$.

12. 已知 $x+y+z=xyz$,证明:$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-x^2)(1-z^2)+z(1-x^2)(1-y^2)=4xyz$.

13. 证明:$(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3+(x+y-2z)^3=3(y+z-2x)(z+x-2y)(x+y-2z)$.

14. 已知 a、b、c 是实数,若$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$、$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$、$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$之和恰等于1,求证:这三个分数的值有两个为1,一个为-1.

15. (1) 请观察:$25=5^2$,$1225=35^2$,$112\ 225=335^2$,$11\ 122\ 225=3335^2$,… 写出表示一般规律的等式,并加以证明.

(2) $26=5^2+1^2$,$53=7^2+2^2$,$26\times53=1378$,$1378=37^2+3^2$.任意挑选另外两个类似26和53的数,使它们能表示成两个平方数的和,把这两个数相乘,乘积仍然是两个平方数的和吗?你能说出其中的道理吗?

注:瑞士数学家欧拉曾对(2)的性质做了更进一步的推广.他指出:可以表示为四个平方数之和的甲、乙两数相乘,其乘积仍然可以表示为四个平方数之和.即$(a^2+b^2+c^2+d^2)(e^2+f^2+g^2+h^2)=A^2+B^2+C^2+D^2$.这就是著名的欧拉恒等式.

第 15 讲　实数与二次根式

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 若 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$,$b=2+\sqrt{6}-\sqrt{10}$,则 $\dfrac{a}{b}=$________.

2. 已知 $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$,则代数式 x^4-3x^3-3x+1 的值为________.

3. 已知对于正整数 n,有 $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$,若某个正整数 k 满足 $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\dfrac{2}{3}$,则 $k=$________.

4. 有________个实数 x,可以使得 $\sqrt{120-\sqrt{x}}$ 为整数.

5. 设 x、y 都是有理数,且满足方程 $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)x+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)y-4-\sqrt{2}=0$,那么 $x-y$ 的值是________.

6. 计算:$\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{26}-\sqrt{21}-\sqrt{39}}{\sqrt{14}+\sqrt{26}+\sqrt{21}+\sqrt{39}}=$________.

7. 设 $a-b=2+\sqrt{3}$,$b-c=2-\sqrt{3}$,则 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=$________.

8. $\sqrt{1-\sqrt{x^2+5x+7}}+\sqrt{x^2+5x+6}=$________.

9. 已知 a、b 是正整数,且满足 $2\left(\sqrt{\dfrac{15}{a}}+\sqrt{\dfrac{15}{b}}\right)$ 是整数,则这样的有序数对 (a,b) 共有________对.

10. 设 n 为正整数,且 n^3+2n^2 是一个奇数的平方,则满足条件的 n 中最小的两个数之和为________.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 已知 $x=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$,$y=\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$,且 $19x^2+123xy+19y^2=1985$.试求正整数 n.

12. 求比$(\sqrt{6}+\sqrt{5})^6$大的最小整数.

13. 已知$S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2019^2}+\frac{1}{2020^2}}$,求不超过$S$的最大整数$[S]$.

14. 试将实数$\sqrt{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})}$改写成三个正整数的算术根之和.

15. 设$m=\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}\,(1\leqslant a\leqslant 2)$,求$m^{10}+m^9+m^8+\cdots+m-26$的值.

第 16 讲　勾股定理

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 如图 16-1 所示,在 $\triangle ABC$ 中,D 是 BC 上一点,已知 $AC=5$,$AD=6$,$BD=10$,$CD=5$,那么 $\triangle ABC$ 的面积是________.

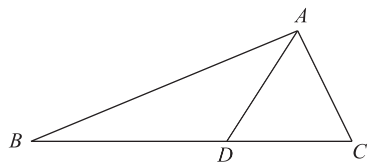


图 16-1

2. 记三角形三边长为 a、b、c,对应边上的高为 h_a、h_b、h_c. 若三条高分别为 2、x、6 的三角形是直角三角形,则 $x=$________.

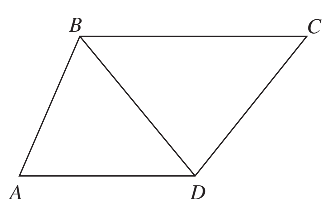
3. 阅读:能够成为直角三角形三条边长的三个正整数 a、b、c,称为勾股数.世界上第一次给出勾股数通解公式的是我国古代数学著作《九章算术》,其勾股数组公式为 $\begin{cases} a=\frac{1}{2}(m^2-n^2), \\ b=mn, \\ c=\frac{1}{2}(m^2+n^2), \end{cases}$ 其中 $m>n>0$,m 和 n 是互质的奇数.

应用:当 $n=1$ 时,求有一边长为 5 的直角三角形的另外两条边长之和为________.

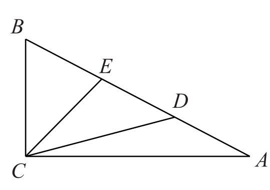
4. 已知如图 16-2 所示,$AD=BD=CD=m$,$AB=n$,$BC=p$,$BC \parallel AD$,m 和 n 为有理数,则 $p=$________.(用含 m、n 的式子表达)

5. 等腰 $\triangle ABC$ 的底边 $BC=8\text{cm}$,腰长 $AB=5\text{cm}$,一动点 P 在底边上从点 B 开始向点 C 以 0.25cm/s 的速度运动,当点 P 运动到 PA 与腰垂直的位置时,点 P 运动的时间应为________s.

6. 如图 16-3 所示,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,$AD=DE=EB$,且 $CD^2+CE^2=1$,则斜边 AB 的长为________.



答图 16-2



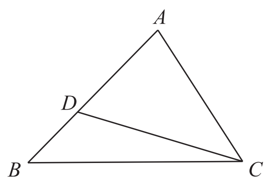
答图 16-3

7. 在凸四边形 $ABCD$ 中,$AD=\sqrt{3}$,$AB+CD=2\sqrt{3}$,$\angle BAD=60^\circ$,$\angle ADC=120^\circ$,M 是 BC 的中点,则 $DM=$________.

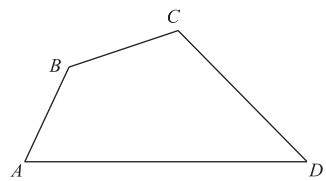
8. 如图16-4所示,已知D为$\triangle ABC$边AB上一点,且$AC=\sqrt{6}$,$AD=2$,$DB=1$,$\angle ADC=60°$,则$\angle BCD=$________.

9. 如图16-5所示,在四边形$ABCD$中,$AB=\sqrt{6}$,$BC=5-\sqrt{3}$,$CD=6$,$\angle ABC=135°$,$\angle BCD=120°$,则$AD=$________.

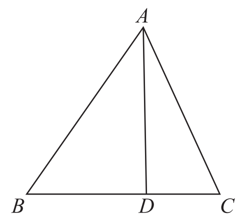
10. 如图16-6所示,已知AD是$\triangle ABC$的高,$\angle BAC=60°$,$BD=2CD=2$,则$AB=$________.



答图16-4



答图16-5



答图16-6

二、解答题(每题10分,共50分)

11. 如图16-7所示,在$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,D为AB的中点,E、F分别在AC、BC上,且$DE\perp DF$.求证:$AE^2+BF^2=EF^2$.

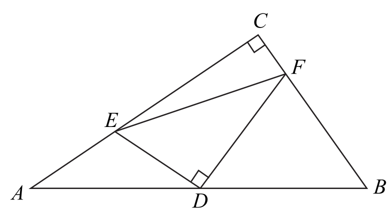


图16-7

12. 在$\triangle ABC$中,$BC=6$,$AB=2AC$,P为BC延长线上一点,且$CP=2$.

(1) 当$AB=8$时,求$\triangle ABC$的面积.

(2) 当AB变化时,求证:AP的值为定值,并求出这个定值.

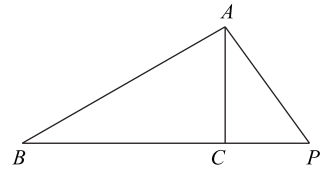


图16-8

13. 设 a、b、c、d 都是正数.求证:$\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}+\sqrt{b^2+c^2}>\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$.

14. 若勾股数组中,弦与股的差为1.证明这样的勾股数组可表示为如下形式:$2a+1$,$2a^2+2a$,$2a^2+2a+1$,其中 a 为正整数.

15. 已知 $\triangle ABC$ 中三边长分别为 a、b、c,相应边上的中线长为 m_a、m_b、m_c,求证:$bc-\frac{a^2}{4}\leqslant m_a^2\leqslant bc+\frac{a^2}{4}$.

第 17 讲　平行四边形

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 在平行四边形 $ABCD$ 中,点 P 是 BC 边上任意一点,连接 PA、PD,若平行四边形 $ABCD$ 的面积为 12.8,则 $\triangle PAD$ 的面积为________.

2. 在下列结论中,正确结论的序号是________.(请把所有正确结论的序号都填上)

① 一组对边和一组对角分别相等的四边形是平行四边形.

② 两组对角的内角平分线分别平行的四边形是平行四边形.

③ 一组对边中点的距离等于另一组对边边长的和的一半的四边形是平行四边形.

④ 两条对角线都平分四边形的面积的四边形是平行四边形.

3. 如图 17-1 所示,在平行四边形 $ABCD$ 中,E 为 BC 边上一点,且 $AB=AE$,若 AE 平分 $\angle DAB$,$\angle EAC=25^\circ$,则 $\angle AED$ 的度数是________.

4. 如图 17-2 所示,在平面直角坐标系中,平行四边形 $OABC$ 的顶点 A 的坐标为(8,0),$OA=2OC$,$\angle AOC=60^\circ$,直线 $y=\frac{1}{3}x+b$ 恰好将平行四边形 $OABC$ 分成面积相等的两部分,则 $b=$________.

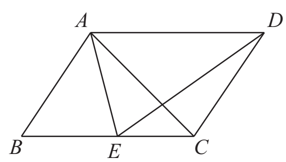


图 17-1

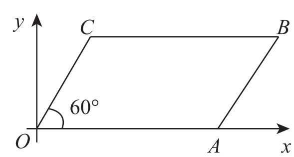


图 17-2

5. 如图 17-3 所示,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle B$ 和 $\angle C$ 的平分线相交于点 O.作 $MN \parallel BC$,$EF \parallel AB$,$GH \parallel AC$,$BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,则 $\triangle GMO$ 的周长 $+$ $\triangle ENO$ 的周长 $-$ $\triangle FHO$ 的周长为________.

6. 如图 17-4 所示,E、F 是平行四边形 $ABCD$ 的边 AB、CD 上的点,AF 与 DE 相交于点 P,BF 与 CE 相交于点 Q.若 $S_{\triangle APD}=15\text{cm}^2$,$S_{\triangle BQC}=25\text{cm}^2$,则阴影部分的面积为________$\text{cm}^2$.

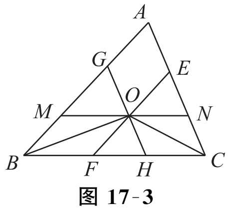


图 17-3

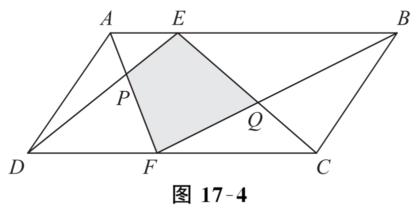


图 17-4

7. 在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=30°$，$AD=4\sqrt{3}$，连接 BD，若 $BD=4$，则线段 CD 的长为________.

8. 如图17-5所示，直线 AB、IL、JK、DC 互相平行，直线 AD、IJ、LK、BC 互相平行，四边形 $ABCD$ 面积为90，四边形 $EFGH$ 面积为55，则四边形 $IJKL$ 面积为________.

9. 如图17-6所示，对面积为1的平行四边形 $ABCD$ 逐次进行以下操作：第一次操作，分别延长 AB、BC、CD、DA 至点 A_1、B_1、C_1、D_1，使得 $A_1B=2AB$，$B_1C=2BC$，$C_1D=2CD$，$D_1A=2AD$，顺次连接 A_1、B_1、C_1、D_1，得到平行四边形 $A_1B_1C_1D_1$，记其面积为 S_1；第二次操作，分别延长 A_1B_1、B_1C_1、C_1D_1、D_1A_1 至点 A_2、B_2、C_2、D_2，使得 $A_2B_1=2A_1B_1$，$B_2C_1=2B_1C_1$，$C_2D_1=2C_1D_1$，$D_2A_1=2A_1D_1$，顺次连接 A_2、B_2、C_2、D_2，记其面积为 S_2；……；按此规律继续下去，可得到平行四边形 $A_5B_5C_5D_5$，则其面积 $S_5=$________.

10. 如图17-7所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD=2AB$，M 是 AD 的中点，$CE\perp AB$ 于点 E，$\angle CEM=40°$，则 $\angle AME$ 的度数是________.

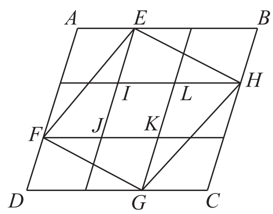


图 17-5

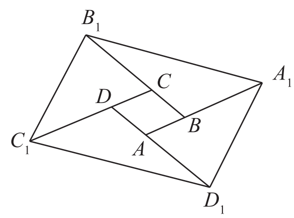


图 17-6

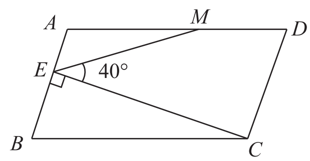


图 17-7

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11. 如图17-8所示，AD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的斜边 BC 上的高，$\angle B$ 的平分线 BE 与 AD 相交于点 F，G 是 AC 边上满足 $CG=AF$ 的一点，求证：$FG\parallel BC$.

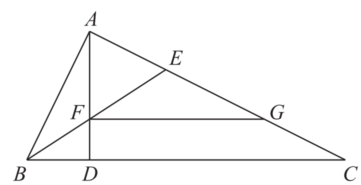


图 17-8

12. 如图17-9所示，四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于 P，过点 P 作直线，交 AD 于 E，交 BC 于 F，若 $PE=PF$，且 $AP+AE=CP+CF$，证明：四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

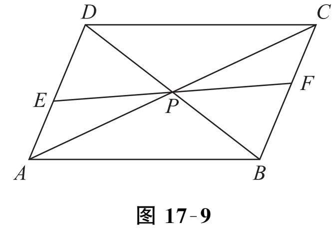


图 17-9

13. 如图17-10所示,已知平行四边形$ABCD$中,$BC=2AB$,点E是BC的中点,$\angle ABC=120^\circ$,点P为CD边上任意一点,连接BP,点G为BP上一点,连接AG、EG、CG,使$\angle AGB=\angle EGB$,点F在AG上,且$GF=GE$,连接EF、DF.

(1) 若$AB=5$,$DP=3$,求线段BP的长度.

(2) 求证:$CG=DF$.

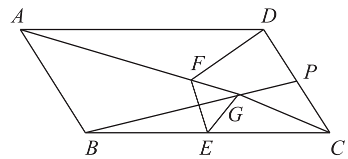


图 17-10

14. 如图17-11所示,以$\triangle ABC$的三边为边在BC的同一侧分别作三个等边三角形,即$\triangle ABD$、$\triangle BCE$、$\triangle ACF$,且$\angle BAC\neq 60^\circ$.

(1) 求证:AE与DF互相平分.

(2) 当$\triangle ABC$满足什么条件时,$AE=DF$.

(3) 为什么题中有条件$\angle BAC\neq 60^\circ$?

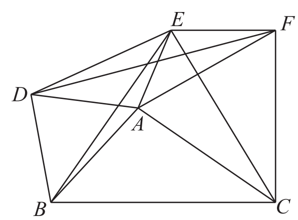


图 17-11

15. 如图17-12所示,任意五边形$ABCDE$,M、N、P、Q分别为AB、CD、BC、DE的中点,K、L分别为MN、PQ的中点,求证:$KL\parallel AE$,且$KL=\frac{1}{4}AE$.

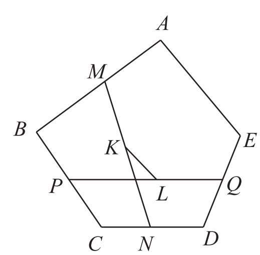


图 17-12

第 18 讲　菱形、矩形和正方形

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 如图 18-1 所示,矩形 $ABCD$ 的对角线相交于 O,AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于 E,若 $\angle CAE = 15^\circ$,则 $\angle COE$ 的度数为________.

2. 如图 18-2 所示,在菱形 $ABCD$ 中,$\angle A = 100^\circ$,M、N 分别是边 AB、BC 的中点,$MP \perp CD$ 于点 P,则 $\angle NPC$ 的度数为________.

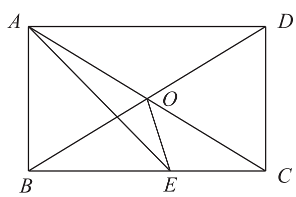


图 18-1

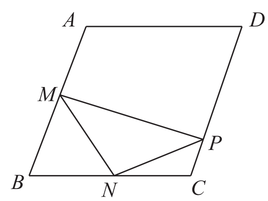


图 18-2

3. 如图 18-3 所示,O 为矩形 $ABCD$ 的对角线交点,DF 平分 $\angle ADC$ 交 AC 于点 E,交 BC 于点 F,$\angle BDF = 15^\circ$,则 $\angle COF$ 的度数为________.

4. 如图 18-4 所示,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC = 90^\circ$,$AB = 3$,$AC = 4$,P 为边 BC 上一动点,$PE \perp AB$ 于 E,$PF \perp AC$ 于 F,M 为 EF 中点,则 AM 的最小值为________.

5. 如图 18-5 所示,点 P 在正方形 $ABCD$ 外,$PB = 10$,$\triangle APB$ 的面积为 60,$\triangle BPC$ 的面积为 30,则正方形 $ABCD$ 的面积为________.

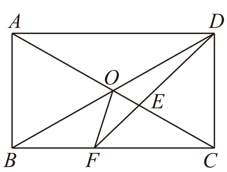


图 18-3

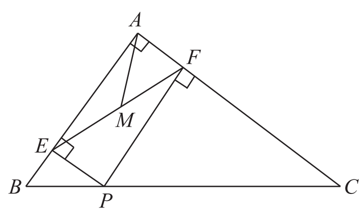


图 18-4

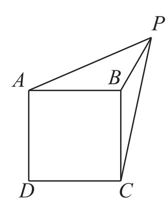


图 18-5

6. 如图 18-6 所示,在正方形 $ABCD$ 中,$AB = 3$,点 E、F 分别在 CD、AD 上,$CE = DF$,BE、CF 相交于点 G.若图中阴影部分的面积与正方形 $ABCD$ 的面积之比为 $2:3$,则 $\triangle BCG$ 的周长为________.

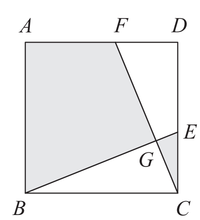


图 18-6

7. 按如图 18-7 所示,把一张边长超过 10 的正方形纸片剪成 5 个部分,则中间小正方形(阴影部分)的周长为________.

8. 将 n 个边长都为 1cm 的正方形按如图 18-8 所示的方法摆放,点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 分别是各正方形的中心,则 n 个这样的正方形重叠部分(阴影部分)的面积的和为________cm^2.

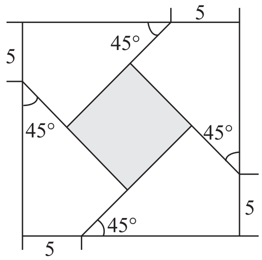


图 18-7

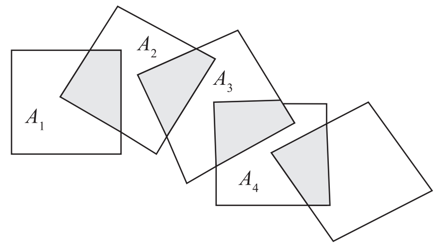


图 18-8

9. 如图 18-9 所示,矩形 $ABCD$ 由 3×4 个小正方形组成,此图中不是正方形的矩形有________个.

10. 如图 18-10 所示,AB 是圆 O 的直径,紧挨着的三个正方形依次排列在直径 AB 上,且各有一个顶点在圆 O 上,若两侧两个正方形边长分别为 2 和 3,则中间正方形的边长为________.

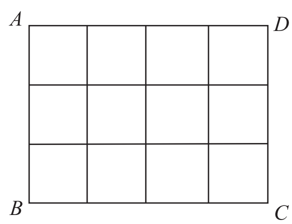


图 18-9

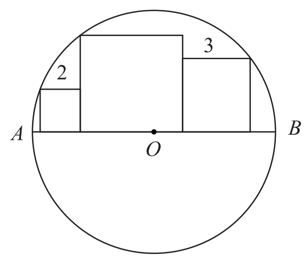


图 18-10

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 将两张宽度相等的矩形纸片叠放在一起得到如图 18-11 所示的四边形 $ABCD$.

(1) 求证:四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2) 如果两张矩形纸片的长都是 8,宽都是 2.那么菱形 $ABCD$ 的周长是否存在最大值或最小值?如果存在,请求出来;如果不存在,请简要说明理由.

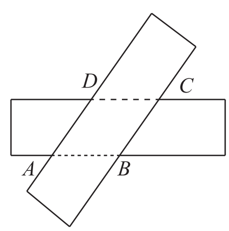


图 18-11

12. 如图 18-12 所示,等腰 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D,在线段 AD 上任取一点 P(点 A 除外),过点 P 作 $EF\parallel AB$,分别交 AC、BC 于点 E、F,作 $PM\parallel AC$,交 AB 于点 M,连接 ME.

(1) 求证:四边形 $AEPM$ 为菱形.

(2) 当点 P 在何处时,菱形 $AEPM$ 的面积为四边形 $EFBM$ 面积的一半?

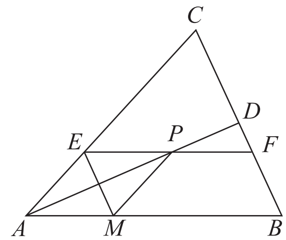


图 18-12

13. 如图 18-13 所示,在矩形 $ABCD$ 中,$AD>AB$,O 是对角线的交点,过 O 任作一直线分别交 BC、AD 于点 M、N.

(1) 求证:$BM=DN$.

(2) 如图 18-14 所示,四边形 $AMNE$ 是由四边形 $CMND$ 沿 MN 翻折得到的,连接 CN,求证:四边形 $AMCN$ 是菱形.

(3) 在(2) 的条件下,若 $\triangle CDN$ 的面积与 $\triangle CMN$ 的面积比为 $1:3$,求 $\dfrac{MN}{DN}$ 的值.

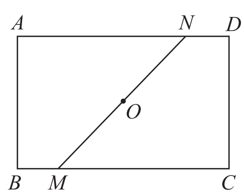


图 18-13

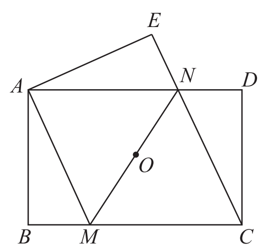


图 18-14

14. 如图18-15所示，在正方形$ABCD$和正方形$CGEF$中，$CG > BC$，连接AE，取线段AE的中点M.证明：$FM \perp MD$，且$FM = MD$.

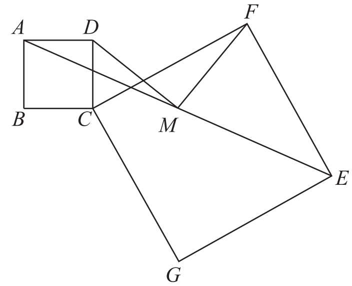


图 18-15

15. 如图18-16所示，P为正方形$ABCD$内的一点，画平行四边形$PAHD$、平行四边形$PBEA$、平行四边形$PCFB$、平行四边形$PDGC$，请证明：以E、F、G、H为顶点的四边形是正方形.

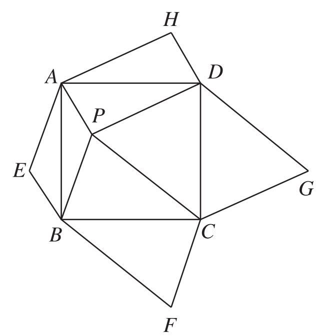


图 18-16

第 19 讲　梯形、三角形和梯形的中位线

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a、b、c,三条中位线组成第 1 个中点三角形,第 1 个中点三角形的三条中位线又组成第 2 个中点三角形,依此类推,求第 2020 个中点三角形的周长为________.

2. 某学校共有 3125 名学生,一次活动中全体学生被排成一个 n 排的等腰梯形阵,且这 n 排学生数按每排都比前一排多一人的规律排列,则当 n 取到最大值时,排在该等腰梯形阵最外面的一周的学生总人数是________.

3. 如图 19-1 所示,已知四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,$AD \parallel BC$,$AB=CD$,$AD=\sqrt{2}$,E 为 CD 中点,连接 AE,且 $AE=2\sqrt{3}$,$\angle DAE=30°$,作 $AF \perp AE$ 交 BC 于 F,则 $BF=$________.

4. 如图 19-2 所示,在等腰梯形 $ABCD$ 中,$AD \parallel BC$,$BC=10$,$AD=2$,$\angle B=45°$.直角三角板含 45° 角的顶点 E 在边 BC 上移动,一直角边始终经过点 A,斜边与 CD 交于点 F.若 $\triangle ABE$ 为等腰三角形,则 CF 的长等于________.

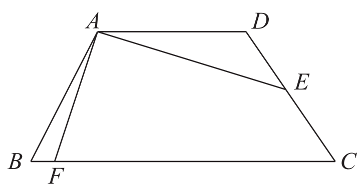


图 19-1

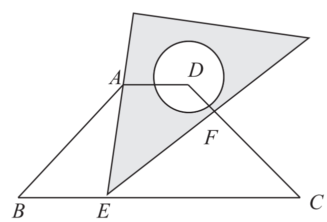


图 19-2

5. 如图 19-3 所示,在 $\triangle ABC$ 中,BD 平分 $\angle ABC$,$AD \perp BD$ 于 D,F 为 AC 中点,$AB=5$,$BC=7$,则 $DF=$________.

6. 如图 19-4 所示,在梯形 $ABCD$ 中,$AD \parallel BC$,$AC \perp BD$ 于点 O,$AB=DC$,$AD=3$,$BC=7$,则下列结论:①$\angle OCB=45°$;②$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle OCD}=\dfrac{21}{4}$;③$S_{梯形ABCD}=25$;④$AD$ 和 BC 两平行线间的距离为 5.其中正确的有________.(填入序号)

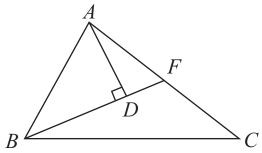


图 19-3

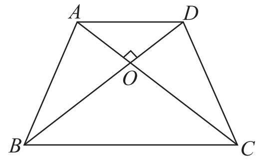


图 19-4

7. 如图 19-5 所示，$\triangle ABC$ 的面积为 1，$BD:DC=3:1$，E 是 AC 的中点，AD 与 BE 相交于点 P，那么四边形 $PDCE$ 的面积为________.

8. 如图 19-6 所示，$\angle MAN=90°$，点 C 在边 AM 上，$AC=4$，点 B 为边 AN 上一动点，连接 BC，$\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 关于 BC 所在直线对称，点 D、E 分别为 AC、BC 的中点，连接 DE 并延长交 $A'B$ 所在直线于点 F，连接 $A'E$.当 $\triangle A'EF$ 为直角三角形时，AB 的长为________.

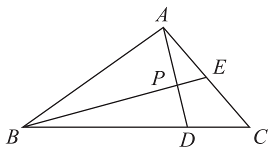


图 19-5

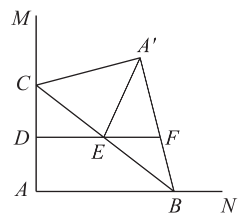


图 19-6

9. 如图 19-7 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=60°$，$AC=1$，D 是边 AB 的中点，E 是边 BC 上一点.若 DE 平分 $\triangle ABC$ 的周长，则 DE 的长是________.

10. 如图 19-8 所示，将一个等腰直角三角形沿中位线剪成一个三角形与一个梯形后，则这两个图形可能拼成的平面四边形是________.(不许重合、折叠)

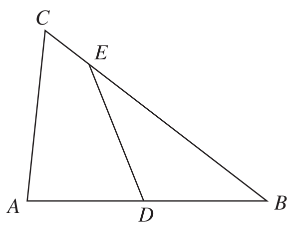


图 19-7

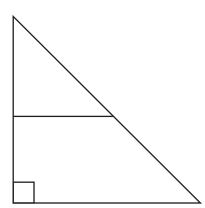


图 19-8

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11. 如图 19-9 所示，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle DBC=45°$，翻折梯形 $ABCD$，使点 B 重合于点 D，折痕分别交 AB、BC 于点 F、E.若 $AD=2$，$BC=8$.求 BE 的长.

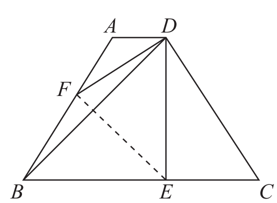


图 19-9

12. 如图 19-10 所示，AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，M 是 BC 的中点，$FM \parallel AD$ 交 AB 的延长线于 F，交 AC 于 E.

(1) 求证：$CE = BF$.

(2) 探索线段 CE 与 $AB + AC$ 之间的数量关系，并证明.

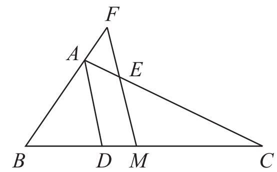


图 19-10

13. 如图 19-11 所示，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 的中点，点 E、F 分别在边 AC、AB 上，且 $\angle ABE = \angle ACF$，BE、CF 交于点 O.过点 O 作 $OP \perp AC$，$OQ \perp AB$，P、Q 为垂足.求证：$DP = DQ$.

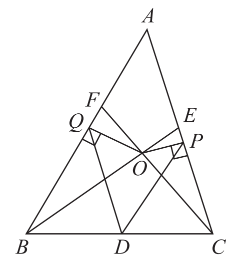


图 19-11

14. 如图 19-12 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，延长 AB 到 D，使 $BD = AB$，E 为 AB 中点，连接 CE、CD，求证：$CD = 2EC$.

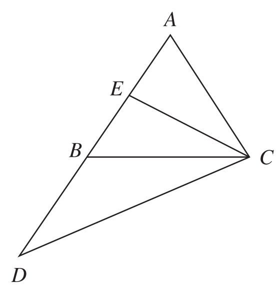


图 19-12

15. 如图 19-13 所示，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 $\triangle ABC$ 内的一点，延长 BA 至点 E，延长 DC 至点 F，使得 $AE = CF$，G、H、M 分别为 BD、AC、EF 的中点，如果 G、H、M 三点共线，求证：$AB = CD$.

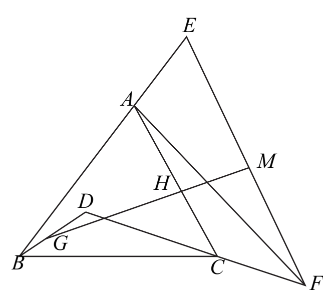


图 19-13

第 20 讲　待定系数法

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. (1) 若 $x^2+x-1=0$,则 $x^3+2x^2+3=$________;

(2) 把$(x^2-x+1)^6$ 展开后得 $a_{12}x^{12}+a_{11}x^{11}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$,则 $a_{12}+a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=$________.

2. 多项式 $2x^3-5x^2+7x-8$ 与多项式 $ax^2+bx+11$ 的乘积中,没有含 x^4 的项,也没有含 x^3 的项,则 $a^2+b=$________.

3. 若多项式 $3x^2-4x+7$ 能表示成 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$ 的形式,则 a、b、c 分别为________.

4. 若$(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$,则 $a_4+a_2+a_0$ 的值是________.

5. 若 $x^2-xy-2y^2-x-7y-6=(x-2y+A)(x+y+B)$,则 $A+B=$________.

6. 已知 $6x^2-7xy-3y^2+14x+y+a=(2x-3y+b)(3x+y+c)$,则 $abc=$________.

7. 如果多项式$(x-a)(x+2)-1$ 能够写成两个多项式$(x+3)$和$(x+b)$的乘积,那么 $a=$________,$b=$________.

8. 在 $1\sim100$ 之间若存在整数 n,使 x^2+x-n 能分解为两个整系数一次式的乘积,这样的 n 有________个.

9. 已知二次三项式 x^2-mx-8 在整数范围内可以分解为两个一次因式的积,则整数 m 的可能取值为________.

10. 已知多项式 $ax^3+bx^2-47x-15$ 可被 $3x+1$ 和 $2x-3$ 整除,则 $a+b=$________.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 是否存在常数 p、q 使得 x^4+px^2+q 能被 x^2+2x+5 整除? 如果存在,求出 p、q 的值,否则请说明理由.

12. 已知 a 是方程 $2x^2+3x-1=0$ 的一个根，求代数式 $\dfrac{2a^5+3a^4+3a^3+9a^2-5a+1}{3a-1}$ 的值.

13. 试确定 a 和 b，使 x^4+ax^2-bx+2 能被 x^2+3x+2 整除.

14. 已知关于 x 的三次多项式 $f(x)$，除以 x^2-1 时，余式是 $2x-3$，除以 x^2-4 时，余式是 $-3x-4$，求这个三次多项式.

15. 已知 a、b、c、d 为整数，$ab+cd$ 能被 $a-c$ 整除，求证：$ad+bc$ 也能被 $a-c$ 整除.

第 21 讲　一次函数及其应用

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 直线 $y=-\frac{3}{4}x+6$ 上的点 A 的横坐标为 2,线段 AB 在直线 $y=-\frac{3}{4}x+6$ 上,且 $AB=5$,线段 AB 向右平移 2 个单位后,点 B 的坐标为________.

2. 在一条笔直的公路上有 A、B 两地,甲、乙两车均从 A 地匀速驶向 B 地,甲车比乙车早出发 2h,出发后,甲车出现了故障停下来维修,半小时后继续以原速向 B 地行驶.当乙车到达 B 地后立刻提速 50% 返回,在返回途中第二次与甲车相遇.图 21-1 表示甲、乙两车之间的距离 y(km) 与甲车行驶的时间 x(h) 之间的函数关系,则当乙车第二次与甲车相遇时,甲车距离 B 地________km.

3. 不论 k 为何值时,直线 $(2k+1)x+(3k-2)y-5k+1=0$ 的图像恒过定点________.

4. 如图 21-2 所示,直线 AB 的解析式为 $y=-x+b$ 分别与 x、y 轴交于 A、B 两点,点 A 的坐标为(3,0),过点 B 的直线交 x 轴负半轴于点 C,且 $OB:OC=3:1$.在 x 轴上方存在点 D,使以点 A、B、D 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 全等,则点 D 的坐标为________.

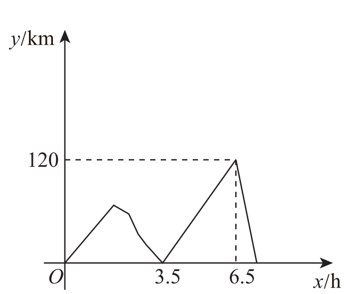


图 21-1

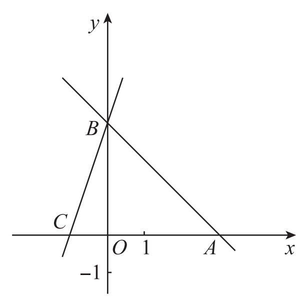


图 21-2

5. 正方形 $A_1B_1C_1O$,$A_2B_2C_2C_1$,$A_3B_3C_3C_2$,⋯ 按如图 21-3 所示的方式放置.点 A_1,A_2,A_3,⋯ 和点 C_1,C_2,C_3,⋯ 分别在直线 $y=kx+b(k>0)$ 和 x 轴上,已知点 $B_1(1,1)$,$B_2(3,2)$,则 B_n 的坐标是________.

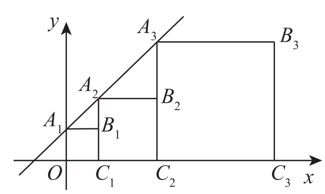


图 21-3

6. 已知直线 AB 的解析式为 $y=kx+m$,且经过点 $A(a,a)$ 和 $B(b,8b)(a>0,b>0)$.当 $\frac{b}{a}$ 是整数时,满足条件的整数 k 的值为________.

7. 若对于所有的实数 x，都有 $f(2^{x})+xf(2^{-x})=x^{2}$，则 $f(2)=$________.

8. 实验室里有一个水平放置的长方体容器，从内部量得它的高是 15cm，底面的长是 30cm，宽是 20cm，容器内的水深为 x cm.现往容器内放入如图 21-4 所示的长方体实心铁块(铁块一面平放在容器底面)，过顶点 A 的三条棱的长分别 10cm、10cm、$y$cm($y\leqslant 15$)，当铁块的顶部高出水面 2cm 时，x 和 y 满足的关系式是________.

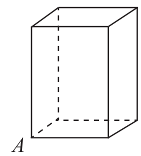


图 21-4

9. 已知以 $A(0,2)$、$B(2,0)$、$O(0,0)$ 三点为顶点的三角形被直线 $y=ax-a$ 分成两部分.若所分的两部分的面积比为 1∶7，则 a 的值为________.

10. 若一次函数 $y=kx+b$ 的自变量 x 取值范围是 $-3\leqslant x\leqslant 2$，相应的函数值的范围是 $-8\leqslant y\leqslant 5$，则此函数的解析式为________.

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11. 如图 21-5 所示，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标为(4，0)，点 P 是第一象限内直线 $y=6-x$ 上一点，O 是坐标原点.

(1) 设 $P(x,y)$，求 $\triangle OPA$ 的面积 S 与 x 的函数解析式.

(2) 当 $S=10$ 时，求点 P 的坐标.

(3) 在直线 $y=6-x$ 上求一点 P，使 $\triangle POA$ 是以 OA 为底边的等腰三角形.

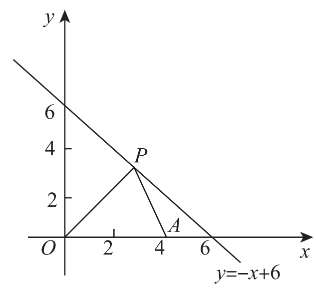


图 21-5

12. 如图 21-6 所示，一次函数 $y=kx+b$ 交两轴于 A、B 两点，$M(-1,0)$，$AM=\sqrt{10}$，N 为 y 轴的正半轴上一点，AM 与 BN 相交于点 P，$AN=OM$，$AO=BM$.

(1) 求一次函数的解析式.

(2) 求四边形 $PMON$ 的面积.

(3) 过 N 作 $NC\perp AM$ 于 C，求证：$PN=\sqrt{2}NC$.

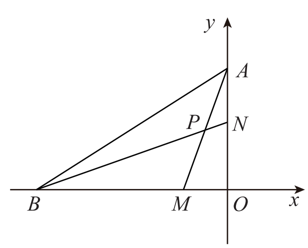


图 21-6

13. A市、B市和C市有某种机器10台、10台、8台，现在决定把这些机器支援给D市18台、E市10台.已知：从A市调运一台机器到D市、E市的运费为200元和800元；从B市调运一台机器到D市、E市的运费为300元和700元；从C市调运一台机器到D市、E市的运费为400元和500元.

(1) 设从A市、B市各调 x 台到D市，当28台机器调运完毕后，求总运费 W(元)关于 x(台)的函数关系式，并求 W 的最大值________ 和最小值________.

(2) 设从A市调 x 台到D市，B市调 y 台到D市，当28台机器调运完毕后，用 x、y 表示总运费 W(元)，并求 W 的最大值________ 和最小值________.

14.【模型建立】

(1) 如图21-7(a)所示，在等腰Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$CA=CB$，直线 ED 经过点 C，过 A 作 $AD\perp ED$ 于点 D，过 B 作 $BE\perp ED$ 于点 E.

求证：$\triangle CDA\cong\triangle BEC$.

【模型运用】

(2) 如图21-7(b)所示，直线 l_1：$y=\dfrac{4}{3}x+4$ 与坐标轴交于点 A、B，将直线 l_1 绕点 A 逆时针旋转 90° 至直线 l_2，求直线 l_2 的函数表达式.

【模型迁移】

如图21-7(c)所示，直线 l 经过坐标原点 O，且与 x 轴正半轴的夹角为 30°，点 A 在直线 l 上，点 P 为 x 轴上一动点，连接 AP，将线段 AP 绕点 P 顺时针旋转 30° 得到 BP，过点 B 的直线 BC 交 x 轴于点 C，$\angle OCB=30^\circ$，点 B 到 x 轴的距离为2，求点 P 的坐标.

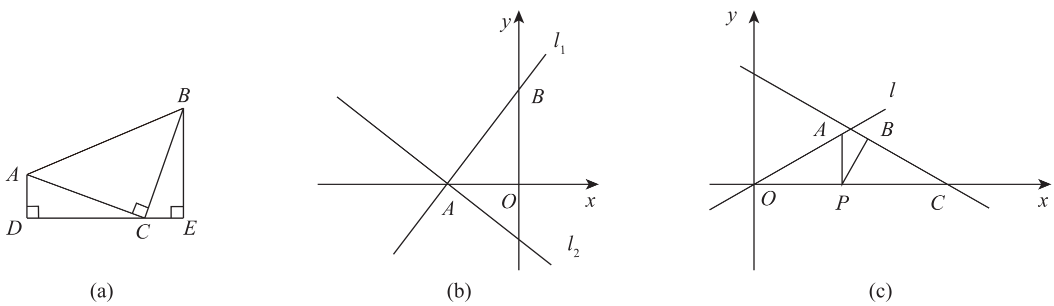


图 21-7

15. 如图21-8(a)所示，直线 $y=-\frac{3}{4}x+6$ 与 y 轴交于点 A，与 x 轴交于点 D，直线 AB 交 x 轴于点 B，$\triangle AOB$ 沿直线 AB 折叠，点 O 恰好落在直线 AD 上的点 C 处.

(1) 求 OB 的长.

(2) 如图21-8(b)所示，F、G 是直线 AB 上的两点，若 $\triangle DFG$ 是以 FG 为斜边的等腰直角三角形，求点 F 的坐标.

(3) 如图21-8(c)所示，点 P 是直线 AB 上一点，点 Q 是直线 AD 上一点，且 P、Q 均在第四象限，点 E 是 x 轴上一点，若四边形 $PQDE$ 为菱形，求点 E 的坐标.

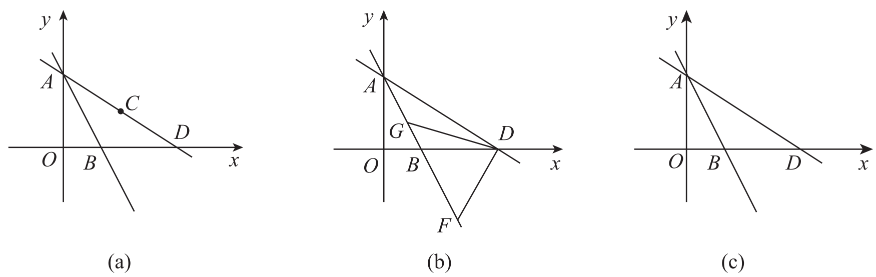


图 21-8

第 22 讲　类比与猜想

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 设正数 a、b、c 满足 $a^2(a-1)+b^2(b-1)+c^2(c-1)=a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)$,则 $1956a^2+1986b^2+2016c^2=$________.

2. $\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}-\underbrace{22\cdots2}_{1010个2}}=$________.

3. 一楼梯共有 n 级台阶,规定每步可以迈 1 级或者 2 级.设从地面到台阶的第 n 级,不同的迈法为 a_n 种,那么 $a_{10}=$________.

4. 平面上有 n 个点,过其中任意两点画直线,最多可以画________条直线.

5. 平面上的 n 条直线最多把平面分成________个部分.

6. 已知实数 m、n 满足 $2m=m^2-1$,$2n=-n^2+1$,且 $m+n\neq 0$,那么 $m^2n-mn^2=$________.

7. 计算:$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots+n\times(n+1)=$________.

8. 计算:$1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+3\times 4\times 5+\cdots+n\times(n+1)\times(n+2)=$________.

9. 在 1,2,…,2020 这 2020 个数中取一组数,使得任意两个数之和不能被其差整除,那么最多能取________个数.

10. 圆周上放置了 100 个整数.已知每个整数均比其顺时针方向接下来的两个数的和大,那么这 100 个数中至多可以有________个正数.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 已知 a、b、c、d 为不全相等的非零实数,求证:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}>\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da}.$$

12. 证明：$\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}\underbrace{22\cdots2}_{2020个2}$ 是两个连续自然数的积.

13.（柯西不等式）试证明：对于任何两组实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，均有 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$.

14. x 是任意实数，求 $y=\sqrt{5x^2-12x+9}+\sqrt{5x^2-8x+16}$ 的最小值.

15. 两个人坐在圆形桌旁，并且两人相继轮流往桌上平放一枚同样大小的硬币，条件是硬币一定要平放在桌面上，不能使后放的硬币压在先前的硬币上，这样继续下去，最后桌面上只剩下一个位置时谁放下最后一枚，谁就算胜了，请问：是先放硬币的一方还是后放硬币的一方有必胜的策略，必胜策略是什么？

第 23 讲　从整体上看问题

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 一种水草生长得很快,一天增加一倍.如果第 1 天投入 1 棵水草,第 2 天就发展为 2 棵,第 28 天恰好长满池塘.如果第一天投入 4 棵,那么第________天长满池塘.

2. 若代数式 $3x^2-4x+6$ 的值为 9,则 $x^2-\frac{4}{3}x+6$ 的值为________.

3. 下表中第一行有 6 个数,第一列有 5 个数.其他位置上的每个数都是它所在行的第一列上的数与所在列的第一行上的数的积.比如表中“*”位上的数是 $12\times11=132$.那么,下表中除第一行和第一列中的数外,其他所有数的和是________.

	9	11	7	15	3	19
8						
12		*				
14						
10						
20						

4. 有四个数,每次选取其中三个数并算出它们的平均数,再加上另外一个数,用这种方法计算了四次,分别得到以下四个数:86,92,100,106,则原来四个数的平均数是________.

5. 自然数 1188 的所有正因数的和是________.

6. 如图 23-1 所示,长方形 $ABCD$ 的长是 10,宽是 6. E、F、G、H 分别是各边的三等分点,则图中阴影部分的面积是________.

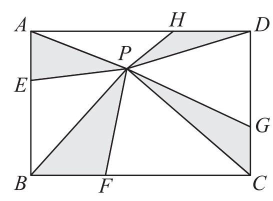


图 23-1

7. 已知 $x=\sqrt{3}-1$,则 $\frac{3-2x^2-4x}{x^2+2x-1}=$________.

8. 计算:$\frac{1\times2\times3+3\times6\times9+5\times10\times15+7\times14\times21}{1\times3\times5+3\times9\times15+5\times15\times25+7\times21\times35}=$________.

9. 已知 a、b、c 满足 $a+b+c=0$,若 a、b、c 都不等于 0,则 $\frac{bc+ac}{ab}+\frac{ab+ac}{bc}+\frac{cb+ab}{ca}$ 的值为________.

10. 正数 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6 同时满足 $\frac{x_2x_3x_4x_5x_6}{x_1}=1$，$\frac{x_1x_3x_4x_5x_6}{x_2}=2$，$\frac{x_1x_2x_4x_5x_6}{x_3}=3$，$\frac{x_1x_2x_3x_5x_6}{x_4}=4$，$\frac{x_1x_2x_3x_4x_6}{x_5}=6$，$\frac{x_1x_2x_3x_4x_5}{x_6}=9$，则 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$ 的值为________.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 解方程：$\frac{2(x+1)^2}{x^2}+\frac{x+1}{x}-6=0$.

12. 已知 $x^2+xy=3$，$xy+y^2=-2$，求代数式 $2x^2-xy-3y^2$ 的值.

13. 设 a、b、c 为实数，$x=a^2-2b+\frac{\pi}{3}$，$y=b^2-2c+\frac{\pi}{6}$，$z=c^2-2a+\frac{\pi}{2}$，求证：x、y、z 中至少有一个正数.

14. 甲、乙、丙三人参加数学竞赛，竞赛题目共有 100 道，每人都解出了 60 道，且每道题都至少有一人能解出.若将其中只有一个人能解出的题称为难题，将有两个人能解出的题称为中等题，将三个人都能解出的题称为容易题.试问：难题多还是容易题多？多的比少的多几道？

15. 有 98 个孩子，每人胸前有一个号码，号码从 1 到 98 各不相同.试问：能否将这些孩子排成若干排，使每排中都有一个孩子的号码数等于同排中其余孩子号码数的和？并说明理由.

第 24 讲　不变量原理

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 如图 24-1 所示,一根长 $2a$ 的梯子 AB,斜靠在与地面 OM 垂直的墙 ON 上,设梯子的中点为 P.若梯子 A 端沿墙下滑,且 B 端沿地面向右滑行.在梯子滑动的过程中,$\triangle AOB$ 面积的最大值是________.

2. 如图 24-2 所示,已知矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O,点 P 是边 AB 上的一个动点,$PE \perp AC$ 且 $PF \perp BD$,垂足分别是 E 和 F,若 $AB=4$,且 $AD=3$,则 $PE+PF=$________.

3. 有 800 名乒乓球选手参加淘汰赛,每场比赛有两名选手参加,胜者继续进行下一场比赛,败者淘汰出局,那么需要进行________场比赛才能决出冠军.

4. 如图 24-3 所示,E、F 是矩形 $ABCD$ 的边 AB 延长线上两点,且四边形 $CDEF$ 为平行四边形.G 是 BC 与 DE 的交点,则 $S_{\text{四边形}CGEF}$____$S_{\text{四边形}BGDA}$.(填“$>$”“$<$”或“$=$”)

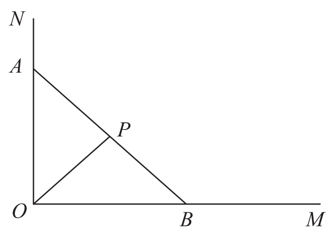


图 24-1

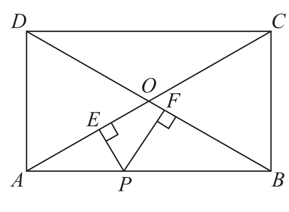


图 24-2

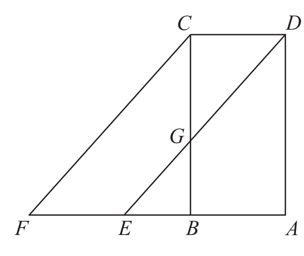


图 24-3

5. 在 1,2,3,…,2021 之间填上“+”号或者“−”号,那么所得和式可以得到的最小非负数是________.

6. 老师取了 1,2,…,9 的一个排列 $a_1,a_2,\cdots,a_9$,五名同学按照老师给的排列方式计算 $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_9-9)$ 之后,得到的结果分别是 131221,131233,131247,131250,131269.老师检查后说只有一个结果是正确的,则这个结果是________.

7. 规定一次操作可以将一组数 5,1,3 按任意顺序排列成数组 a,b,c 后写出新的数组 $\frac{a+3b}{2}$,$\frac{a-b+c}{3}$,$\frac{a-b+4c}{6}$,对于新的数组可以继续操作.4 位同学按照规定依次写下了若干组数,其中四组为 4,6,2;3,1,3;$\frac{11}{3}$,4,$\frac{7}{3}$ 和 $\frac{7}{3}$,4,$\frac{8}{3}$,经检验,只有一个结果是正确的,这个结果是________.

8. 有依次排列的3个数3,9,8,对相邻的两个数,都用右边的数减去左边的数,所得之差写在这两个数之间,可产生一个新数串3,6,9,－1,8,这称为第一次操作;做第二次同样的操作后,也可产生一个新数串3,3,6,3,9,－10,－1,9,8.继续依次操作下去,那么从数串3,9,8开始操作第100次以后所产生的那个新数串的所有数之和是________.

9. 有一本故事书,共有23个故事,各个故事的页数分别为1页、2页、3页、……、22页、23页,按一定顺序装订成册.那么这本故事书中每个故事的第一页是偶数页码的故事的个数最多为________.

10. 在 $n\times n$ 的方格盘中,把其中 $n-1$ 个方格染成黑色,其余方格不染色.染完后,允许按下述操作把某些未染色的方格染上黑色,规则是:只要是某个未染色的方格与两个黑色方格相邻(如果两个方格有一条公共边,那么就称这两个方格相邻),就把这个方格染黑.那么按照这种规则操作下去,________(填"能"或者"不能")把整个棋盘全染成黑色.

二、解答题(每题10分,共50分)

11. 已知如下数表:

－3	－4	5	24	－5	3
0.2	－3.15	2.7	－2	－7	1.1
－7	π	－1	3.3	6	－9
－1.2	6.2	760	－631	8	7
63	1	－15	－9.1	－11	8
－30	10	－18	－2	－9	－0.5

将它的任一行或任一列中的所有数同时变号,称为一次变换.问能否经过若干次变换,使表中的数全变为正数?

12. 如图24-4所示,表示64间陈列室,凡邻室皆有门相通,一人从A进,从B出,但要求每室都到且只到一次,问这种路线是否存在?

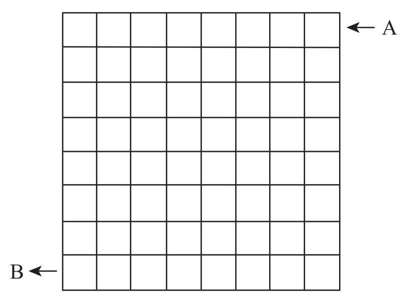


图 24-4

13. 黑板上写着 1000,1001,1002,…,2999 这 2000 个数,每次操作允许擦去其中的任意两个数 a 和 $b(a \leqslant b)$ 并写上 $\frac{a}{2}$,如此一直进行下去最后得到一个数.求证:这个数必定小于 1.

14. 圆周被等分为 6 段弧,将数字 1,0,1,0,0,0 按顺时针方向依次写在每段弧上.允许将相邻的两个数同时增加 1.试问是否能使所有数都变成相等?

15. 取下整数 7^{2019} 的首位数字,然后把它加到剩下的数中.重复进行这个操作直到最后得到一个十位数.证明:这个十位数各数位上必有两个相同数字.

第 25 讲　抽屉原理

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 在任意的 61 个人中,至少有________个人的属相相同.

2. 袋子里有黑、白球各 1 个,红、蓝、黄球各 6 个,现在拿出一些球,要确保至少有 4 个同颜色,那么最少要取________个球.

3. 从 1,2,3,…,20 中,至少任取________个数,才能使得其中一定有两个数,大的数是小的数的倍数.

4. 至少任取________个正整数,才能保证在被取出的数中一定可以找到两个数 a、b,使得 $a+b$ 或 $a-b$ 能被 100 整除.

5. 在不超过 100 的正整数中至少任取________个不同的数,才能使得被取出的数中一定有两个数的差等于 9.

6. 任意从 1,2,…,200 这 200 个正整数中取出一些数,那么至少取________个数才能保证其中一定存在两个互质的数.

7. 图书馆中有 A、B、C、D 四类书,借书的同学至多借两本书,则至少有________名同学任意借书后,才能断定有两个人所借的书本数及类型完全相同.

8. 至少在一个半径为 1 的圆内或边界上放置________个点,才能保证所放置的点中必定有两点之间距离不大于 1.

9. 某班一次数学课上,老师出了 2 道选择题,按规定做对得 2 分,不做得 1 分,做错得 0 分.老师说,可以肯定全班同学中至少有 5 名同学每题得分数都相同,那么这个班学生至少有________人.

10. 在 4 行 n 列的小方格中,随意染上红、蓝、黄三色,那么 n 最小是________时,可以保证出现同色四角矩形.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 在边长为 1 的正三角形中,任取七个点,其中任意三点不共线.证明:其中必有三点构成的三角形的面积不超过$\frac{\sqrt{3}}{12}$.

12. 在 3×4 的长方形中，任意放置六个点，证明：一定可以找到两个点，它们的距离不大于$\sqrt{5}$.

13. 从 $1\sim25$ 这 25 个自然数中任意取出 7 个数，证明：取出的数中一定有 2 个数，这 2 个数中大数不超过小数的 1.5 倍.

14. 有 9 名数学家，每人至多能讲 3 种语言，每 3 人中至少有 2 人能通话.求证：在这 9 名中至少有 3 名用同一种语言通话.

15. 一个棋手为参加一次锦标赛将进行 77 天的集训，他每天至少下一盘棋，而每周(任意连续的 7 天)至多下 12 盘棋.证明：一定存在一个正整数 n，使得他在这 77 天里有连续的 n 天恰好下了 21 盘棋.

第 26 讲　染色问题与染色方法

解答题(每题 10 分,共 100 分)

1. 在线段 AB 的两个端点,一个涂红色,一个涂蓝色,在线段中间插入 n 个分点,在各个分点上随意地涂上红色或蓝色,这样就把原线段分为 $n+1$ 个不重叠的小线段,这些小线段的两端颜色不同者叫作标准线段.求证:标准线段的个数是奇数.

2. 把一个正方体形的房子分割成27个相等的小正方体房间,每相邻(即有公共面)两个房间都有门相通,在中心的那个小正方体房间中有一只甲虫,甲虫能从每个小房间走到与它相邻的小房间中的任何一间去.如果要求甲虫只能走到每个小房间一次,那么甲虫能走遍所有的小房间吗?说明你的理由.

3. 4×4 的方格表中最多选择几个格子涂黑,使得不存在黑色四角矩形?

4. 如图 26-1 所示,图中的黑点叫作图的顶点,连接 2 个顶点的线段叫作图的边,有公共顶点的边叫作相邻的边.现给图中每一条边都涂上某一种颜色,试问:至少要几种颜色才能使图中所有相邻的边有不同的颜色?

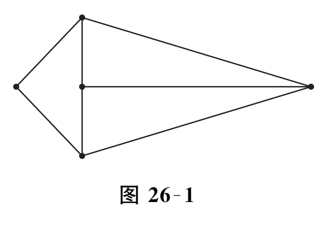


图 26-1

5. 某班有 50 位学生,男女各占一半,他们围成一圈席地而坐开营火晚会.求证:必能找到 1 位两旁都是女生的学生.

6. 试证:不能用面积为 1×4 的长方形木块将 10×10 的棋盘覆盖.

7. 在 $2k\times2k$ 的方格表上,有 $3k$ 个格子涂黑,求证:可以选择 k 行及 k 列,包含了全部这 $3k$ 个黑格.

8. 7×7 的方格表中有 19 个方格涂成红色.如果该行或该列中至少有 4 个红格,那么称这一行或这一列是红色的.问:该方格表中红色的行和列的总和最多有多少?

9. 有一个矩形顶点坐标分别为 $(0,0)$,$(0,m)$,$(n,0)$ 与 (n,m),其中 m 和 n 均为正奇数.将这个矩形分拆(既无重叠,也不遗漏)为一些三角形,使得每个三角形的顶点均为格点(横纵坐标均为整数的点称为格点),同时保证每个三角形至少有一条边与坐标轴平行并且这条边上的高为 1.求证:一定存在至少两个三角形,它们各有两条边平行于坐标轴.

10. 已知 mn 是偶数,将 $m\times n$ 的方格表中每个小方格涂上黑色或白色,两种颜色的方格数相等.问:能否有一种涂法,使每一行、每一列中都有一种颜色的方格数超过 75%?

第 27 讲　赋值法

解答题(每题 10 分,共 100 分)

1. 平面上 $n(n\geqslant 2)$ 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 顺次排在同一条直线上,每点涂上黑、白两色中的某一种颜色.已知 A_1 和 A_n 涂上的颜色不同.证明:相邻两点间连接的线段中,其两端点不同色的线段的条数必为奇数.

2. 从 10 个英文字母 A、B、C、D、E、F、G、X、Y、Z 中任意选 5 个字母(字母允许重复)组成一个"词",将所有可能的"词"按"字典顺序"(即英汉辞典中英语词汇排列的顺序)排列,得到一个"词表":

AAAAA,AAAAB,…,AAAAZ,

AAABA,AAABB,…,ZZZZY,ZZZZZ

设位于"词"CYZGB 与"词"XEFDA 之间(这两个词除外)的"词"的个数是 k,试写出"词表"中的第 k 个"词".

3. 一群旅游者,从 A 村走到 B 村,路线如图 27-1 所示,图中的数字表示走这一段路程需要的时间(单位:min).怎样走才能在最短时间内到达 B 村?

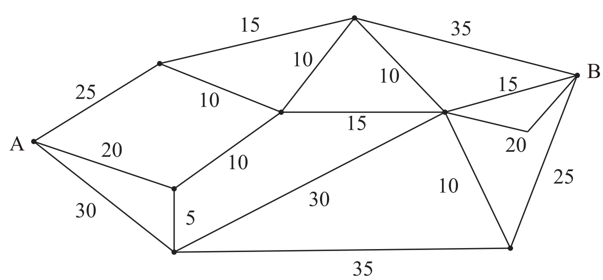


图 27-1

4. 把图 27-2 中的圆圈任意涂上红色或蓝色.问:有无可能使得在同一条直线上的红圈数都是奇数?请说明理由.

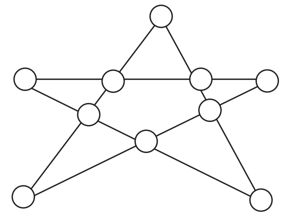


图 27-2

5. 圆周上等间距地分布着 27 个点,它们被分别染为黑色或白色.今知其中任何 2 个黑点之间至少间隔 2 个白点.证明:从中可以找到 3 个白点,它们形成某个等边三角形的三个顶点.

6. 如图 27-3 所示是由 4 个 1×1 方格组成的 L 形纸片,如果一个 $m\times n$ 方格的棋盘能被若干个 L 形纸片无重复地覆盖,试证:mn 是 8 的倍数.

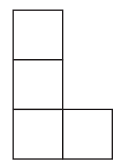


图 27-3

7. 12 个红球和 12 个蓝球排成一行,证明:必有相邻的 6 个球三红三蓝.

8. 证明:只用 2×2 及 3×3 的两种瓷砖不能恰好铺盖 23×23 的正方形地面.

9. 证明:13 块 4×1 的矩形骨牌和 3 块 2×2 的正方形骨牌不能盖住 8×8 的正方形.

10. 证明:凸多边形不能不重复不遗漏地分割成有限个非凸四边形.

第 28 讲　三角形中的不等关系

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 如图 28-1 所示,已知 $AB=10$,P 是线段 AB 上任意一点,在 AB 的同侧分别以 AP 和 PB 为边作两个等边 $\triangle APC$ 和 $\triangle BPD$,则 CD 的长度的最小值是________.

2. 如图 28-2 所示,AD 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线,$AB=3$,$AC=5$,则 AD 长度的取值范围是________.

3. 如图 28-3 所示,$\triangle ADB$ 是一个任意的直角三角形且 $\angle D=90°$,C 为 AD 上一点,$\angle ACB=6x$,则 x 的取值范围是________.

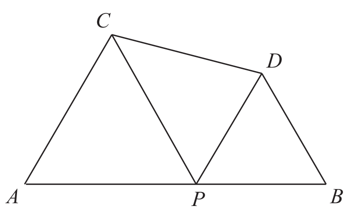


图 28-1

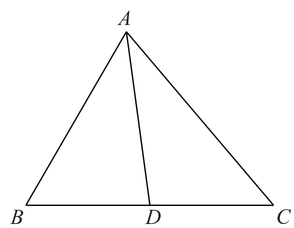


图 28-2

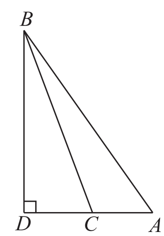


图 28-3

4. 若三角形三个内角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 满足 $\angle A>3\angle B$,$\angle C<2\angle B$,则这个三角形是________.(填"锐角三角形""直角三角形"或"钝角三角形")

5. 设矩形 $ABCD$,$BC=10$,$CD=7$,动点 F、E 分别在 BC、CD 上,且 $BF+ED=4$,$\triangle AFE$ 面积的最小值是________.

6. 设 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的正三角形,过顶点 A 引直线 l,顶点 B、C 到 l 的距离记为 d_1、d_2,则 d_1+d_2 的最大值是________.

7. 面积为 1 的 $\triangle ABC$ 中,三条边长 a、b、c 满足 $a\leqslant b\leqslant c$,则 $a+b$ 的最小值是________.

8. 在 $\triangle ABC$ 中,$AB=b^2-1$,$BC=a^2$,$CA=2a$,其中 a、b 是大于 1 的整数,则 $b-a=$________.

9. 正 $\triangle ABC$ 边长为 1,M、N、P 分别在 BC、CA、AB 上,且 $AP+AN=BP+BM=MC+CN$,则 $\triangle MNP$ 周长的最小值是________.

10. 在数 1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{7}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{9}$、$\frac{1}{10}$ 中,若任找三个数能组成三角形的三边,则称这三个数是一组"好搭档",则总共有________组"好搭档".

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 三角形两边长分别等于10和15,证明:平分这两条边夹角的三角形角平分线的长度小于12.

12. 如图28-4所示,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,D是三角形内的一点,$\angle ADB>\angle ADC$,求证:$\angle DBC>\angle DCB$.

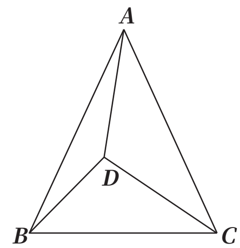


图 28-4

13. 在$\triangle ABC$中,$AC\geqslant 2AB$,求证:$\angle B>2\angle C$.

14. 如图28-5所示,已知凸四边形$ABCD$,AC与BD交于O,$\triangle ADO$和$\triangle BCO$的面积分别为3和12,求四边形$ABCD$面积的最小值.

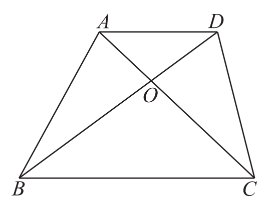


图 28-5

15. 一凸六边形$ABCDEF$每条边长均为1,求证:AD、BE、CF中至少有一条线段的长度不超过2.

第 29 讲　组合几何初步

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 如图 29-1 所示,线段 AF 上有 B、C、D、E 四个点,则图中有________条不同的线段.

2. 如果一条线段 AB 上有 n 个点(不包括两个端点 A 和 B).它们共有 210 条不同的线段,那么 n 的值是________.

3. 如图 29-2 所示,一个大长方形被分割成若干个小长方形,则图中一共有________个长方形.

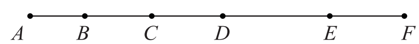


图 29-1

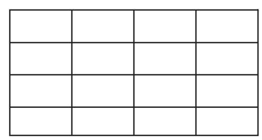


图 29-2

4. 平面上 5 个圆最多把平面分成________个部分.

5. 平面上 5 个圆和一条直线,最多能把平面分成________个部分.

6. 若一个三角形的任意两边都不相等,则称之为不规则三角形.用一个正方体上的任意三个顶点构成的所有三角形中,不规则三角形的个数是________个.

7. 由 35 个单位小正方形组成的长方形中,如图 29-3 所示,有两个小正方形含有"*",则包含两个"*"在内的小正方形组成的长方形共有________个.

8. 如图 29-4 所示,由 12 根铅丝焊接成一个正方体框架.现要将每个正方形的 4 根铅丝分别涂上红、黄、蓝、白 4 种颜色.如果已将 AD 涂成红色,BF 涂成黄色,GH 涂成蓝色,那么该涂成白色的铅丝有________.(指出所有铅丝)

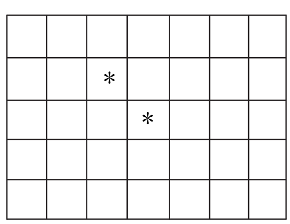


图 29-3

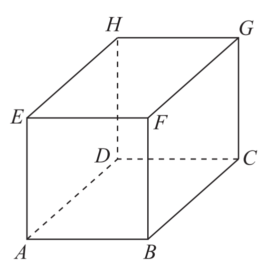


图 29-4

9. 一个由 36 个单位小方格组成的 6×6 的方格表中的 n 个小方格被染成了红色,使得任意两个红色小方格的中心之间的距离大于 2,则 n 的最大值是________.

10. 把一个矩形区域划分成 n 个凸多边形区域(这些凸多边形区域除公共边外,没有公共部分).已知构成这 n 个凸多边形的顶点中,恰有 6 个顶点在矩形内,12 个顶点在矩形的边界上(含矩形的顶点);同时,任何三个顶点不共线(除矩形边界上的顶点共线外).若围成这 n 个凸多边形的线段中,恰有 18 条线段在矩形区域内,则这 n 个凸多边形中四边形个数的最大值为________.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 证明:如果在长度为1的线段上有 $n+1$ 个点,那么其中必有2点,它们之间的距离不超过 $\frac{1}{n}$.

12. 试设计一种方法,把一个正方形不重复不遗漏地分割成 8 个正方形(分得的正方形大小可以不相同);又问如何把正方形按上面同样的要求分成 31 个正方形?

13. 试设计一种方法,把一个立方体分割成 55 个立方体.(要求:不重复不遗漏,分得的立方体大小可以不相同)

14. 在面积为5的区域中,放置着9个面积为1的矩形,证明:其中必有两个矩形的重叠部分面积不小于$\frac{1}{9}$.

15. 平面上有若干个圆,它们覆盖平面的面积是1,证明:可以从中选出若干个两两不相交的圆,使它们的面积之和不小于$\frac{1}{9}$.

第 30 讲　完全平方数

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1. 如果 m 是整数,那么 m^2+1 的个位数可能是________.

2. 如果 n 是奇数,那么 n^2-1 除以 4 的余数是________.

3. 如果 n 是偶数,那么 n^2+1 除以 8 的余数是________.

4. 如果整数 k 不是 3 的倍数,那么 k^2-1 除以 3 的余数是________.

5. 一串连续正整数的平方 $1^2,2^2,3^2,\cdots,123456789^2$ 的和的个位数是________.

6. 从 360 到 630 的正整数中,恰有奇数个正约数的数的个数是________.

7. 一个四位数加上 38 或减去 138 都是平方数,则这个四位数是________.

8. 设 n 是自然数,如果 n^2 的十位数字是 7,那么 n^2 的末位数字是________.

9. 设自然数 N 是完全平方数,N 至少是三位数,它的末两位数字不是 00,且去掉末两位数字后,剩下的数还是完全平方数,则 N 的最大值是________.

10. 已知四位数 $\overline{aabb}$ 是完全平方数,则 $a+b=$________.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11. 证明:对任意非负整数 n,$3\underbrace{99\cdots9}_{n个9}6\underbrace{00\cdots0}_{n个0}1$(当 $n=0$ 时,该数即是 361)都是一个完全平方数.

12. 证明:对于任意正整数 x,$y=x^4+2x^3+2x^2+2x+1$ 都不是完全平方数.

13. 设 n 是正整数，若 $3n+1$ 是完全平方数，证明：$n+1$ 是 3 个完全平方数之和.

14. 求证：4 个连续自然数的积加 1，其和必为完全平方数.

15. 能够找到这样的 4 个正整数，使得它们中任两个数的积与 2018 的和都是完全平方数吗？若能够，请举出一例；若不能够，请说明理由.

第 31 讲　简单的不定方程

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

1. 方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ 的正整数解有________组.

2. 方程 $x+xy-7=0$ 的非负整数解是________.

3. 已知 x 为整数，且 $\frac{2}{x+3}+\frac{2}{3-x}+\frac{2x+18}{x^2-9}$ 为整数，则所有符合条件的 x 值的和为________.

4. 某校八年级(1)班共有 35 名学生，其中 $\frac{1}{2}$ 的男生和 $\frac{1}{3}$ 的女生骑自行车上学，那么该班骑自行车上学的学生的人数最少是________人.

5. 今年，祖父的年龄是小明的年龄的 6 倍.几年后，祖父的年龄将是小明的年龄的 5 倍.又过几年后，祖父的年龄将是小明的年龄的 4 倍.如果今年祖父的年龄不超过 120 岁，那么祖父今年是________岁.

6. 某旅游团一行 50 人到某旅社住宿，该旅社有三人间、双人间和单人间三种客房，其中三人间每人每晚 20 元，双人间每人每晚 30 元，单人间每晚 50 元.已知该旅行团住满了 20 间客房，且使总的住宿费用最省，那么这笔最省的住宿费用是________元.

7. 已知 a 为实数，关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}ax+2y=24,\\2x+2y=a\end{cases}$ 有整数解，则 a 有________种不同的可能取值.

8. 已知三角形的三条边长 a、b、c 是互不相等的整数，且满足 $abc+ab+bc+ca+a+b+c=119$，则此三角形的周长是________.

9. 方程 $x^2+xy+y^2=3(x+y)$ 的整数解有________组.

10. 设 a、b、c、d 都是正整数，且 $a^5=b^2$，$c^3=d^4$，$a-c=319$，则 $\frac{b}{a^2}-\frac{c}{d}=$________.

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11. 求方程 $3x+11y=45$ 的非负整数解.

12. 某国硬币有5分和7分两种，问用这两种硬币支付142分货款，有多少种不同的方法？

13. 求方程 $x^2-4xy+19y^2=151$ 的整数解.

14. 求方程 $x^2+2017y^2=2018x$ 的正整数解.

15. 若干个工人装卸一批货物，每个工人的装卸速度相同.如果所有工人同时工作，则需10h装卸完毕.现改变装卸方式，开始一个人干，以后每隔 t(整数)h增加一个人干，每个参加装卸的人都一直干到装卸结束，且最后增加的一个人装卸的时间是第一个人装卸时间的 $\frac{1}{4}$，并且正好所有人都参与了工作.问：

(1) 按改变后的装卸方式，自始至终需要多长时间？

(2) 参加装卸的有多少名工人？

答　案

第 1 讲　三角形的概念

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1.【答案】4.

【解析】分两种情况进行讨论：

① 当 OA 为等腰三角形的腰时,以 O 为圆心、以 OA 为半径的圆弧与 y 轴有两个交点,以 A 为圆心、以 OA 为半径的圆弧与 y 轴有一个交点.

② 当 OA 为等腰三角形的底时,作线段 OA 的垂直平分线,与 y 轴有一个交点.

故符合条件的点一共 4 个.

2.【答案】$\triangle ABC$ 三条角平分线的交点.

【解析】由于凉亭到草坪三条边的距离相等,所以根据角平分线上的点到边的距离相等,可知是 $\triangle ABC$ 三条角平分线的交点,由此即可确定凉亭位置为 $\triangle ABC$ 三条角平分线的交点.

3.【答案】32.

【解析】已知 $AB=12$, $BC=14$, $CD=18$, $DA=24$.

① 选 12+14、18、24 作为三角形的边长,则三边长为 26、18、24.而 $26-24<18<26+24$,能构成三角形,此时两个端点间的最长距离为 26.

② 选 12、14+18、24 作为三角形的边长,则三边长为 12、32、24.而 $32-24<12<32+24$,能构成三角形,此时两个端点间的最长距离为 32.

③ 选 12、14、18+24 作为三角形的边长,则三边长为 12、14、42.而 $12<42-14$,不能构成三角形.

故答案为 32.

4.【答案】$20°$或 $40°$.

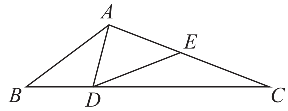
【解析】如答图 1-1 所示,因为 $AD=BD$,$\angle B=30°$,所以$\angle ADC=60°$.由于 $DE=CE$,可设$\angle C=\angle EDC=\alpha$,则$\angle ADE=60°-\alpha$,$\angle AED=2\alpha$,根据三角形内角和定理可得,$\angle DAE=120°-\alpha$,分三种情况：

① 当 $AE=AD$ 时,有 $60°-\alpha=2\alpha$,解得 $\alpha=20°$.

② 当 $DA=DE$ 时,有 $120°-\alpha=2\alpha$,解得 $\alpha=40°$.

③ 当 $EA=ED$ 时,有 $120°-\alpha=60°-\alpha$,方程无解.

综上所述,$\angle C$ 的值是 $20°$或 $40°$.



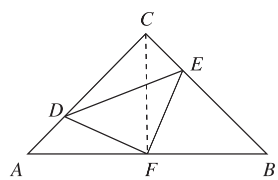
答图 1-1

5.【答案】4.

【解析】设三角形三边分别为 a、b、c 且 $a\geqslant b\geqslant c$,$a+b+c=20$,则 $a\geqslant 7$.又由 $b+c>a$,则 $2a<20$,$a<10$,因此 $7\leqslant a\leqslant 9$,可列出(a,b,c)的可能值：(9,9,2),(9,8,3),(9,7,4),(9,6,5),(8,8,4),(8,7,5),(8,6,6),(7,7,6),其中等腰三角形有(9,9,2),(8,8,4),(8,6,6),(7,7,6),共 4 个.

6.【答案】1.

【解析】如答图 1-2 所示,连接 CF.



答图 1-2

因为$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

所以$\angle FCB=\angle A=45°$,$CF=AF=FB$.

又因为 $AD=CE$,所以$\triangle ADF\cong\triangle CEF$(SAS),

所以 $EF=DF$,$\angle CFE=\angle AFD$.

因为$\angle AFD+\angle CFD=90°$,所以$\angle CFE+\angle CFD=\angle EFD=90°$,所以$\triangle EDF$ 是等腰直角三角形,故①正确.

当 D、E 分别为 AC、BC 的中点时,四边形 $CDFE$ 是正方形,故②错误.

由于$\triangle EDF$是等腰直角三角形,因此当DE最小时,DF也最小,即当$DF\perp AC$时,DE最小,此时$DF=\frac{1}{2}BC=4$.所以$DE=\sqrt{2}DF=4\sqrt{2}$,故③错误.

因为$\triangle ADF\cong\triangle CEF$,所以$CE=AD$,根据题意可求$\frac{CE}{CD}=\frac{1}{2}$,所以$\frac{CE}{AC}=\frac{1}{3}$,又$AC=8$,所以$CE=\frac{8}{3}$,故④错误.

7.【答案】24.

【解析】设经过x s后P与Q第一次相遇,

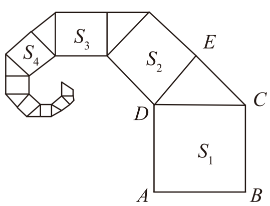
依题意得:$1.5x=x+2\times6$,解得$x=24$.

此时P运动了$24\times1=24$(cm).

又因为$\triangle ABC$的周长为16cm,$24=16+8$,所以点P、Q在AC边上相遇,即经过了24s,点P与点Q第一次在AC边上相遇.故答案为24.

8.【答案】$\left(\frac{1}{2}\right)^8$.

【解析】在图中标上字母E,如答图1-3所示.



答图 1-3

因为正方形$ABCD$的边长为1,$\triangle CDE$为等腰直角三角形,所以$DE^2+CE^2=CD^2$,$DE=CE$,所以$S_2+S_2=S_1$.通过观察发现规律:$S_1=1^2=1$,$S_2=\frac{1}{2}S_1=\frac{1}{2}$,$S_3=\frac{1}{2}S_2=\frac{1}{4}$,$S_4=\frac{1}{2}S_3=\frac{1}{8}$,……,所以$S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

当$n=9$时,$S_9=\left(\frac{1}{2}\right)^{9-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^8$.

9.【答案】①②⑤.

【解析】因为四边形$ABCD$是平行四边形,所以$AD\parallel BC$,$AD=BC$.所以$\angle EAD=\angle AEB$.

又因为AE平分$\angle BAD$,所以$\angle BAE=\angle DAE$.

所以$\angle BAE=\angle BEA$,所以$AB=BE$.

又因为$AB=AE$,所以$\triangle ABE$是等边三角形,故②正确.

所以$\angle ABE=\angle EAD=60°$.

因为$AB=AE$,$BC=AD$,所以$\triangle ABC\cong\triangle EAD$(SAS),故①正确.

因为$\triangle FCD$与$\triangle ABC$等底($AB=CD$)等高(AB与CD间的距离相等),所以$S_{\triangle FCD}=S_{\triangle ABC}$,又因为$\triangle AEC$与$\triangle DEC$同底等高,所以$S_{\triangle AEC}=S_{\triangle DEC}$,所以$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CEF}$,故⑤正确.

若AD与AF相等,即$\angle AFD=\angle ADF=\angle DEC$,即$EC=CD=BE$,即$BC=2CD$,题中未限定这一条件,所以③④不一定正确.

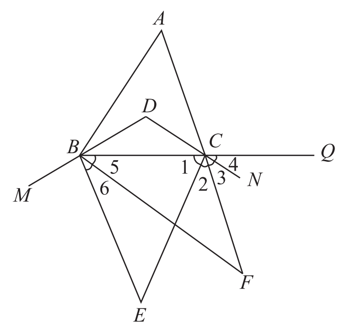
故答案为①②⑤.

评注 此题考查了平行四边形的性质、等边三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质.

10.【答案】15°.

【解析】如答图1-4所示,因为BD、CD分别平分$\angle ABC$、$\angle ACB$,$\angle A=60°$,所以$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC$,$\angle DCB=\frac{1}{2}\angle ACB$,所以$\angle DBC+\angle DCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=\frac{1}{2}\times(180°-60°)=60°$.

所以$\angle MBC+\angle NCB=360°-60°=300°$.



答图 1-4

因为BE、CE分别平分$\angle MBC$、$\angle BCN$,所以$\angle5+\angle6=\frac{1}{2}\angle MBC$,$\angle1=\frac{1}{2}\angle NCB$,所以$\angle5+\angle6+\angle1=\frac{1}{2}(\angle MBC+\angle NCB)=150°$,$\angle E=180°-(\angle5+\angle6+\angle1)=180°-150°=30°$.

因为BF、CF分别平分$\angle EBC$、$\angle ECQ$,所以

$\angle 5=\angle 6$，$\angle 2=\angle 3+\angle 4$，因为$\angle 3+\angle 4=\angle 5+\angle F$，$\angle 2+\angle 3+\angle 4=\angle 5+\angle 6+\angle E$，即$\angle 2=\angle 5+\angle F$，$2\angle 2=2\angle 5+\angle E$，所以$2\angle F=\angle E$，则$\angle F=\frac{1}{2}\angle E=\frac{1}{2}\times 30°=15°$.

故答案为 15°.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11.【答案】12.

【解析】设 $AH=a$，$AE=b$，$EH=c$，则 $c=2$，故有 $S_1+S_2+S_3=(a+b)^2+c^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)+c^2=3c^2=3\times 2^2=12$.

12.【答案】$\frac{11}{6}$cm/s 或$\frac{1}{2}$cm/s.

【解析】设 P 点运动的速度是 $x$cm/s，Q 点运动的速度是 $y$cm/s.

根据题意得

$$\begin{cases}2x+2y=6,\\9x=9y+6,\end{cases}\text{或}\begin{cases}2x+2y=6,\\9y-9x=18.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=\frac{11}{6},\\y=\frac{7}{6},\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=\frac{5}{2}.\end{cases}$$

故 P 点运动的速度是$\frac{11}{6}$cm/s 或$\frac{1}{2}$cm/s.

13.【答案】100 或 130 或 160.

【解析】由旋转的性质得：$BD=AB=BC$.

因为$\triangle ADC$ 是等腰三角形，所以分三种情况：

① 当 $DA=DC$ 时，$\angle ABD=\angle DBC=\frac{1}{2}(360°-\angle ABC)=130°$，所以 $m=130$.

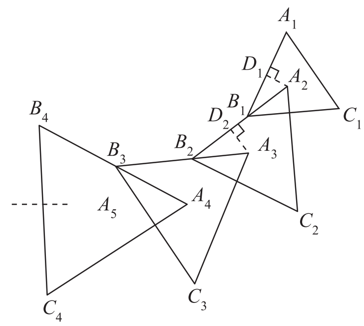
② 当 $AD=AC$ 时，$\angle ABD=\angle ABC=100°$，所以 $m=100$.

③ 当 $CA=CD$ 时，$\angle CBD=\angle ABC=100°$，所以$\angle ABD=360°-100°-100°=160°$，所以$m=160$.

综上所述，m 的所有可能的取值是 100 或 130 或 160.

14.【答案】$\frac{32\sqrt{3}}{27}$.

【解析】如答图 1-5 所示，作 $A_2D_1\perp A_1B_1$ 于 D_1，$A_3D_2\perp A_2B_2$ 于 D_2.



答图 1-5

因为$\triangle A_1B_1C_1$ 是边长为 1 的等边三角形，A_2 为等边$\triangle A_1B_1C_1$ 的中心，所以$\angle A_2B_1D_1=30°$，$B_1D_1=\frac{1}{2}A_1B_1=\frac{1}{2}$，所以$\frac{B_1D_1}{A_2B_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $A_2B_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 $A_2B_1=B_1B_2$，所以 $A_2B_2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

同理可得，$\angle A_3B_2D_2=30°$，$B_2D_2=\frac{1}{2}A_2B_2=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$\frac{B_2D_2}{A_3B_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $A_3B_2=\frac{2}{3}$.

因为 $A_3B_2=B_2B_3$，所以 $A_3B_3=\frac{4}{3}=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$，

同理可得，$A_4B_4=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3$，$A_5B_5=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^4$，$A_6B_6=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^5$.

故答案为$\frac{32\sqrt{3}}{27}$.

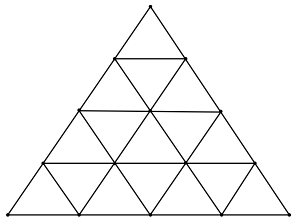
15.【答案】21.

【解析】如答图 1-6 所示，图中只有边长为 1 或 2 的两种菱形，每个菱形恰有一条与其边长相等的对角线.

原正三角形内部每条长为 1 的线段，恰是一个边长为 1 的菱形的对角线，这种线段有 18 条，对应着 18 个边长为 1 的菱形.

原正三角形的每条中位线恰是一个边长为 2 的菱形的对角线，三条中位线对应着 3 个边长为 2 的菱形.

故共得 21 个菱形.



答图 1-6

第 2 讲　多边形的概念及内角和

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1.【答案】14.

【解析】设新多边形是 n 边形,由多边形内角和得 $(n-2)\times180^{\circ}=2340^{\circ}$,解得 $n=15$,原多边形的边数为 $15-1=14$.

2.【答案】75.

【解析】观察图形知:

第 1 个图形有正多边形:$5=1^2+4\times1$ 个,

第 2 个图形有正多边形:$13=1^2+2^2+4\times2$ 个,

第 3 个图形有正多边形:$26=1^2+2^2+3^2+4\times3$ 个,

……

第 n 个图形有正多边形:$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2+4n$ 个.

故当 $n=5$ 时,即第 5 个图形有正多边形:$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+4\times5=75$ 个.

3.【答案】①②③④.

【解析】因为 AD 平分 $\angle EAC$,所以 $\angle EAC=2\angle EAD$. 因为 $\angle EAC=\angle ABC+\angle ACB$,$\angle ABC=\angle ACB$,所以 $\angle EAD=\angle ABC$,所以 $AD\parallel BC$,故①正确.

因为 $AD\parallel BC$,所以 $\angle ADB=\angle DBC$,因为 BD 平分 $\angle ABC$,$\angle ABC=\angle ACB$,所以 $\angle ABC=\angle ACB=2\angle DBC$,所以 $\angle ACB=2\angle ADB$,故②正确.

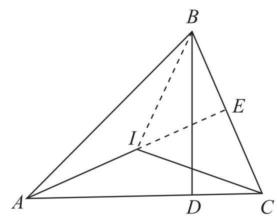
因为 AD 平分 $\angle EAC$,CD 平分 $\angle ACF$,所以 $\angle DAC=\dfrac{1}{2}\angle EAC$,$\angle DCA=\dfrac{1}{2}\angle ACF$. 因为 $\angle EAC=\angle ACB+\angle ABC$,$\angle ACF=\angle ABC+\angle BAC$,$\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180^{\circ}$,所以 $\angle ADC=180^{\circ}-(\angle DAC+\angle ACD)=180^{\circ}-\dfrac{1}{2}(\angle EAC+\angle ACF)=180^{\circ}-\dfrac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB+\angle ABC+\angle BAC)=180^{\circ}-\dfrac{1}{2}(180^{\circ}+\angle ABC)=90^{\circ}-\dfrac{1}{2}\angle ABC=90^{\circ}-\angle ABD$.故③正确.

因为 $\angle ACF=2\angle DCF$,$\angle ACF=\angle BAC+\angle ABC$,$\angle ABC=2\angle DBC$,$\angle DCF=\angle DBC+\angle BDC$,所以 $\angle BAC=2\angle BDC$,故④正确.

故答案为①②③④.

4.【答案】50°.

【解析】如答图 2-1 所示,延长 AI 交 BC 于 E,连接 BI.



答图 2-1

设 $\angle BAC=x$,因为 $AB=AC$,$\angle AEC=\angle AEB=90^{\circ}$,所以 $AE\perp BC$.

因为 I 为△ABD 的三条内角平分线的交点,所以 $\angle BAE=\angle CAE=\dfrac{x}{2}$,$\angle ABI=\angle DBI$,所以 $\angle DBC=\angle CAE=\dfrac{x}{2}$.

因为 $AE\perp BC$,$AB=AC$,所以 $IB=IC$,所以 $\angle IBC=\angle ICB$,所以 $\angle ACI=\angle ABI=\angle DBI$.

因为 $\angle ACI=\dfrac{4}{5}\angle DBC$,所以 $\angle ACI=\angle ABI=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{5}x$,所以 $\dfrac{2}{5}x+\dfrac{2}{5}x+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}=90^{\circ}$,解得 $x=50^{\circ}$.

5.【答案】$\sqrt{13}$.

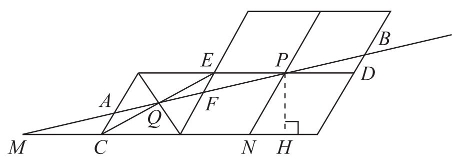
【解析】如答图 2-2 所示,经过 P、Q 的直线 AB 把它剪成了面积相等的两部分.

由图形可知 $\triangle AMC\cong\triangle FPE\cong\triangle BPD$,所以

$AM=PB, MC=PE=1$，所以 $PF=PB=AM=AF$，故 $PM=AB$.

因为小菱形的一个内角是 60°，边长是 1，作 $PH\perp CN$ 交于点 H，则 $PH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$NH=\frac{1}{2}$，$MH=\frac{7}{2}$.

因为 $PM=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{13}$，所以 $AB=\sqrt{13}$.



答图 2-2

6.【答案】5，7.

【解析】设两个凸多边形的边数分别为 x 条、y 条，则

$$\begin{cases}x+y=12,\\ \frac{x(x-3)}{2}+\frac{y(y-3)}{2}=19,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x_1=5,\\ y_1=7,\end{cases}\begin{cases}x_2=7,\\ y_2=5.\end{cases}$

故这两个多边形的边数分别是 5 和 7.故答案为 5，7.

7.【答案】④.

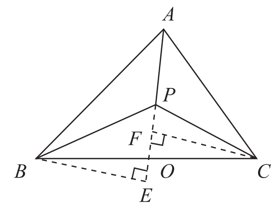
【解析】① 正多边形不一定是中心对称图形，此选项错误；②三角形的外心到三个顶点的距离相等，内心到三边的距离相等，此选项错误；③边长为 a 的正六边形的面积等于 $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$，此选项错误；④边长分别是 6、8、10 的三角形的内切圆的半径为 2，所以面积为是 4π，此选项正确.

8.【答案】$\triangle ABC$ 的三条中线的交点.

【解析】如答图 2-3 所示，延长 AP 交 BC 于 O，作 $BE\perp AP$ 于 E，作 $CF\perp AP$ 于 F，

因为 $S_{\triangle ABP}$ 的面积 $=S_{\triangle ACP}$，所以 $BE=CF$.

因为 $\angle BEO=\angle CFO$，$\angle BOE=\angle COF$，所以 $\triangle BEO\cong\triangle CFO$，所以 $BO=CO$.同理，可以证明点 P 即为 $\triangle ABC$ 的三条中线的交点.



答图 2-3

9.【答案】①②④⑤.

【解析】在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\angle ACB=90°$，所以 $\angle CAB+\angle ABC=90°$.又因为 AD、BE 分别平分 $\angle BAC$、$\angle ABC$，所以 $\angle BAD+\angle ABE=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle ABC)=45°$，所以 $\angle APB=135°$，故①正确.

于是 $\angle BPD=45°$，又因为 $PF\perp AD$，所以 $\angle FPB=90°+45°=135°$，所以 $\angle APB=\angle FPB$.

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle FBP$ 中，$\begin{cases}\angle APB=\angle FPB,\\ BP=BP,\\ \angle ABP=\angle FBP,\end{cases}$

所以 $\triangle ABP\cong\triangle FBP$(ASA).

所以 $\angle BAP=\angle BFP$，$AB=FB$，$PA=PF$，故②正确.

因为 $\triangle ABP\cong\triangle FBP$，所以 $\angle BAP=\angle BFP$，$PA=PF$.

又因为 $\angle PAH=\angle BAP$，所以 $\angle PAH=\angle BFP$.

在 $\triangle APH$ 和 $\triangle FPD$ 中，

$$\begin{cases}\angle APH=\angle FPD=90°,\\ PA=PF,\\ \angle PAH=\angle BFP,\end{cases}$$

所以 $\triangle APH\cong\triangle FPD$(ASA)，所以 $AH=FD$、

又因为 $AB=FB$，所以 $AB=FB=FD+BD=AH+BD$，故③不正确.

连接 HD、ED，如答图 2-4(a)所示.

因为 $\triangle ABP\cong\triangle FBP$，$\triangle APH\cong\triangle FPD$，所以 $S_{\triangle APB}=S_{\triangle FPB}$，$S_{\triangle APH}=S_{\triangle FPD}$，$PH=PD$.

因为 $\angle HPD=90°$，所以

$\angle HDP=\angle DHP=45°=\angle BPD$.

所以 $HD\parallel EP$，所以 $S_{\triangle EPH}=S_{\triangle EPD}$，

$S_{四边形ABDE}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle AEP}+S_{\triangle EPD}+S_{\triangle PBD}$

$=S_{\triangle ABP}+(S_{\triangle AEP}+S_{\triangle EPH})+S_{\triangle PBD}$

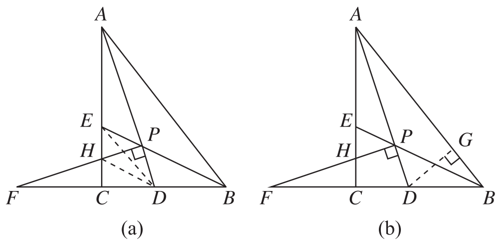
$=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APH}+S_{\triangle PBD}$

$=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle FPD}+S_{\triangle PBD}$

$=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle FBP}=2S_{\triangle ABP}$,

故④正确.

过 D 作 $DG\perp AB$,如答图 2-4(b)所示,



答图 2-4

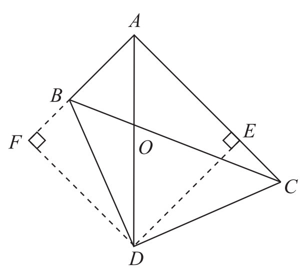
因为 AD 为角平分线,所以 $CD=DG$,

所以$\dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ADB}}=\dfrac{AC}{AB}$,$\dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ADB}}=\dfrac{DC}{BD}$,

所以$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{BD}$,即⑤正确.

10.【答案】1.

【解析】如答图 2-5 所示,作 $DE\perp AC$ 于 E,$DF\perp AB$ 于 F.



答图 2-5

因为$\angle BAC=90^\circ$,$\angle F=\angle AED=90^\circ$,

所以$\angle EDF=\angle BDC=90^\circ$,

所以$\angle BDF=\angle EDC$.

在$\triangle DFB$ 和$\triangle DEC$ 中,$\begin{cases}\angle F=\angle DEC=90^\circ,\\ \angle BDF=\angle CDE,\\ DB=DC,\end{cases}$

所以$\triangle DFB\cong\triangle DEC$(AAS),所以 $DE=DF$,$BF=CE$.

在 Rt$\triangle AFD$ 和 Rt$\triangle AED$ 中,$\begin{cases}DE=DF,\\ AD=AD,\end{cases}$所以$\triangle AFD\cong\triangle AED$(HL),

所以 $AF=AE$.

因为$\angle F=90^\circ$,所以$\angle FAD=\angle CAD=45^\circ$,所以 $AF=DF$,

所以 $AB+AC=AF-BF+AE+CE=2AE=6$,

所以 $AE=AF=DF=3$.

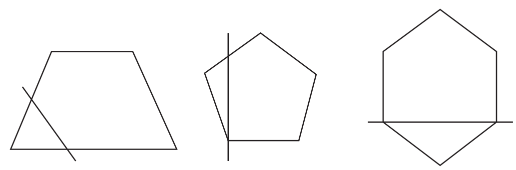
$S_1-S_2=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ABD}$

$$=\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times2\times3=1.$$

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11.【答案】4、5 或 6.

【解析】设新多边形的边数为 n,则$(n-2)\cdot180^\circ=540^\circ$,解得 $n=5$.如答图 2-6 所示,截去一个角后,多边形的边数可以增加 1、不变、减少 1,所以,$5-1=4$,$5+1=6$,所以原来多边形的边数为 4、5 或 6.



答图 2-6

评注 本题考查了多边形的内角和公式,要注意截去一个角后要分三种情况讨论.先根据多边形的内角和公式$(n-2)\cdot180^\circ$求出新多边形的边数,再根据截去一个角后,多边形的边数可以增加 1、不变、减少 1 三种情况解答.

12.【答案】5 或 6.

【解析】设多边形的边数为 n,多加的外角度数为 α,少加的内角为 $180^\circ-\alpha$,则

$(n-2)\cdot180^\circ=600^\circ-\alpha+180^\circ-\alpha$,

即 $180^\circ n-360^\circ=780^\circ-2\alpha$,

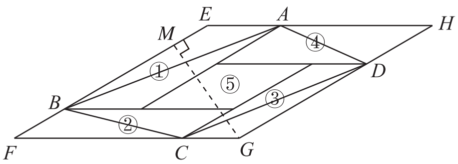
解得 $\alpha=570^\circ-90^\circ n$.

因为 $0^\circ<\alpha<180^\circ$.所以 $0^\circ<570^\circ-90^\circ n<180^\circ$,所以$\dfrac{13}{3}<n<\dfrac{19}{3}$.

因为 n 只能为整数,所以 $n=5$ 或 6.

13.【答案】48cm.

【解析】如答图 2-7 所示,作 $GM\perp EF$ 于点 M.



答图 2-7

由题意得 $S_{⑤}=S_{四边形ABCD}-\frac{1}{2}(S_{①}+S_{②}+S_{③}+S_{④})=4\mathrm{cm}^2$,

所以 $S_{菱形EFGH}=14+4=18\mathrm{cm}^2$.

又因为$\angle F=30^{\circ}$,设菱形的边长为 x,则菱形的高为 $GM=\frac{1}{2}GF=\frac{1}{2}x$,根据菱形的面积公式得 $x\cdot\frac{x}{2}=18$,解得 $x=6$,所以菱形的边长为 6cm.

故①②③④四个平行四边形周长的总和等于

$2(AE+AH+HD+DG+GC+CF+FB+BE)$

$=2(EF+FG+GH+HE)$

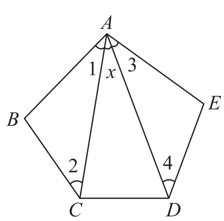
$=48\mathrm{cm}$.

14.【答案】36°.

【解析】因为五边形 $ABCDE$ 的内角和$=(5-2)\times180^{\circ}=540^{\circ}$,而五边形$ABCDE$的内角都相等,所以$\angle E=\angle BAE=\angle B=\frac{540^{\circ}}{5}=108^{\circ}$.

如答图 2-8 所示,设$\angle CAD=x$,因为$\angle1+\angle2+\angle B=180^{\circ}$,$\angle3+\angle4+\angle E=180^{\circ}$,$\angle1=\angle2$,$\angle3=\angle4$,所以$\angle1+\angle3=180^{\circ}-108^{\circ}=72^{\circ}$,所以

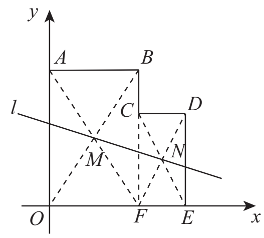
$x=\angle BAE-(\angle1+\angle3)=108^{\circ}-72^{\circ}=36^{\circ}$.



答图 2-8

15.【答案】$y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$.

【解析】如答图 2-9 所示,延长 BC 交 x 轴于点 F,连接 OB、AF,连接 CE、DF,且相交于点 N.



答图 2-9

由已知得点 $M(2,3)$是 OB、AF 的中点,即点 M 为矩形 $ABFO$ 的中心,所以直线 l 把矩形 $ABFO$ 分成面积相等的两部分.又因为点 $N(5,2)$是矩形 $CDEF$ 的中心,所以过点 $N(5,2)$的直线把矩形 $CDEF$ 分成面积相等的两部分.于是,直线 MN 即为所求的直线 l.

设直线 l 的函数表达式为 $y=kx+b$,

则$\begin{cases}2k+b=3\\5k+b=2\end{cases}$,解得$\begin{cases}k=-\frac{1}{3}\\b=\frac{11}{3}\end{cases}$.

故所求直线 l 的函数表达式为 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$.

第 3 讲　全等三角形

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1.【答案】①.

【解析】三边对应相等的两个三角形全等,故①正确.

两角及一边对应相等的两个三角形全等,故②错误.

三角对应相等的两个三角形不一定全等,故③错误.

两边与它们的夹角对应相等的两个三角形全等,故④错误.

2.【答案】4.

【解析】两个全等三角形不一定关于某直线对称,故①错误.

等腰三角形的对称轴是底边上的中线所在直线,故②错误.

若点 A、B 关于直线 MN 对称,则 MN 垂直平分

线段 AB,故③错误.

在角的内部,到角两边距离相等的点在这个角的平分线上,故④错误.

3.【答案】②④.

【解析】① 由折叠可得 $BD=DE$,$\angle AED=\angle ABD=90^\circ$,即$\angle DEC=90^\circ$,因为 $DC>DE$,所以 $DC>BD$,所以 $AB=BC=BD+DC>2BD$,故①错误.

② 由翻折的性质可知:图中的全等三角形有$\triangle ABF\cong\triangle AEF$,$\triangle ABD\cong\triangle AED$,$\triangle FBD\cong\triangle FED$.因为 $OB\perp AC$,所以$\angle AOB=\angle COB=90^\circ$.

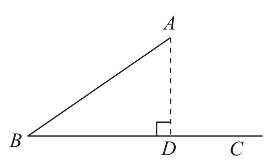
在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle COB$ 中,$\begin{cases}AB=BC,\\BO=BO,\end{cases}$所以 $\mathrm{Rt}\triangle AOB\cong\mathrm{Rt}\triangle COB$(HL),则全等三角形共有 4 对,故②正确.

③ 因为 $AB=CB$,$BO\perp AC$,把$\triangle ABC$ 折叠,所以$\angle ABO=\angle CBO=45^\circ$,$\angle FBD=\angle DEF$.所以$\angle AEF=\angle DEF=45^\circ$,所以将$\triangle DEF$ 沿 EF 折叠,可得点 D 一定在 AC 上,故③错误.

④ 因为 $OB\perp AC$,且 $AB=CB$,所以 BO 为$\angle ABC$ 的平分线,即$\angle ABO=\angle CBO=45^\circ$.由折叠可知,$AD$ 是$\angle BAC$ 的平分线,即$\angle BAF=22.5^\circ$.又因为$\angle BFD$ 为$\triangle ABF$ 的外角,所以$\angle BFD=\angle ABO+\angle BAF=67.5^\circ$.所以$\angle BDF=180^\circ-45^\circ-67.5^\circ=67.5^\circ$.所以$\angle BFD=\angle BDF$.所以 $BD=BF$,故④正确.

4.【答案】6.

【解析】如答图 3-1 所示,过点 A 作 $AD\perp BC$ 于 D.



答图 3-1

因为$\angle ABC=30^\circ$,$AB=10$,所以 $AD=\frac{1}{2}AB=5$.

当 $AC=5$ 时,可作 1 个三角形;

当 $AC=7$ 时,可作 2 个三角形;

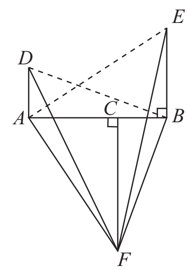
当 $AC=9$ 时,可作 2 个三角形;

当 $AC=11$ 时,可作 1 个三角形.

所以,满足条件的互不全等的三角形共有 $1+2+2+1=6$(个).

5.【答案】39°.

【解析】如答图 3-2 所示,连接 BD、AE.



答图 3-2

因为 $DA\perp AB$,$FC\perp AB$,所以$\angle DAB=\angle BCF=90^\circ$.

在$\triangle DAB$ 和$\triangle BCF$ 中,$\begin{cases}DA=BC\\\angle DAB=\angle BCF,\\AB=FC\end{cases}$

所以$\triangle DAB\cong\triangle BCF$(SAS),

所以 $BD=BF$,$\angle ADB=\angle ABF$,

所以$\angle BDF=\angle BFD$.

因为$\angle DAB=90^\circ$,所以$\angle ADB+\angle DBA=90^\circ$,

所以$\angle DBF=\angle ABD+\angle ABF=90^\circ$,

所以$\angle BFD=\angle BDF=45^\circ$.

同理$\angle AFE=45^\circ$,所以$\angle DFE=45^\circ+45^\circ-51^\circ=39^\circ$.

6.【答案】①③④.

【解析】BE 平分$\angle ABC$,所以$\angle EBC=\frac{1}{2}\angle ABC$.

因为 CE 平分$\angle ACD$,所以$\angle DCE=\frac{1}{2}\angle ACD$.

因为$\angle ACD=\angle BAC+\angle ABC$,$\angle DCE=\angle CBE+\angle BEC$,

所以$\angle EBC+\angle BEC=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC)=\angle EBC+\frac{1}{2}\angle BAC$,

所以$\angle BEC=\frac{1}{2}\angle BAC$,故①正确.

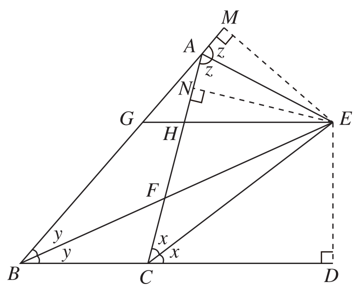
$\triangle HEF$ 与 $\triangle CBF$ 只有两个角是相等的，但不含相等的边，所有不能得出全等的结论，故②错误.

BE 平分 $\angle ABC$，所以 $\angle ABE=\angle CBE$.

因为 $GE /\!/ BC$，所以 $\angle CBE=\angle GEB$，所以 $\angle ABE=\angle GEB$，所以 $BG=GE$.

同理 $CH=HE$，所以 $BG-CH=GE-EH=GH$，故③正确.

过点 E 作 $EN\perp AC$ 于 N，$ED\perp BC$ 于 D，$EM\perp BA$ 于 M，如答图 3-3 所示.



答图 3-3

因为 BE 平分 $\angle ABC$，所以 $EM=ED$.

因为 CE 平分 $\angle ACD$，所以 $EN=ED$，所以 $EN=EM$，所以 AE 平分 $\angle CAM$.

设 $\angle ACE=\angle DCE=x$，$\angle ABE=\angle CBE=y$，$\angle MAE=\angle CAE=z$，则 $\angle BAC=180^\circ-2z$，$\angle ACB=180-2x$.

因为 $\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180^\circ$，

所以 $2y+180^\circ-2z+180^\circ-2x=180^\circ$，

所以 $x+z=y+90^\circ$.

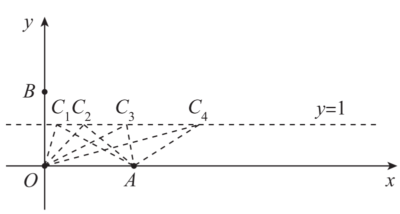
因为 $z=y+\angle AEB$，所以 $x+y+\angle AEB=y+90^\circ$，所以 $x+\angle AEB=90^\circ$，

即 $\angle ACE+\angle AEB=90^\circ$，故④正确.

故答案为①③④.

7.【答案】4.

【解析】如答图 3-4 所示，满足条件的点 C 有 4 个.



答图 3-4

8.【答案】10.

【解析】因为 $A(8,0)$，所以 $OA=8$.

设 $\triangle AOP$ 的边 OA 上的高是 h，则 $\frac{1}{2}\times 8\times h=16$，

解得 $h=4$.

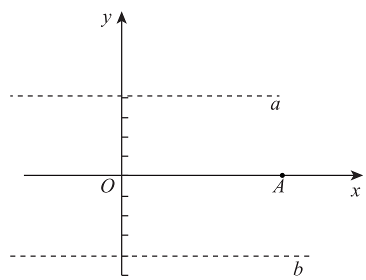
在 x 轴的两侧作直线 a 和直线 b 都和 x 轴平行，且到 x 轴的距离都等于 4，如答图 3-5 所示.

① 以 A 为圆心，以 8 为半径画弧，交直线 a 和直线 b 分别有两个点，即共 4 个点符合.

② 以 O 为圆心，以 8 为半径画弧，交直线 a 和直线 b 分别有两个点，即共 4 个点符合.

③ 作 AO 的垂直平分线分别交直线 a、b 于一点，即共 2 个点符合.

因此，满足条件的点 P 一共有 $4+4+1+1=10$(个).



答图 3-5

9.【答案】4.

【解析】如答图 3-6(a)所示，将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle ADH$.

因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以

$AB=BC=AD$，$\angle BAD=\angle ABC=90^\circ$，$\angle ABD=\angle CBD=45^\circ$.

在 $\triangle BNA$ 和 $\triangle BNC$ 中，$\begin{cases}BN=BN,\\ \angle NBA=\angle NBC,\\ BA=BC,\end{cases}$

所以 $\triangle NBA\cong\triangle NBC$(SAS)，所以 $AN=CN$，$\angle BAN=\angle BCN$.

因为 $EN=CN$，所以 $AN=EN$，$\angle NEC=\angle NCE=\angle BAN$.

因为 $\angle NEC+\angle BEN=180^\circ$，所以 $\angle BAN+\angle BEN=180^\circ$，所以 $\angle ABC+\angle ANE=180^\circ$，所以 $\angle ANE=90^\circ$，所以 $AN=EN$，$AN\perp EN$，故①正确.

因为$\angle 3=45°$,$\angle 1=\angle 4$,所以$\angle 2+\angle 4=\angle 2+\angle 1=45°$,所以$\angle 3=\angle FAH=45°$.

因为$AF=AF$,$AE=AH$,所以$\triangle AFE\cong\triangle AFH$(SAS),所以$EF=FH=DF+DH=DF+BE$,$\angle AFH=\angle AFE$,故②正确.

因为$\angle MAN=\angle NDF=45°$,$\angle ANM=\angle DNF$,所以$\angle AMN=\angle AFD$,

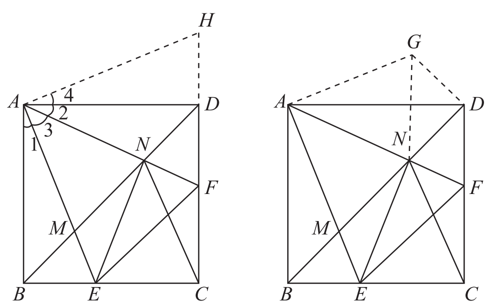
所以$\angle DFE=2\angle AMN$,故③正确.

因为$\angle MAN=45°$,$AB=AD$,

所以$\angle ABD=\angle ADB=45°$,如答图 3-6(b)所示,将$\triangle ABM$绕点$A$逆时针旋转 90°得到$\triangle ADG$.

可证$\triangle ANG\cong\triangle ANM$(SAS),所以$MN=GN$,$\triangle GDN$是直角三角形,

所以$MN^2=DN^2+DG^2=DN^2+BM^2$,故④正确.



(a) (b)

答图 3-6

10.【答案】$2\sqrt{13}-2$.

【解析】如答图 3-7 所示,过点E作$EM\perp CD$于点M,取BE的中点O,连接OP、OD.

因为四边形$ABCD$是正方形,所以$AB=AD$,$\angle A=\angle ADC=\angle DME=90°$,$AB\parallel CD$,

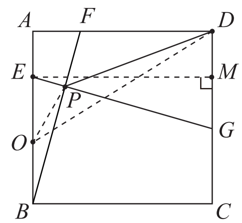
所以四边形$ADME$是矩形,所以$EM=AD=AB$.

因为$BF=EG$,所以$\mathrm{Rt}\triangle BAF\cong\mathrm{Rt}\triangle EMG$(HL),所以$\angle ABF=\angle MEG$,$\angle AFB=\angle EGM$.

因为$AB\parallel CD$,所以$\angle MGE=\angle BEG=\angle AFB$.

因为$\angle ABF+\angle AFB=90°$,所以$\angle ABF+\angle BEG=90°$,所以$\angle EPF=90°$,所以$BF\perp EG$.

因为$\triangle EPB$是直角三角形,所以$OP=\frac{1}{2}BE$.因为$AB=6$,$AE=2$,所以$BE=6-2=4$,$OB=OE=2$.因为$OD-OP\leqslant DP$,所以当O、D、P共线时,DP有最小值.因为$PO=\frac{1}{2}BE=2$,所以$OD=\sqrt{AD^2+AO^2}=2\sqrt{13}$,所以$DP=2\sqrt{13}-2$,即$DP$的最小值为$2\sqrt{13}-2$.



答图 3-7

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

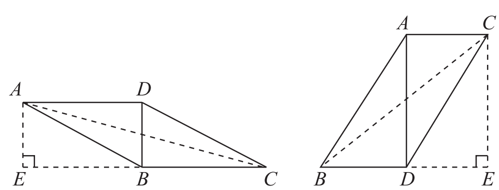
11.【答案】$\sqrt{17}$ cm 或 $2\sqrt{2}$ cm.

【解析】拼接方法分两种情况:

① 如答图 3-8(a)所示,以 1cm 的边对齐拼图,较长的对角线的长为$\sqrt{1^2+(2+2)^2}=\sqrt{17}$ cm.

② 如答图 3-8(b)所示,以 2cm 的边对齐拼图,较长的对角线的长为$\sqrt{CE^2+(BD+DE)^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ cm.

综上所述,较长的对角线的长为$\sqrt{17}$ cm 或$2\sqrt{2}$ cm.



(a) (b)

答图 3-8

12.【答案】(1) $BC=EC+CD$;

(2) $BD^2+CD^2=2AD^2$;

(3) $AD=6$.

【解析】(1) 因为$\angle BAC=\angle DAE=90°$,所以$\angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$,即$\angle BAD=\angle CAE$.

在$\triangle BAD$和$\triangle CAE$中,$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAE,\\ AD=AE,\end{cases}$

所以$\triangle BAD\cong\triangle CAE$(SAS),所以$BD=CE$.

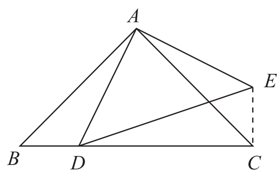
所以$BC=BD+CD=EC+CD$.

(2) 如答图3-9(a)所示,连接CE.

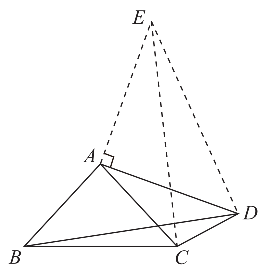
由(1)得,$\triangle BAD\cong\triangle CAE$,所以$BD=CE$,$\angle ACE=\angle B$,所以$\angle DCE=90°$,所以$CE^2+CD^2=ED^2$.

在$Rt\triangle ADE$中,$AD^2+AE^2=ED^2$,又$AD=AE$,所以$BD^2+CD^2=2AD^2$.

(3) 如答图3-9(b)所示,作$AE\perp AD$,使$AE=AD$,连接CE、DE.



(a)



(b)

答图 3-9

因为$\angle BAC+\angle CAD=\angle DAE+\angle CAD$,即$\angle BAD=\angle CAE$.在$\triangle BAD$与$\triangle CAE$中,$\begin{cases}AB=AC,\\ \angle BAD=\angle CAE,\\ AD=AE,\end{cases}$所以$\triangle BAD\cong\triangle CAE$(SAS),所以$BD=CE=9$.

因为$\angle ADC=45°$,$\angle EDA=45°$,所以$\angle EDC=90°$,所以$DE=\sqrt{CE^2-CD^2}=6\sqrt{2}$.因为$\angle DAE=90°$,所以$AD=AE=\frac{\sqrt{2}}{2}DE=6$.

13.【答案】有4种情况:$t=0s$,$t=3s$,$t=7s$,$t=10s$.

【解析】分4种情况讨论:

① 当点P与点C重合时,因为$\angle ACB=\angle QAP=90°$,在$Rt\triangle ABC$与$Rt\triangle PQA$中,$\begin{cases}AP=CA,\\ PQ=AB,\end{cases}$所以$Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle PQA$(HL),此时$PC=0$,$t=0$,即当$t=0s$时,$Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle PQA$.

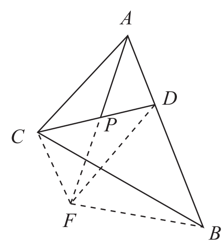
② 在点A的左边,当点P运动到$AP=BC$时,因为$\angle C=\angle QAP=90°$,在$Rt\triangle ABC$与$Rt\triangle QPA$中,$\begin{cases}AP=BC,\\ PQ=AB,\end{cases}$所以$Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle QPA$(HL),

所以$AP=BC=4$,即$CP=10-4=6$,而$6\div2=3$,即当$t=3s$时,$Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle QPA$.

③ 在点A的右边,当点P运动到$AP=BC$时,$\begin{cases}AP=BC,\\ PQ=AB,\end{cases}$所以$Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle QPA$(HL),所以$CP=14$,而$14\div2=7$,即当$t=7s$时,$Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle QPA$.

④ 在点A的右边,当$AP=AC=10$时,$\begin{cases}AP=AC,\\ PQ=AB,\end{cases}$所以$Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle PQA$(HL),所以$CP=20$,而$20\div2=10$,即当$t=10s$时,$Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle QPA$.

14.【答案】证明:如答图3-10所示,延长AP至点F,使得$PF=AP$,连接BF、DF、CF.因为P是CD中点,所以$CP=DP$,所以四边形$ACFD$是平行四边形,所以$DF=AC=BD$,$DF\parallel AC$,所以$\angle FDB=\angle BAC=60°$,所以$\triangle BDF$是等边三角形,所以$BF=DF=AC$,$\angle ABF=60°$,所以$\angle ABF=\angle BAC$.



答图 3-10

在$\triangle ABC$和$\triangle BAF$中,因为$\begin{cases}AB=BA,\\ \angle BAC=\angle ABF,\\ AC=BF,\end{cases}$所以$\triangle ABC\cong\triangle BAF$(SAS),所以$AF=BC$,所以$AP=\frac{1}{2}AF=\frac{1}{2}BC$.

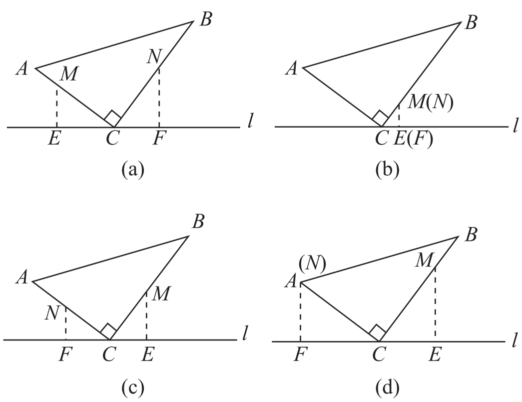
15.【答案】$\frac{23}{5}$,或 7,或 8.

【解析】① 当 $0\leqslant t<4$ 时,点 M 在 AC 上,点 N 在 BC 上,如答图 3-11(a)所示,此时有 $AM=2t$,$BN=3t$,$AC=8$,$BC=15$.当 $MC=NC$,即 $8-2t=15-3t$,解得 $t=7$,不合题意,舍去.

② 当 $4\leqslant t<5$ 时,点 M 在 BC 上,点 N 也在 BC 上,如答图 3-11(b)所示,若 $MC=NC$,则点 M 与点 N 重合,即 $2t-8=15-3t$,解得 $t=\frac{23}{5}$.

③ 当 $5\leqslant t<\frac{23}{3}$ 时,点 M 在 BC 上,点 N 在 AC 上,如答图 3-11(c)所示,当 $MC=NC$,即 $2t-8=3t-15$,解得 $t=7$.

④ 当 $\frac{23}{3}\leqslant t<\frac{23}{2}$ 时,点 N 停在点 A 处,点 M 在 BC 上,如答图 3-11(d)所示,当 $MC=NC$,即 $2t-8=8$,解得 $t=8$.



答图 3-11

综上所述,当 t 等于 $\frac{23}{5}$ 或 7 或 8 时,以点 M、E、C 为顶点的三角形与以点 N、F、C 为顶点的三角形全等.

第 4 讲　轴对称

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

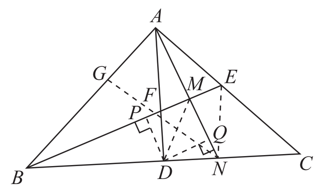
1.【答案】4.

【解析】因为在等腰 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,$AD\perp BC$ 于 D,所以 $AB=AC$,$\angle BCA=\angle ABC=45°=\angle DAC=\angle DAB$,$AD=BD=CD$,$AD\perp BC$.

因为 BE 平分 $\angle ABC$,所以 $\angle ABE=\angle CBE=22.5°$.因为 $AB\perp AC$,$AD\perp BC$,所以 $\angle AEB=67.5°$,$\angle BFD=67.5°=\angle AFE$,所以 $\angle AFE=\angle AEB$,所以 $AF=AE$,所以 $\triangle AFE$ 为等腰三角形,故①正确.

因为 M 是 EF 的中点,$AE=AF$,所以 $AM\perp BE$,$\angle DAM=\angle CAM=22.5°$,所以 $\angle DAN=\angle CBE=22.5°$,且 $\angle ADB=\angle ADN$,$AD=BD$,$\triangle ADN\cong\triangle BDF$,故②正确.

如答图 4-1 所示,连接 NF 并延长交 AB 于 G,因为 $\triangle ADN\cong\triangle BDF$,所以 $DF=DN$,$AN=BF$,所以 $\angle DNF=\angle DFN=45°$,所以 $\angle BGN=180°-45°-45°=90°$,所以 $NG\perp AB$,因为 $BN>BF$,所以 NF 不平分 AB,故③错误.



答图 4-1

过点 D 作 $DP\perp BE$ 于点 P,$DQ\perp AN$ 于点 Q,因为 $\triangle ADN\cong\triangle BDF$,所以 $BF=AN$,所以 $S_{\triangle ADN}=S_{\triangle BDF}$,所以 $DP=DQ$,所以 DM 平分 $\angle BMN$,故④正确.

因为 $AB=AC$,$\angle ACB=\angle DAB=45°$,$\angle ABF=\angle CAN=22.5°$,所以 $\triangle ABF\cong\triangle ACN$,所以 $AF=CN$,且 $AE=AF$,所以 $AE=CN$.因为 M 为 EF 的中点,所以 $AM\perp BE$.因为 $\angle ABE=\angle CBE=22.5°$,$BM=BM$,所以 Rt$\triangle ABM\cong$Rt$\triangle NBM$,所以 $AM=MN$,所以 BE 垂直平分 AN,所以 $AE=EN=NC$,故⑤正确.

综上所述正确的有①②④⑤,共 4 个.

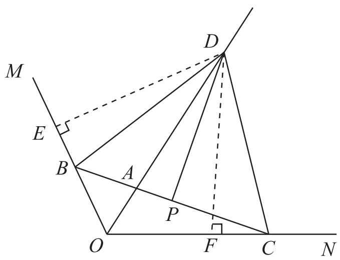
2.【答案】50°.

【解析】如答图 4-2 所示,过 D 作 $DE\perp OM$ 于 E,$DF\perp ON$ 于 F,则 $\angle DEB=\angle DFC=\angle DFO=90°$.

因为 $\angle MON=130°$,所以 $\angle EDF=360°-90°-90°-130°=50°$.

因为 $DE\perp OM$,$DF\perp ON$,OD 平分 $\angle MON$,所

以 $DE=DF$.



答图 4-2

因为 P 为 BC 中点，$DP\perp BC$，所以 $BD=CD$.

在 Rt△DEB 和 Rt△DFC 中，$\begin{cases}DB=DC,\\DE=DF,\end{cases}$

所以 Rt△DEB≌Rt△DFC（HL），所以 $\angle EDB=\angle FDC$，所以 $\angle BDC=\angle BDF+\angle CDF=\angle BDF+\angle EDB=\angle EDF=50°$.

3.【答案】7 或 $\frac{26}{3}$.

【解析】在 Rt△ABC 中，$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$.

（1）当 $\angle EDB'=90°$ 时，如答图 4-3(a)所示，

过点 B' 作 $B'F\perp AC$，交 AC 的延长线于点 F.

由折叠得 $AB=AB'=13$，$BD=B'D=CF$.

设 $BD=x$，则 $B'D=CF=x$，$B'F=CD=12-x$.

在 Rt△AFB' 中，由勾股定理得 $(5+x)^2+(12-x)^2=13^2$，

解得 $x_1=0$（舍去），$x_2=7$.

因此，$BD=7$.

（2）当 $\angle DEB'=90°$ 时，如答图 4-3(b)所示，此时点 E 与点 C 重合.

由折叠得 $AB=AB'=13$，则 $B'C=13-5=8$.

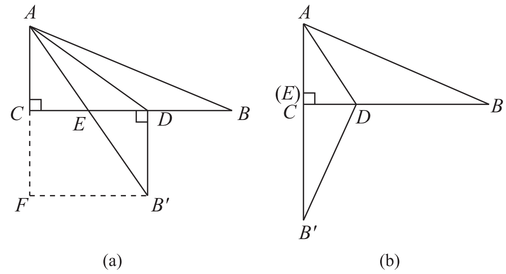
设 $BD=x$，则 $B'D=x$，$CD=12-x$，

在 Rt△$B'CD$ 中，由勾股定理得 $(12-x)^2+8^2=x^2$，

解得 $x=\frac{26}{3}$.

因此，$BD=\frac{26}{3}$.

故答案为 7 或 $\frac{26}{3}$.



答图 4-3

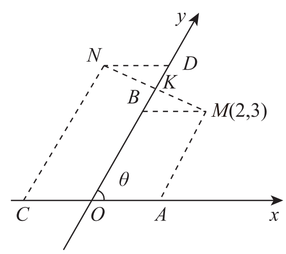
4.【答案】$(-2,5)$.

【解析】如答图 4-4 所示，作 $ND\parallel x$ 轴交 y 轴于 D，作 $NC\parallel y$ 轴交 x 轴于 C，MN 交 y 轴于 K.

因为 $NK=MK$，$\angle DNK=\angle BMK$，$\angle NKD=\angle MKB$，所以 △NDK≌△MBK（ASA），所以 $DN=BM=OC=2$，$DK=BK$.

在 Rt△KBM 中，$BM=2$，$\angle MBK=60°$，所以 $\angle BMK=30°$，所以 $DK=BK=\frac{1}{2}BM=1$，所以 $OD=5$.

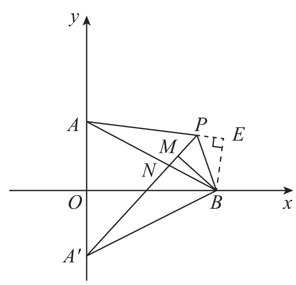
故 $N(-2,5)$.



答图 4-4

5.【答案】2.

【解析】如答图 4-5 所示，作 $BE\perp AP$ 交 AP 的延长线于点 E，AB 交 PA' 于点 N.



答图 4-5

因为 $OA=OA'$，$OB\perp AA'$，$BA=BA'$，所以 $\angle OBA=\angle OBA'$.

因为 $\angle APA' = 2\angle OBA'$，所以 $\angle APN = \angle ABA'$，$\angle EAB=\angle BA'M$.

因为 $BM\perp PA'$，$BE\perp AE$，所以 $\angle A'MB=\angle E=90°$，所以 $\triangle A'MB\cong\triangle AEB$(AAS)，故 $BE=BM$，$AE=A'M$，$PB=PB$，$\angle BMP=\angle E=90°$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle PBM\cong\mathrm{Rt}\triangle PBE$(HL)，所以 $PM=PE$，所以 $PA'-PA=PM+A'M-(AE-PE)=2PM$，

所以 $\dfrac{PA'-PA}{PM}=2$.

6.【答案】4.

【解析】如答图 4-6 所示，在 AB 上取一点 H，使 $BH=BE$，过点 C 作 $CG\perp AB$，交 BD 与 F'，过点 F' 作 $F'E'\perp BC$.

因为 BD 平分 $\angle ABC$，$CG\perp AB$，$F'E'\perp BC$，

所以 $GF'=F'E'$，

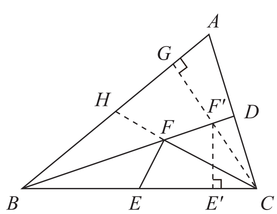
所以 $EF+FC=FH+FC\geqslant CG$，

当 F 与 F'，E 与 E' 重合时取得最小值.

因为 $S_{\triangle ABC}=8$，$AB=4$，

所以 $CG=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB}=\dfrac{2\times 8}{4}=4$，

所以 $EF+FC$ 的最小值为 4.



答图 4-6

7.【答案】$\alpha-\beta=90°$.

【解析】如答图 4-7 所示，作 M 关于 OB 的对称点 M'，N 关于 OA 的对称点 N'，连接 $M'N'$ 交 OA 于 Q，交 OB 于 P，则 $MP+PQ+QN$ 最小.

因为 $\angle 1=\angle O+\angle OPM$，

所以 $\angle OPM=\angle 1-\angle O=\angle 1-30°$.

因为 $\angle OPM=\angle OPM'$，$\angle OPM'=\angle QPN$，

所以 $\angle QPN=\angle PQO+30°$.

因为 $\angle 3=\angle O+\angle 2=30°+\angle 2$，

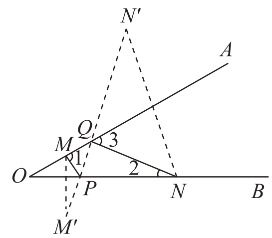
$\angle NQN'=\angle QPN+\angle 2=\angle 1-30°+\angle 2$，

$\angle NQN'=2\angle 3$，

所以 $\angle 1-30°+\angle 2=2(30°+\angle 2)$.

所以 $\angle 1-\angle 2=90°$，

即 $\alpha-\beta=90°$.



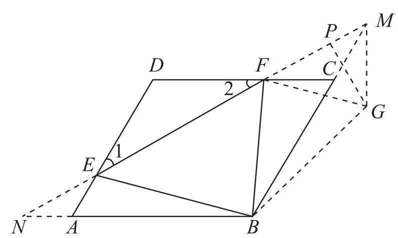
答图 4-7

8.【答案】12cm.

【解析】因为等腰三角形的周长为 30cm，所以若 6cm 是等腰三角形的腰长，则底边为 $30-6-6=18$cm，此时，不符合三角形的三边关系；若 6cm 是等腰三角形的底边，则腰长为 $\dfrac{1}{2}\times(30-6)=12$cm，符合三角形的三边关系.

9.【答案】$\sqrt{21}$.

【解析】如答图 4-8 所示，作 EF 的延长线，交 BC 于点 M，作 FE 的延长线，交 BA 于点 N.



答图 4-8

因为 $DE=DF$，所以 $\angle 1=\angle 2=30°$，所以 $\triangle NEA$ 和 $\triangle CFM$ 均为等腰三角形，所以 $EA=2$，$NE=2\sqrt{3}$，$FC=3$，$FM=3\sqrt{3}$.

将 $\triangle NEB$ 绕 B 旋转 $120°$ 到 $\triangle MGB$，所以 $\angle FBG=\angle A=\angle FMG=60°$，$BE=BG$.作 $GP\perp FM$，所以 $PM=\sqrt{3}$，$PG=3$.又 $FP=2\sqrt{3}$，所以 $FG=\sqrt{21}$.

因为 $BF=BF$，所以 $\triangle EFB\cong\triangle GFB$，所以 $EF=FG=\sqrt{21}$.

10.【答案】$(-8,4)$，$(0,0)$，$(-6,8)$，$(2,4)$，$(-5,5)$，$(-1,3)$.

【解析】如答图 4-9 所示，当 $AP\perp y$ 轴时，$AP=2$，AP 边上的高为 4，则此时 $\triangle BPM$ 的面积为 4.

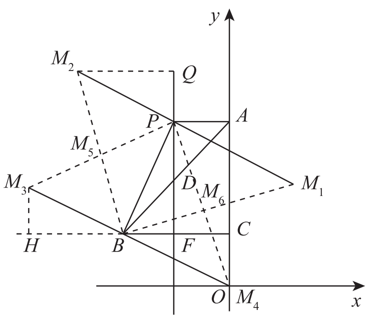
因为 $AP /\!/ x$ 轴，则点 P 坐标为 $(-2,6)$. 作 $M_2Q \perp PD$，因为 $\triangle BPM_2$ 是等腰直角三角形，所以 $\angle M_2PQ + \angle BPF = 90°$，且 $\angle M_2PQ + \angle QM_2P = 90°$，所以 $\angle BPF = \angle QM_2P$ 且 $M_2P = BP$，$\angle M_2QP = \angle BFP = 90°$，所以 $\triangle M_2PQ \cong \triangle PBF$(AAS)，所以 $PQ = BF$，$M_2Q = PF$，所以 $PQ = 2$，$M_2Q = 4$，所以 $M_2(-6,8)$.

由对称可知点 P 为 M_2M_1 中点，所以 M_1 坐标为 $(2,4)$.

同理作 $M_3H \perp BC$，可证 $\triangle BM_3H \cong \triangle PBF$，可得 $BH = PF = 4$，$M_3H = BF = 2$，所以 $M_3(-8,4)$. 由对称可得 M_4 坐标为 $(0,0)$.

当 PB 为斜边时，$M_5(-5,5)$，$M_6(-1,3)$ 成立.

综上可得符合条件的点 M 坐标为 $(-8,4)$，$(0,0)$，$(-6,8)$，$(2,4)$，$(-5,5)$，$(-1,3)$.

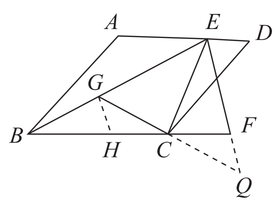


答图 4-9

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11.【答案】14.

【解析】如答图 4-10 所示，延长 EF、GC 交于点 Q，过点 G 作 $GH /\!/ EF$ 交 BF 于点 H.



答图 4-10

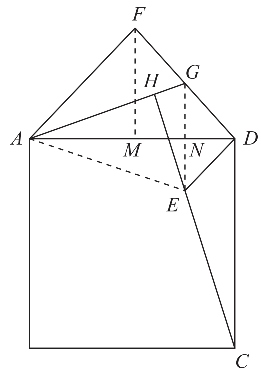
因为 $BF = BE$，所以 $\triangle BEF$ 为等腰三角形，

因为 $GH /\!/ EF$，所以 $\triangle BGH$ 为等腰三角形，所以 $BG = BH$.

因为 $EC \perp GC$，易证 $\triangle EGC \cong \triangle EQC$，$\triangle GCH \cong \triangle FCQ$，则可求得 $BG = BH = 14$.

12.【答案】$\frac{8}{5}\sqrt{10}$.

【解析】如答图 4-11 所示，过点 F 作 $FM \perp AD$，连接 GE、AE.



答图 4-11

因为点 E 是点 G 关于 AD 的对称点，所以 AD 垂直平分 GE，所以 $AE = AG$，$DE = DG$.

因为 $AD = AD$，所以 $\triangle DAG \cong \triangle DAE$(SSS)，所以 $\angle ADG = \angle ADE = 45°$，所以 $\angle CDE = 45°$，所以 $\triangle ADE \cong \triangle CDE$(SAS)，

所以 $\triangle DCE \cong \triangle DAE \cong \triangle DAG$，

所以 $\angle GAD = \angle ECD$，

所以 $\angle AHC = \angle CDA = 90°$.

在正方形 $ABCD$ 中，边长为 4，以 AD 为斜边向上作等腰 Rt$\triangle AFD$，则 $GN = ND = 1$，$AN = 3$，所以由勾股定理得 $AG = \sqrt{10}$.

因为 $\triangle DCE \cong \triangle DAG$，所以 $CE = AG = \sqrt{10}$.

在 $\triangle AGE$ 中，由等面积法可得 $EH = \frac{GE \cdot AN}{AG} = \frac{3}{5}\sqrt{10}$，所以 $CH = CE + EH = \frac{3}{5}\sqrt{10} + \sqrt{10} = \frac{8}{5}\sqrt{10}$.

13.【答案】(1)证明：如答图 4-12(a)所示，连接 AC、BD 交于 O.

因为 $AD /\!/ BC$，所以 $\angle DNM = \angle BMN$.

因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB = CD$.

因为 $\angle BOM = \angle DON$，所以 $\triangle DON \cong \triangle BOM$，所以 $ND = BM$.

同理可证 $\triangle AON \cong \triangle COM$.

所以 $AN = MC$，所以 $AN + ND = BM + MC$.

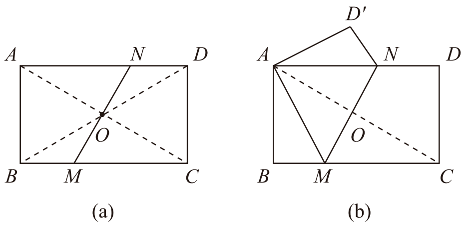
因为 $AB=CD$，所以 $S_{梯形ABMN}=S_{梯形CDNM}$.

(2) $MN\perp AC$.

(3) $\frac{1}{4}$.

【解析】(1) 略.

(2) 如答图 4-12(b)所示，因为当点 A 与点 C 重合时，$\triangle AMO\cong\triangle CMO$，所以 $MN\perp AC$，这是 MN 应满足的条件.



答图 4-12

(3) 如答图 4-12(b)所示，因为 $AB=CD=AD'$，$\angle BAM+\angle MAN=90^\circ$，$\angle MAN+\angle NAD'=90^\circ$，

所以 $\angle BAM=\angle NAD'$，

又 $\angle B=\angle D'=90^\circ$，所以 $\triangle ABM\cong\triangle AD'N$，

所以 $\triangle ABM$ 和 $\triangle AD'N$ 的面积相等，$MC=AM=AN$.

因为重叠部分是 $\triangle AMN$，不重叠部分是 $\triangle ABM$ 和 $\triangle AD'N$，所以 $\frac{S_{\triangle ABM}+S_{\triangle AD'N}}{S_{\triangle AMN}}=\frac{1}{2}$，

即 $\frac{2\times\frac{1}{2}AB\cdot BM}{\frac{1}{2}AB\cdot AN}=\frac{1}{2}$，故 $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{4}$.

14.【答案】210m.

【解析】如答图 4-13 所示，作 $AA'\perp l_1$，且 $AA'=8\text{m}$，作 $BB'\perp l_4$，且 $BB'=10\text{m}$，连接 $A'B'$ 交 l_2、l_3 于点 D、E，过点 D 作 $DC\perp l_1$，垂足为点 C；过点 E 作 $EF\perp l_4$，垂足为点 F，连接 AC、BF.

因为 $AA'=CD=8\text{m}$，$AA'\perp l_1$，$DC\perp l_1$，

所以 $AA'=CD$，$AA'\parallel CD$，

所以四边形 $AA'DC$ 是平行四边形，

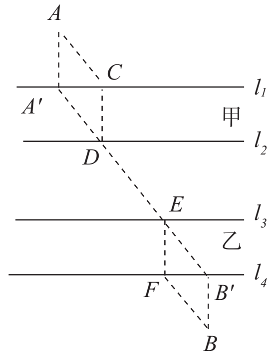
所以 $AC=A'D$.

同理可得，$BF=B'E$，

所以，$AC+CD+DE+EF+BF=AA'+A'B'+BB'=8+10+A'B'=18+\sqrt{120^2+(40+20+100)^2}$

$=18+200=218(\text{m})$.

即 A、B 之间的最短距离为 218m.



答图 4-13

15.【答案】(1) 证明：因为 $\triangle ABE$ 是等边三角形，

所以 $BA=BE$，$\angle ABE=60^\circ$.

因为 $\angle MBN=60^\circ$，所以 $\angle MBN-\angle ABN=\angle ABE-\angle ABN$，即 $\angle MBA=\angle NBE$.

又因为 $MB=NB$，所以 $\triangle AMB\cong\triangle ENB$(SAS).

(2) ① 当点 M 落在 BD 的中点时，A、M、C 三点共线，$AM+CM$ 的值最小.

② 当点 M 位于 BD 与 CE 的交点处时，$AM+BM+CM$ 的值最小.

(3) $\sqrt{2}$.

【解析】(1) 略. (2) ① 略.

② 如答图 4-14(a)所示，连接 MN，由(1)知，$\triangle AMB\cong\triangle ENB$，所以 $AM=EN$.

因为 $\angle MBN=60^\circ$，$MB=NB$，所以 $\triangle BMN$ 是等边三角形，所以 $BM=MN$.

所以 $AM+BM+CM=EN+MN+CM$.

根据“两点之间线段最短”可知，当 E、N、M、C 在同一条直线上时，$EN+MN+CM$ 取得最小值，最小值为 EC 的长度.

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle CBM$ 中，$\begin{cases}AB=CB,\\ \angle ABM=\angle CBM,\\ BM=BM,\end{cases}$

所以 $\triangle ABM\cong\triangle CBM$(SAS)，所以 $\angle BAM=\angle BCM$，所以 $\angle BCM=\angle BEN$.

因为 $EB=CB$，所以若连接 EC，则 $\angle BEC=\angle BCE$，

因为 $\angle BCM=\angle BCE$，$\angle BEN=\angle BEC$，所以

M、N 可以同时在直线 EC 上.

所以当点 M 位于 BD 与 CE 的交点处时，$AM+BM+CM$ 的值最小，即等于 EC 的长度.

(3) 如答图 4-14(b)所示，过点 E 作 $EF\perp BC$ 交 CB 的延长线于点 F，

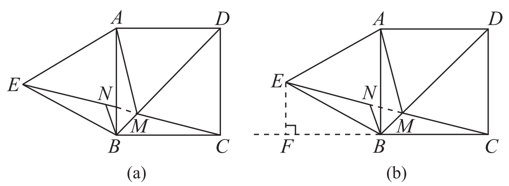
所以$\angle EBF=\angle ABF-\angle ABE=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

设正方形的边长为 x，则 $BF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，$EF=\dfrac{x}{2}$.

在 Rt$\triangle EFC$ 中，因为 $EF^2+FC^2=EC^2$，所以 $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+x\right)^2=(\sqrt{3}+1)^2$.

解得 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=-\sqrt{2}$(舍去负值).

所以正方形的边长为$\sqrt{2}$.



答图 4-14

第 5 讲　等腰三角形和等边三角形

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

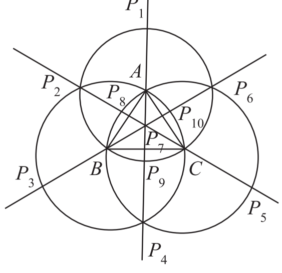
1.【答案】10.

【解析】点 P 的位置有两种情况：

(1) 点 P 在三角形内部时，点 P 是边 AB、BC、CA 的垂直平分线的交点，即三角形的外心.

(2) 点 P 在三角形外部时，分别以三角形各顶点为圆心，边长为半径，交垂直平分线的交点就是满足要求的点.每条垂直平分线上得 3 个交点，故共有 9 个.

综上，共有 10 个，如答图 5-1 所示.



答图 5-1

2.【答案】6.

【解析】因为在等边$\triangle ABC$ 中，中线 AD、BE 交于 F，所以 $AD\perp BC$，$BE\perp AC$，$\angle ABE=\angle CBE=\angle BAD=\angle CAD=30^\circ$.

因为 DE 为$\triangle ABC$ 中位线，所以 $AD\perp BC$，$DE\parallel AB$，所以$\angle BED=\angle ADE=30^\circ$，$\angle EDC=60^\circ$，

所以$\angle BAF=\angle FBA=30^\circ$，$\angle FDE=\angle FED=30^\circ$，$\angle EAD=\angle ADE=30^\circ$，$\angle DBE=\angle DEB=30^\circ$，

所以$\triangle FAB$、$\triangle FDE$、$\triangle ADE$、$\triangle BDE$ 是等腰三角形.

因为$\angle EDC=\angle C=60^\circ$，所以$\triangle ABC$、$\triangle DCE$ 是等边三角形，则图中等腰三角形共有 6 个.

3.【答案】6.

【解析】因为$\angle ACD=\angle BCE=60^\circ$，所以$\angle DCE=60^\circ$.

在$\triangle ACE$ 和$\triangle DCB$ 中，

$$\begin{cases}AC=DC,\\ \angle ACE=\angle DCB,\\ CE=CB,\end{cases}$$

所以$\triangle ACE\cong\triangle DCB$(SAS)，

所以$\angle BDC=\angle EAC$，$DB=AE$，故①正确.

因为$\angle CBD=\angle AEC$，且$\angle AOB=180^\circ-\angle OAB-\angle DBC$，所以$\angle AOB=180^\circ-\angle AEC-\angle OAB=120^\circ$，故③正确.

在$\triangle ACM$ 和$\triangle DCN$ 中，

$$\begin{cases}\angle BDC=EAC,\\ DC=CA,\\ \angle ACD=\angle DCN=60^\circ,\end{cases}$$

所以$\triangle ACM\cong\triangle DCN$(ASA)，

所以 $AM=DN$，故④正确.

所以$\angle AMC=\angle DNC$，故②正确.

那么，$CM=CN$，因为$\angle MCN=60^\circ$，所以$\triangle CMN$ 是等边三角形，故⑤正确.

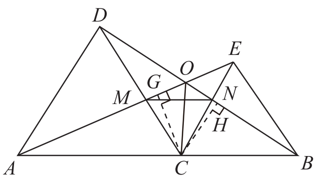
如答图 5-2 所示，过点 C 作 $GC\perp AE$ 于点 G，$CH\perp BD$于点 H.

因为$\angle EAC=\angle BDC$，$AC=DC$，$\angle AGC=\angle DHC=90^\circ$，所以$\triangle AGC\cong\triangle DHC$(AAS).

所以 $CG=CH$，$CG\perp AE$，$CH\perp BD$，

所以 OC 平分 $\angle MON$，故⑥正确.

故①②③④⑤⑥都正确.



答图 5-2

4.【答案】$\frac{3}{2}$.

【解析】如答图 5-3 所示，延长 FB 到点 M，使 $BM=DG$，连接 CM.

因为 $\triangle ABD$ 是等边三角形，所以 $AD=BD$，$\angle A=\angle ABD=60°$.

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle DFB$ 中，$\begin{cases}AD=DB,\\ \angle A=\angle BDF,\\ AE=DF,\end{cases}$

所以 $\triangle AED\cong\triangle DFB$（SAS），所以 $\angle ADE=\angle DBF$.

因为 $\angle CDG=\angle ADC-\angle ADE=120°-\angle ADE$，$\angle CBM=120°-\angle DBF$，所以 $\angle CBM=\angle CDG$.

因为 $\triangle DBC$ 是等边三角形，所以 $CD=CB$.

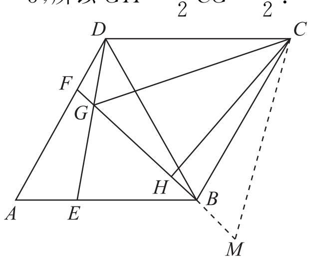
在 $\triangle CDG$ 和 $\triangle CBM$ 中，

$\begin{cases}DC=BC,\\ \angle CDG=\angle CBM,\\ DG=BM,\end{cases}$

所以 $\triangle CDG\cong\triangle CBM$（SAS），所以 $\angle DCG=\angle BCM$，$CG=CM$.

所以 $\angle GCM=\angle DCB=60°$，所以 $\triangle CGM$ 是等边三角形，所以 $CG=GM=BG+BM=BG+DG$.

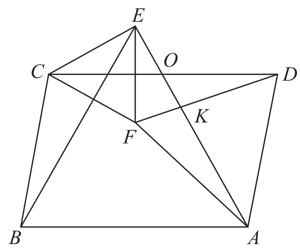
因为 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=9$，所以 $a+b=3$，所以 $CG=3$，所以 $GH=\frac{1}{2}CG=\frac{3}{2}$.



答图 5-3

5.【答案】①②③.

【解析】如答图 5-4 所示，在▱$ABCD$ 中，$\angle ADC=\angle ABC$，$AD=BC$，$CD=AB$.



答图 5-4

因为 $\triangle ABE$、$\triangle ADF$ 都是等边三角形，所以 $AD=DF$，$AB=EB$，$\angle ADF=\angle ABE=60°$，

所以 $DF=BC$，$CD=BE$，

所以 $\angle CDF=\angle ADC-60°$，$\angle EBC=\angle ABC-60°$，所以 $\angle CDF=\angle EBC$.

在 $\triangle CDF$ 和 $\triangle EBC$ 中，$\begin{cases}DF=BC,\\ \angle CDF=\angle EBC,\\ DC=BE,\end{cases}$

所以 $\triangle CDF\cong\triangle EBC$(SAS)，故①正确.

在▱$ABCD$ 中，设 AE 交 CD 于 O，AE 交 DF 于 K.

因为 $AB\parallel CD$，所以 $\angle DOA=\angle OAB=60°$，所以 $\angle DOA=\angle DFA$.

因为 $\angle OKD=\angle AKF$，所以 $\angle ODF=\angle OAF$，即 $\angle CDF=\angle EAF$，故③正确.

因为 $CD=AE$，$\angle CDF=\angle EAF$，$DF=AF$，

所以 $\triangle CDF\cong\triangle EAF$，所以 $EF=CF$.

因为 $\triangle CDF\cong\triangle EBC$，所以 $EC=CF$，所以 $EC=CF=EF$，所以 $\triangle CEF$ 是等边三角形，故②正确.

当 $EF\perp CD$ 时，因为 $\triangle ABE$ 是等边三角形，所以 $\angle AEF=30°$，因为 $\triangle ECF$ 是等边三角形，所以 $\angle AEC=90°$，当四边形 $ABCD$ 是正方形时，不成立，因为此时点 E 落在以 AC 为直径的圆上，而当四边形 $ABCD$ 是正方形时，点 E 在正方形 $ABCD$ 内部，$\angle AEC\neq 90°$，故④错误.

(另解：当 $EF\perp CD$ 时，因为 $\triangle ABE$ 是等边三角形，所以 $\angle ECO=\angle FCO=30°$，而 $\triangle ECF$ 可绕点 C 旋转，所以错误.)

综上所述，正确的结论有①②③.

6.【答案】7.

【解析】对于直线 $y=x+3$，当 $x=0$ 时，$y=3$；当 $y=0$ 时，$x=-3$.

所以直线 $y=x+3$ 与两个坐标轴的交点分别为 $A(-3,0)$，$B(0,3)$.

若以点 A 为圆心，以 AB 的长为半径画弧，则与 x 轴有两个交点，与 y 轴有一个交点(点 B 除外).

若以点 B 为圆心，以 AB 的长为半径画弧，则与 x 轴有一个交点(点 A 除外)，与 y 轴有两个交点.

所以以 AB 为腰的等腰△ABC 有 6 个.

若以 AB 为底，作 AB 的垂直平分线，与坐标轴交于原点 O.

综上所述，满足条件的点 C 最多有 7 个.

7.【答案】①②③④.

【解析】如答图 5-5(a)所示，连接 OB.

因为 $AB=AC$，$AD\perp BC$，所以 $BD=CD$，

所以 $OB=OC$，$\angle ABC=90^\circ-\angle BAD=30^\circ$，

因为 $OP=OC$，所以 $OB=OC=OP$，

所以 $\angle APO=\angle ABO$，$\angle DCO=\angle DBO$，

所以 $\angle APO+\angle DCO=\angle ABO+\angle DBO=\angle ABD=30^\circ$，故①正确.

因为 $\angle APC+\angle DCP+\angle PBC=180^\circ$，

所以 $\angle APC+\angle DCP=150^\circ$，

因为 $\angle APO+\angle DCO=30^\circ$，

所以 $\angle OPC+\angle OCP=120^\circ$，

所以 $\angle POC=180^\circ-(\angle OPC+\angle OCP)=60^\circ$，

因为 $OP=OC$，所以△OPC 是等边三角形，故②正确.

如答图 5-5(b)所示，在 AC 上截取 $AE=PA$.

因为 $\angle PAE=180^\circ-\angle BAC=60^\circ$，

所以△APE 是等边三角形，

所以 $\angle PEA=\angle APE=60^\circ$，$PE=PA$，

所以 $\angle APO+\angle OPE=60^\circ$，

因为 $\angle OPE+\angle CPE=\angle CPO=60^\circ$，

所以 $\angle APO=\angle CPE$，

因为 $OP=CP$，在△OPA 和△CPE 中，

$$\begin{cases}PA=PE,\\ \angle OPA=\angle CPE,\\ OP=CP,\end{cases}$$

所以△$OPA\cong$△CPE(SAS)，所以 $AO=EC$，所以 $AC=AE+EC=AP+AO$，故③正确.

如答图 5-5(c)所示，过点 C 作 $CH\perp AB$ 于点 H.

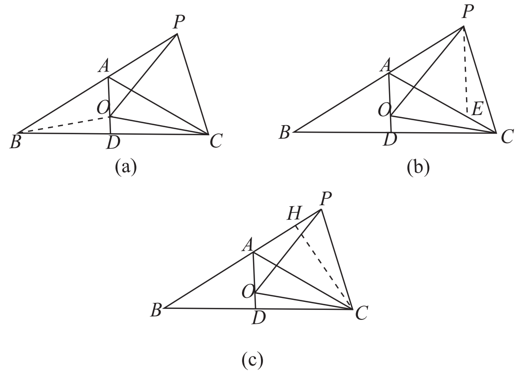
因为 $\angle PAC=\angle DAC=60^\circ$，$AD\perp BC$，所以 $CH=CD$，

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CH,$$

$$\begin{aligned}S_{四边形AOCP}&=S_{\triangle ACP}+S_{\triangle AOC}\\&=\frac{1}{2}CH\cdot AP+\frac{1}{2}CD\cdot AO\\&=\frac{1}{2}CH\cdot(AP+OA)\\&=\frac{1}{2}CH\cdot AC,\end{aligned}$$

所以 $S_{四边形AOCP}=S_{\triangle BCA}$，故④正确.

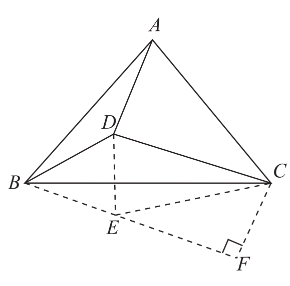
因此①②③④都正确.



答图 5-5

8.【答案】$9+\frac{25\sqrt{3}}{4}$.

【解析】如答图 5-6 所示，将△ABD 绕点 B 顺时针旋转 60° 得△BCE，再过点 C 作 $CF\perp BE$，交 BE 延长线于点 F.



答图 5-6

由旋转的性质知，

$BD=BE=3$，$\angle DBE=60^\circ$，$AD=CE=4$，

所以$\triangle BDE$是等边三角形,

所以$\angle BED=60^\circ$,$DE=DB=3$.

在$\triangle CDE$中,$DE=3$,$CE=4$,$CD=5$,

得出$DE^2+CE^2=DC^2$,所以$\angle DEC=90^\circ$.

所以$\angle BEC=60^\circ+90^\circ=150^\circ$,$\angle CEF=30^\circ$.

在$Rt\triangle CEF$中,$CE=4$,

所以$CF=2$,$EF=2\sqrt{3}$.

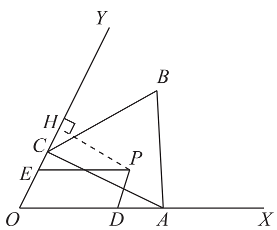
在$Rt\triangle CBF$中,由勾股定理得$BC^2=BF^2+CF^2$,

所以$BC^2=(3+2\sqrt{3})^2+2^2=25+12\sqrt{3}$,

所以$S_{等边\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}BC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(25+12\sqrt{3})=9+\frac{25\sqrt{3}}{4}$.

9.【答案】$2\leqslant a+2b\leqslant 5$.

【解析】如答图5-7所示,过点P作$PH\perp OY$交于点H.因为$PD\parallel OY$,$PE\parallel OX$,所以四边形$EODP$是平行四边形,$\angle HEP=\angle XOY=60^\circ$,所以$EP=OD=a$.在$Rt\triangle HEP$中,$\angle EPH=30^\circ$,所以$EH=\frac{1}{2}EP=\frac{1}{2}a$,所以$a+2b=2(\frac{a}{2}+b)=2(EH+EO)=2OH$.



答图 5-7

当点P在AC边上时,H与C重合,此时OH的最小值为$OC=\frac{OA}{2}=1$,即$a+2b$的最小值是2.

当点P在点B时,OH的最大值是$\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$,即$(a+2b)$的最大值是5,所以$2\leqslant a+2b\leqslant 5$.

10.【答案】$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5 a$.

【解析】如答图5-8(a)所示,连接AD、DF、DB.

因为六边形$ABCDEF$是正六边形,所以$\angle ABC=\angle BAF=\angle AFE$,$AB=AF$,$\angle E=\angle C=120^\circ$,$EF=DE=BC=CD$,所以$\angle EFD=\angle EDF=\angle CBD=\angle BDC=30^\circ$.

因为$\angle AFE=\angle ABC=120^\circ$,所以$\angle AFD=\angle ABD=90^\circ$.

在$Rt\triangle ABD$和$Rt\triangle AFD$中,$\begin{cases}AB=FA,\\AD=AD,\end{cases}$

所以$Rt\triangle ABD\cong Rt\triangle AFD$(HL),

所以$\angle BAD=\angle FAD=\frac{1}{2}\times 120^\circ=60^\circ$,

所以$\angle FAD+\angle AFE=60^\circ+120^\circ=180^\circ$,所以$AD\parallel EF$.

因为G、I分别为AF、DE中点,所以$GI\parallel EF\parallel AD$,所以$\angle FGI=\angle FAD=60^\circ$.

因为六边形$ABCDEF$是正六边形,$\triangle QKM$是等边三角形,所以$\angle EDM=60^\circ=\angle M$,所以$ED=EM$.

同理$AF=QF$,即$AF=QF=EF=EM$.

因为等边$\triangle QKM$的边长是a,所以第一个正六边形$ABCDEF$的边长是$\frac{1}{3}a$,即等边$\triangle QKM$的边长的$\frac{1}{3}$.

如答图5-8(b)所示,过F作$FZ\perp GI$于Z,过E作$EN\perp GI$于N,则$FZ\parallel EN$.

因为$EF\parallel GI$,所以四边形$FZNE$是平行四边形,所以$EF=ZN=\frac{1}{3}a$.

因为$GF=\frac{1}{2}AF=\frac{1}{6}a$,$\angle FGI=60^\circ$(已证),所以$\angle GFZ=30^\circ$,所以$GZ=\frac{1}{2}GF=\frac{1}{12}a$.

同理$IN=\frac{1}{12}a$,所以$GI=\frac{1}{12}a+\frac{1}{3}a+\frac{1}{12}a=\frac{1}{2}a$,即第二个等边三角形的边长是$\frac{1}{2}a$.

与上面求出的第一个正六边形的边长的方法类似,可求出第二个正六边形的边长是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}a=\frac{1}{6}a$.

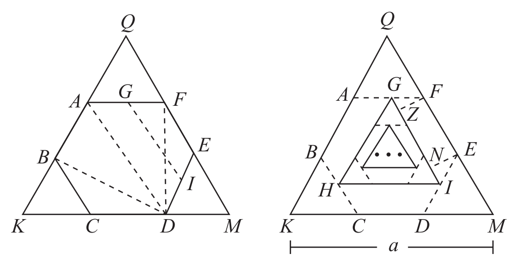
同理第三个等边三角形的边长是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a=\frac{1}{4}a$,

可求出第三个正六边形的边长是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}a$;

同理第四个等边三角形的边长是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a$，第四个正六边形的边长是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}a$；

第五个等边三角形的边长是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a$，第五个正六边形的边长是$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a$；

第六个等边三角形的边长是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a$，第六个正六边形的边长是$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a$，即第六个正六边形的边长是$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5a$.



(a)　(b)

答图 5-8

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11.【答案】80°或 110°.

【解析】因为在△ABC 中，$AC=BC$，$\angle ACB=100°$，所以$\angle A=\angle B=40°$.

因为△CDE 是等腰三角形，

① 当 $CD=DE$ 时，因为$\angle CDE=40°$，所以$\angle DCE=\angle DEC=70°$，所以$\angle ADC=\angle B+\angle DCE=110°$.

② 当 $DE=CE$ 时，因为$\angle CDE=40°$，所以$\angle DCE=\angle CDE=40°$，所以$\angle ADC=\angle DCE+\angle B=80°$.

③ 当 $EC=CD$ 时，$\angle BCD=180°-\angle CED-\angle CDE=180°-40°-40°=100°$，因为$\angle ACB=100°$，所以此时，点 D 与点 A 重合，不合题意.

综上，若△CDE 是等腰三角形，此时$\angle ADC$ 的度数为 80°或 110°.

12.【答案】证明：如答图 5-9 所示，过点 B 作 $BG\parallel AC$ 交 FP 的延长线于点 G，则$\angle C=\angle PBG$，$\angle G=\angle CFP=90°$，所以$\angle PBG=\angle DBC$.

四边形 $ABGF$ 是矩形，所以 $AF=BG$，

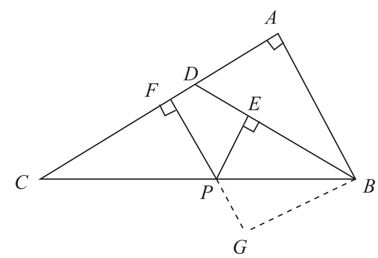
在△BPE 和△BPG 中，$\begin{cases}\angle PBG=\angle DBC,\\ \angle G=\angle BEP,\\ BP=BP,\end{cases}$

所以△$BPE\cong$△BPG(AAS)，

所以 $BG=BE$，所以 $AF=BE$.

在 Rt△PBE 中，$PE^2+BE^2=BP^2$，

即 $PE^2+AF^2=BP^2$.



答图 5-9

13.【答案】$2\sqrt{5}$.

【解析】如答图 5-10 所示，在 CD 外侧作等边△CDE，则$\angle ADE=90°$，$DE=DC$，$\angle DCE=60°$.

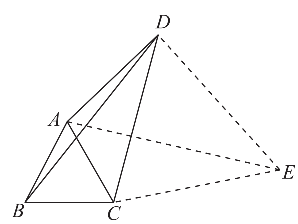
因为$\angle ACB=\angle DCE=60°$，所以$\angle ACE=\angle BCD$.

在△ACE 和△BCD 中，$\begin{cases}CE=CD,\\ \angle ACE=\angle BCD,\\ AC=BC,\end{cases}$

所以△$ACE\cong$△BCD(SAS)，所以 $AE=BD$.

因为在 Rt△ADE 中，$DE^2=AE^2-AD^2=BD^2-AD^2=20$，

所以 $DE=2\sqrt{5}$，所以 $CD=2\sqrt{5}$.



答图 5-10

14.【答案】(1) $2\sqrt{7}$.

(2) $DM=2DQ$.证明如下：

如图 5-11(a)所示，延长 CD 至 H，使 $DH=CD$，连接 NH，AH.

因为 $AD=CD$，所以 $AD=DH$，

因为 $CD\parallel AB$，所以 $\angle HDA=\angle BAD=60°$，

所以 $\triangle ADH$ 为等边三角形，所以 $AH=AD$.

所以 $\angle HAD=60°$.

因为 $\triangle AMN$ 为等边三角形，所以 $AM=AN$，$\angle NAM=60°$，

所以 $\angle HAN=\angle DAM$，$\triangle ANH\cong\triangle AMD$(SAS)，

所以 $HN=DM$，D 是 CH 的中点，Q 是 NC 的中点，$HN=2DQ$，所以 $DM=2DQ$.

(3) 2.

【解析】(1) 连接 BD，则 BD 平分 $\angle ABC$.

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AD\parallel BC$，所以 $\angle A+\angle ABC=180°$.

因为 $\angle A=60°$，所以 $\angle ABC=120°$，$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC=60°$，所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形，所以 $BD=AD=4$.

因为 E 是 AB 的中点，所以 $DE\perp AB$.

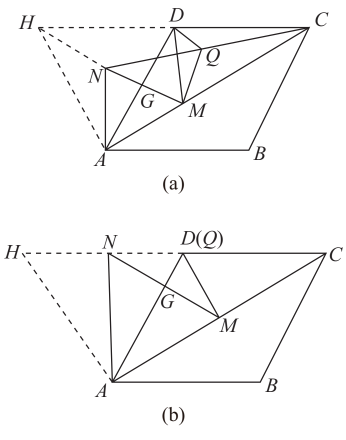
由勾股定理得，$DE=2\sqrt{3}$.

因为 $DC\parallel AB$，所以 $\angle EDC=\angle DEA=90°$.

在 Rt$\triangle DEC$ 中，$DC=4$，$EC=2\sqrt{7}$.

(2) 略.

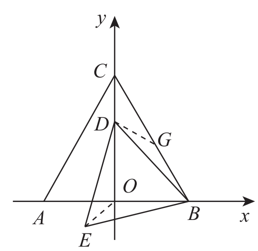
(3) 由(2)知，$HN=DM$，所以 $CN+HN$ 的最小值为点 C、H、N 在同一条线上时最小，此时，点 D 和点 Q 重合，即最小值为 CH.如答图 5-11(b)所示，由(2)知 $\triangle ADH$ 是等边三角形，所以 $\angle H=60°$.因为 AC 是菱形 $ABCD$ 的对角线，所以 $\angle ACD=30°$，$\angle CAH=90°$.在 Rt$\triangle AHC$ 中，$\angle HCD=30°$，$AC=\sqrt{3}$，所以 $\frac{AC}{HC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$HC=2$，所以 $DM+CN$ 的最小值为 2.



答图 5-11

15.【答案】$\frac{3}{2}$.

【解析】如答图 5-12 所示，取 BC 中点 G，连接 DG、OE.



答图 5-12

因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 $A(-3,0)$，点 $B(3,0)$，所以 $AO=BO=3$，$\angle BCO=30°$，$\angle ABC=60°$，所以 $BC=6=AB$.

因为点 G 是 BC 中点，所以 $CG=BG=3=OA=OB$.

因为将线段 BD 绕点 B 逆时针旋转 $60°$，所以 $\angle DBE=60°$，$BD=BE$，所以 $\angle ABC=\angle DBE$，所以 $\angle CBD=\angle ABE$，且 $BE=BD$，$BG=OB=3$，所以 $\triangle BGD\cong\triangle BOE$(SAS)，所以 $OE=DG$.

所以当 $DG\perp OC$ 时，DG 的值最小，即 OE 的值最小.

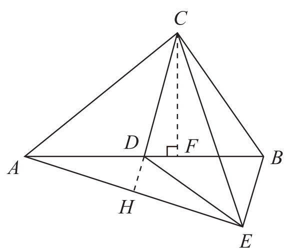
因为 $\angle BCO=30°$，$DG\perp OC$，所以 $DG=\frac{CG}{2}=\frac{3}{2}$，所以 OE 的最小值为 $\frac{3}{2}$.

第 6 讲　直角三角形

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1.【答案】$\frac{7}{5}$.

【解析】如答图 6-1 所示,延长 CD 交 AE 于点 H,作 $CF\perp AB$ 垂足为 F.



答图 6-1

因为在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$AC=4$,$BC=3$,所以 $AB=5$.

因为 D 为 AB 的中点,所以 $AD=BD=DC$.

因为$\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CF$,所以$\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times5\times CF$,解得 $CF=\frac{12}{5}$.

由翻折的性质可知 $AC=CE$,$AD=DE$,且 $CH\perp AE$,$AH=HE$.

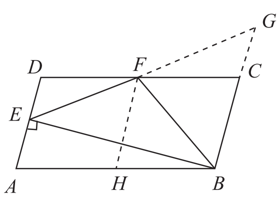
因为 $DC=DB$,又因为 $\frac{1}{2}BD\cdot CF=\frac{1}{2}DC\cdot HE$,所以 $HE=CF=\frac{12}{5}$,所以 $AE=\frac{24}{5}$.

因为 $AD=DE=DB$,所以$\triangle ABE$ 为直角三角形.

所以 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{5^2-\left(\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{7}{5}$.

2.【答案】4.

【解析】如答图 6-2 所示,延长 EF 交 BC 的延长线于G,取 AB 的中点 H,连接 FH.



答图 6-2

在平行四边形 $ABCD$ 中,$AD=BC$,$CD\parallel AB$,$\angle CFB=\angle FBH$,因为 $CD=2AD$,$DF=FC$,所以 $CF=CB$,所以$\angle CFB=\angle CBF$,所以$\angle ABC=2\angle ABF$,故①正确.

因为 $DE\parallel CG$,所以$\angle D=\angle FCG$,因为 $DF=FC$,$\angle DFE=\angle CFG$,所以$\triangle DFE\cong\triangle FCG$,所以 $FE=FG$,因为 $BE\perp AD$,所以$\angle AEB=\angle EBG=90^\circ$,所以 $BF=EF=FG$,故②正确.

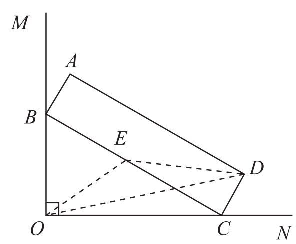
因为 $S_{\triangle DFE}=S_{\triangle CFG}$,所以 $S_{四边形DEBC}=S_{\triangle EBG}=2S_{\triangle BFE}$,故③正确.

因为 $AH=HB$,$DF=CF$,$AB=CD$,所以 $CF=BH$,因为 $CF\parallel BH$,所以四边形 $BCFH$ 是平行四边形.因为 $CF=BC$,所以四边形 $BCFH$ 是菱形,所以$\angle BFC=\angle BFH$.因为 $EF=FB$,$FH\parallel AD$,$BE\perp AD$,所以$\angle EFH=\angle BFH=\angle DEF$,所以$\angle EFC=3\angle DEF$,故④正确.

因此,正确结论的个数为 4 个.

3.【答案】25.

【解析】如答图 6-3 所示,取 BC 的中点 E,连接 OE、DE、OD.



答图 6-3

因为 $OD\leqslant OE+DE$,所以当 O、D、E 三点共线时,点 D 到点O 的距离最大.

此时,因为 $CD=5$,$BC=24$,所以

$OE=EC=\frac{1}{2}BC=12$,

$DE=\sqrt{EC^2+CD^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$.

所以 OD 的最大值为 $12+13=25$.

4.【答案】4.

【解析】设正方形边长为 $4a$,因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以有 $AB=BC=CD=AD=4a$,$\angle A=\angle ABC=\angle C=90^\circ$.

因为 $AE=3a$,$EB=a$,$CF=FB=2a$,所以

$DE=\sqrt{AD^2+AE^2}=\sqrt{(4a)^2+(3a)^2}=5a$,

$EF=\sqrt{EB^2+BF^2}=\sqrt{5}a$,

$DF=\sqrt{CD^2+CF^2}=2\sqrt{5}a$.

因为 $DF^2+FE^2=25a^2$,$DE^2=25a^2$,所以 $DF^2+EF^2=ED^2$,所以 $\angle DFE=90°$,故②正确.

因为 $DG=GE$,$DF=FH$,所以 $FG=\frac{1}{2}EH$,故①正确.

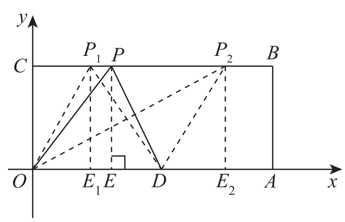
在 Rt$\triangle DFE$ 中,因为 $DG=GE$,所以 $FG=\frac{1}{2}DE$,故③正确.

因为 $DE=5a$,$EB+BC=a+4a=5a$,所以 $DE=EB+BC$,故④正确.

因此,正确结论的个数有 4 个.

5.【答案】(2,4)或(8,4).

【解析】因为 $A(10,0)$,$C(0,4)$,所以 $OA=10$,$OC=4$.因为点 D 是 OA 的中点,所以 $OD=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}\times10=5$.如答图 6-4 所示,过点 P 作 $PE\perp x$ 轴于点 E,则 $PE=OC=4$.因为 $P(3,4)$,所以 $OP=\sqrt{3^2+4^2}=5$,此时,$OP=OD$.



答图 6-4

当 $PD=OD$ 时,由勾股定理得,

$DE=\sqrt{PD^2-PE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

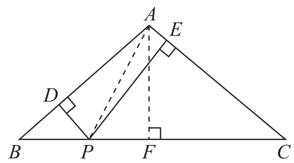
若点 E 在点 D 的左边,则 $OE_1=5-3=2$,此时,点 P 的坐标为(2,4).

若点 E 在点 D 的右边,则 $OE_2=5+3=8$,此时,点 P 的坐标为(8,4).

综上所述,其余的点 P 的坐标为(2,4)或(8,4).

6.【答案】4.8.

【解析】如答图 6-5 所示,过点 A 作 $AF\perp BC$ 于点 F,连接 AP.



答图 6-5

因为在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC=5$,$BC=8$,所以 $BF=4$.

所以在$\triangle ABF$ 中,$AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=3$,

故$\frac{1}{2}\times8\times3=\frac{1}{2}\times5\times PD+\frac{1}{2}\times5\times PE$,

即 $12=\frac{1}{2}\times5\times(PD+PE)$,

所以 $PD+PE=4.8$.

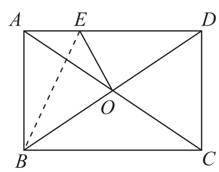
7.【答案】1.5.

【解析】如答图 6-6 所示,连接 BE.由题意可得,OE 为对角线 BD 的垂直平分线,所以 $BE=DE$,$S_{\triangle BOE}=S_{\triangle DOE}=1.25$,所以 $S_{\triangle BDE}=2S_{\triangle BOE}=2.5$.

所以$\frac{1}{2}DE\cdot AB=2.5$,

又因为 $AB=2$,所以 $DE=2.5$,所以 $BE=2.5$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中,由勾股定理得 $AE=\sqrt{BE^2-AB^2}=\sqrt{(2.5)^2-2^2}=1.5$.



答图 6-6

8.【答案】5.

【解析】如答图 6-7 所示,作等腰 Rt$\triangle CDP$,使$\angle PCD=90°$,$CP=CD$,连接 AD.

当点 D 在 AP 上时,AP 的值最大.

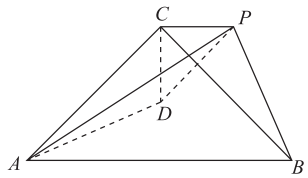
因为 $CP=\sqrt{2}$,所以 $PD=\sqrt{CD^2+CP^2}=2$.

因为$\angle ACD+\angle DCB=\angle BCP+\angle DCB=90°$,

所以$\angle ACD=\angle BCP$.

因为 $AC=BC$,$CD=CP$,所以$\triangle ACD\cong\triangle BCP$,

所以 $AD=BP=3$,所以 AP 的最大值为 $AD+PD=3+2=5$.



答图 6-7

9.【答案】90.

【解析】如答图 6-8 所示，过 D 作 BF 的垂线交 BF 于 N，连接 DI.

在图中可以得到 $S_2=S_{Rt\triangle DOI}$，$S_{\triangle BOC}=S_{\triangle MND}$，所以 $S_2+S_4=S_{Rt\triangle ABC}$.

可证明 Rt $\triangle AGE\cong$ Rt $\triangle ABC$，Rt $\triangle DNB\cong$ Rt $\triangle BHD$，

所以 $S_1+S_2+S_3+S_4$

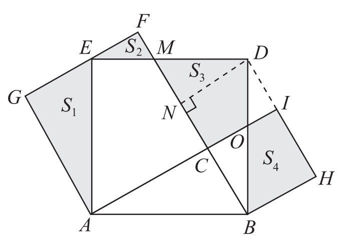
$=S_1+S_3+(S_2+S_4)$

$=S_{Rt\triangle ABC}+S_{Rt\triangle ABC}+S_{Rt\triangle ABC}$

$=3S_{Rt\triangle ABC}$

$=12\times5\div2\times3$

$=90$.



答图 6-8

10.【答案】$\frac{7}{5}$.

【解析】如答图 6-9 所示，连接 BE 交 AD 于 O，作 $AH\perp BC$ 于 H.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，因为 $AC=4$，$AB=3$，所以 $BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

因为 $CD=DB$，所以 $AD=DC=DB=\frac{5}{2}$.

因为 $\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}AB\cdot AC$，所以 $AH=\frac{12}{5}$.

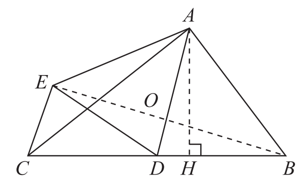
因为 $AE=AB$，所以点 A 在 BE 的垂直平分线上.

因为 $DE=DB=DC$，所以点 D 在 BE 的垂直平分线上，$\triangle BCE$ 是直角三角形，所以 AD 垂直平分线段 BE.

因为 $\frac{1}{2}AD\cdot BO=\frac{1}{2}BD\cdot AH$，所以 $OB=\frac{12}{5}$，

所以 $BE=2OB=\frac{24}{5}$.

在 Rt $\triangle BCE$ 中，$CE=\sqrt{BC^2-BE^2}=\sqrt{5^2-(\frac{24}{5})^2}=\frac{7}{5}$.

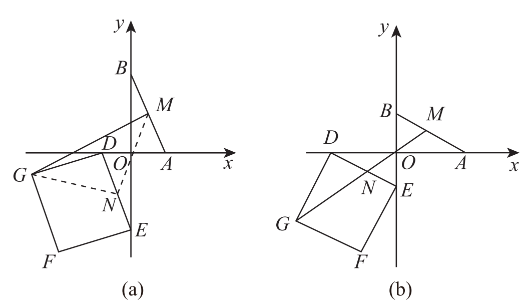


答图 6-9

二、解答题（每题 10 分，共 50 分）

11.【答案】$10+5\sqrt{5}$.

【解析】如答图 6-10(a)所示，取 DE 的中点 N，连接 ON、NG、OM. 因为 $\angle AOB=90°$，所以 $OM=\frac{1}{2}AB=5$. 同理 $ON=5$. 因为正方形 $DGFE$ 中，N 为 DE 中点，$DE=10$，所以 $NG=\sqrt{DN^2+DG^2}=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$. 在点 M 与 G 之间总有 $MG\leqslant MO+ON+NG$. 由于 $\angle DNG$ 的大小为定值，只要 $\angle DON=\frac{1}{2}\angle DNG$，且 M、N 关于点 O 中心对称时，M、O、N、G 四点共线，此时等号成立如答图 6-10(b)所示，所以线段 MG 取最大值 $10+5\sqrt{5}$.



答图 6-10

12.【答案】$\frac{56}{5}$.

【解析】因为四边形 $ABCD$ 是正方形,所以 $AB=BC=CD=AD$,$\angle BAD=\angle ADC=90°$.

因为 $CG=3DG$,所以假设 $DG=3a$,$CG=9a$,则 $AB=AD=BC=CD=12a$.

因为 $DG\parallel AB$,所以 $\frac{DH}{AH}=\frac{DG}{AB}=\frac{GH}{HB}=\frac{1}{4}$,所以 $DH=4a$,$GH=5a$,$BH=20a$.

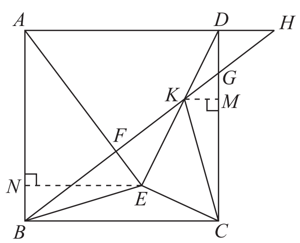
因为 $AE^2=BF\cdot BH$,$AE=AB$,所以 $AB^2=BF\cdot BH$,所以$\frac{AB}{BF}=\frac{BH}{AB}$.

因为$\angle ABF=\angle ABH$,所以$\triangle ABF\backsim\triangle HBA$,所以 $\angle AFB=\angle BAH=90°$,所以 $AF=\frac{AB\cdot AH}{BH}=\frac{48}{5}a$,$BF=\frac{36}{5}a$,所以 $FG=BH-BF-GH=\frac{39}{5}a$.

因为 $AE=AD$,所以$\angle ADE=\angle AED$.

因为$\angle ADE+\angle GDK=90°$,$\angle KEF+\angle EKF=90°$,$\angle EKF=\angle GKD$,所以 $\angle GDK=\angle GKD$,所以 $GD=GK=3a$.

如答图 6-11 所示,作 $KM\perp CD$ 于 M,$EN\perp AB$ 于 N.因为$\frac{KM}{DH}=\frac{KG}{GH}$,所以 $KM=\frac{12}{5}a$.



答图 6-11

因为$\triangle AFB\cong\triangle ANE$,所以 $EN=BF=\frac{36}{5}a$,所以

$$\begin{aligned}S_{四边形EFKC}&=S_{\triangle EFK}+S_{\triangle ECK}\\&=S_{\triangle EFK}+(S_{\triangle CDE}-S_{\triangle CDK})\\&=\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}a\times\frac{24}{5}a+(\frac{1}{2}\times 12a\times\frac{24}{5}a\\&\quad-\frac{1}{2}\times 12a\times\frac{12}{5}a)\\&=\frac{504}{25}a^2.\end{aligned}$$

因为 $FG=\frac{39}{5}a=\frac{13\sqrt{5}}{5}$,所以 $a=\frac{\sqrt{5}}{3}$,

所以 $S_{四边形EFKC}=\frac{56}{5}$.

13.【答案】$\frac{9}{2}\sqrt{2}$或$\frac{24}{7}\sqrt{7}$.

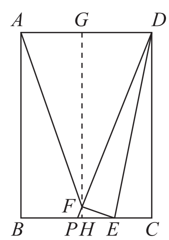
【解析】因为 $AD=BC=4$,$DF=CD=AB=6$,所以 $AD<DF$,故分两种情况讨论:

① 如答图 6-12 所示,当 $FA=FD$ 时,过 F 作 $GH\perp AD$,垂足为 G,交 BC 于 H,则 $HG\perp BC$,$DG=\frac{1}{2}AD=2$.

所以在 Rt$\triangle DFG$ 中,$GF=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$,所以 $FH=6-4\sqrt{2}$.

因为 $DG\parallel PH$,所以$\triangle DGF\backsim\triangle PHF$,所以$\frac{PF}{DF}=\frac{HF}{GF}$,即$\frac{PF}{6}=\frac{6-4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$,得 $PF=\frac{9}{2}\sqrt{2}-6$.

故 $DP=DF+PF=6+\frac{9}{2}\sqrt{2}-6=\frac{9}{2}\sqrt{2}$.



答图 6-12

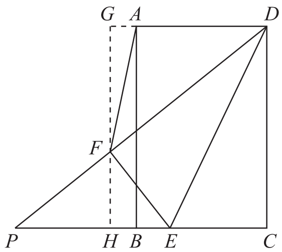
② 如答图 6-13 所示,当 $AF=AD=4$ 时,过 F 作 $FH\perp PC$ 于 H,交 DA 的延长线于 G,则在 Rt$\triangle AFG$中,$AG^2+FG^2=AF^2$,即 $AG^2+FG^2=16$.

在 Rt$\triangle DFG$ 中,$DG^2+FG^2=DF^2$,即$(AG+4)^2+FG^2=36$.

联立两式,解得 $FG=\frac{3}{2}\sqrt{7}$,所以$FH=6-\frac{3}{2}\sqrt{7}$.

因为$\angle G=\angle FHP=90°$,$\angle DFG=\angle PFH$,所以$\triangle DFG\backsim\triangle PFH$,所以$\frac{PF}{DF}=\frac{HF}{GF}$,即$\frac{PF}{6}=\frac{6-\frac{3}{2}\sqrt{7}}{\frac{3}{2}\sqrt{7}}$,解得 $PF=\frac{24}{7}\sqrt{7}-6$.

所以 $DP=DF+PF=6+\frac{24}{7}\sqrt{7}-6=\frac{24}{7}\sqrt{7}$.



答图 6-13

14.【答案】32 或 $20+4\sqrt{5}$ 或 $\frac{80}{3}$.

【解析】分情况讨论：

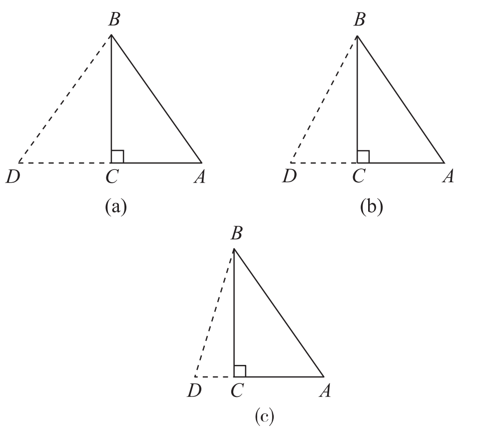
① 如答图 6-14(a)所示，延长 AC 到 D，使 $AB=BD$，连接 BD.

在 $Rt\triangle ACB$ 中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，则 $AB=BD=10$ 时，可求 $CD=CA=6$，得 $\triangle ABD$ 的周长为 $AB+AD+BD=10+10+6+6=32$.

② 如答图 6-14(b)所示，当延长 AC 到 D 使得 $AB=AD=10$ 时，可以得到，$CD=AD-AC=10-6=4$.

由勾股定理得 $BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$，所以$\triangle ABD$ 的周长为 $AB+AD+BD=10+10+4\sqrt{5}=20+4\sqrt{5}$.

③ 如答图 6-14(c)所示，当 $AB=10$ 为底时，设 $AD=BD=x$，则 $CD=x-6$.



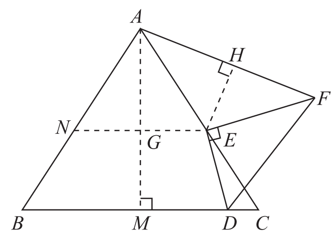
答图 6-14

由勾股定理得 $BD^2-CD^2=BC^2$，所以 $x^2-(x-6)^2=8^2$，解得 $x=\frac{25}{3}$.

所以$\triangle ABD$ 的周长为 $AB+AD+BD=10+\frac{25}{3}+\frac{25}{3}=\frac{80}{3}$.

15.【答案】$AF=\sqrt{3}+1$.

【解析】如答图 6-15 所示，作 $NE\parallel BC$ 交 AB 于 N，$AM\perp BC$ 于 M，且交 NE 于 G，使$\triangle AEG$ 沿 AC 折叠得到$\triangle AEH$，则$\triangle AEG\cong\triangle AEH$. 以 EH 边为直角边构建等腰直角三角形，截取 $HF=EH$，此时 AF 最短. 因为$\triangle ABC$ 是等边三角形，$AB=4$，E 是 AC 的中点，所以 $AB=BC=AC=4$，所以 $AE=\frac{1}{2}AC=2$，$\angle GAE=30°$，所以 $GE=\frac{1}{2}AE=1$，故 $AG=\sqrt{AE^2-GE^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，$HF=EH=GE=1$，则$AF=\sqrt{3}+1$.



答图 6-15

第 7 讲　整式的乘法和乘法公式

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

1.【答案】0.

【解析】由于 $a+b+c=0$，两边平方得 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=0$，因为 $a^2+b^2+c^2=1$，所以 $1+2ab+2bc+2ca=0$，所以 $ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$.

对 $ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$ 两边平方得 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c+2abc^2+2a^2bc=\frac{1}{4}$，即 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=\frac{1}{4}$，所以 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$. 因为 $a^2+b^2+c^2=1$，所以两边

平方得 $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2=1$，

所以 $a^4+b^4+c^4=1-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

故 $a^4+b^4+c^4+ab+bc+ca=0$.

2.【答案】255024.

【解析】由 $(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n\leqslant 2017$，解得 $n\leqslant 252\frac{1}{8}$，则在不超过 2017 的正整数中，所有的"和谐数"之和为 $3^2-1^2+5^2-3^2+\cdots+505^2-503^2=505^2-1^2=255024$.

3.【答案】3.

【解析】因为实数 x、y、z 满足 $x^2+y^2+z^2=3$，且 $2x^2+2y^2+2z^2-2(xy+yz+zx)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqslant 0$，所以 $6=2x^2+2y^2+2z^2\geqslant 2(xy+yz+zx)$，即 $xy+yz+zx\leqslant 3$，

所以当 $x=y=z=\pm 1$ 时，$xy+yz+zx$ 取最大值 3.

4.【答案】7.

【解析】注意到，

$2^{2018}+2^{2017}+2^{2016}+\cdots+2^2+2+1$

$=(2-1)\times(2^{2018}+2^{2017}+2^{2016}+\cdots+2^2+2+1)$

$=2^{2019}-1$，

因为 $2^1=2,2^2=4,2^3=8,2^4=16,2^5=32,\cdots$，所以值的末位数字以每 4 个数为一个循环组依次循环.因为 $2019\div 4=504\cdots\cdots 3$，所以末位数与循环组的第三个数相同，故答案为 $8-1=7$.

5.【答案】$\pm 12m$ 或 $\frac{4}{9}m^4$ 或 -9.

【解析】因为 $4m^2+9=(2m)^2+3^2=2\cdot\frac{2}{3}m^2\cdot 3+3^2$，所以当该二项式加上一个单项式后成为一个含 m 的完全平方式，则这个完全平方式是 $(2m)^2\pm 2\cdot 2m\cdot 3+3^2$ 或 $\left(\frac{2}{3}m^2\right)^2\pm 2\cdot\frac{2}{3}m^2\cdot 3+3^2$，

显然 -9 也满足题意，所以加上的一个单项式是 $\pm 12m$ 或 $\frac{4}{9}m^4$ 或 -9.

6.【答案】0.

【解析】由已知得 $(a+1)^2=5$，所以 $a^2+2a=4$，于是 $2a^3+7a^2-2a-12=2a^3+4a^2+3a^2-2a-12=3a^2+6a-12=0$.

7.【答案】3.

【解析】由已知 $3n+1$ 是一个完全平方数，所以我们就设 $3n+1=a^2$.

显然 a^2 不是 3 的倍数，于是 $a=3x\pm 1$，从而 $3n+1=a^2=9x^2\pm 6x+1$，化简得 $n=3x^2\pm 2x$，即 $n+1=2x^2+(x\pm 1)^2=x^2+x^2+(x\pm 1)^2$，即把 $n+1$ 写为了 x、x、$x\pm 1$ 这三个数的平方和，也就是说 $n+1$ 一定能表示 3 个完全平方数的和.

而当 $n=21$ 时，$n+1=22$ 不能表示成两个完全平方数的和，所以 k 的最小值是 3.

8.【答案】$\frac{\sqrt{17}}{2}$.

【解析】因为 $\frac{1}{a}-|a|=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{a}>0$，

$\left(\frac{1}{a}-|a|\right)^2=\frac{1}{4}$，即 $\frac{1}{a^2}-2+a^2=\frac{1}{4}$，

所以 $\frac{1}{a^2}+2+a^2=\frac{1}{4}+4$，即 $\left(\frac{1}{a}+|a|\right)^2=\frac{17}{4}$，

开方得 $\frac{1}{a}+|a|=\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$，而 $a>0$，故负值舍去.

9.【答案】28.

【解析】因为实数 x、y、z 满足 $x^2+y^2+z^2=4$，所以 $(2x-y)^2+(2y-z)^2+(2z-x)^2=5(x^2+y^2+z^2)-4(xy+yz+xz)=20-2(x+y+z)^2+2(x^2+y^2+z^2)=28-2(x+y+z)^2\leqslant 28$，

所以，当 $x+y+z=0$ 时，$(2x-y)^2+(2y-z)^2+(2z-x)^2$ 的最大值为 28.

10.【答案】4.

【解析】因为 x^3-2x^2+ax+b 除以 $(x-1)(x-2)$ 的余式为 $2x+1$，所以 $(x^3-2x^2+ax+b)-(2x+1)$ 含有因式 $(x-1)(x-2)$.

当 $x=1$ 时，$(x^3-2x^2+ax+b)-(2x+1)=(1-2+a+b)-(2+1)=a+b-4=0$，

故 $a+b=4$.

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11.【答案】$k=\pm 3$.

【解析】由于 x^2+6x+k^2 恰好是一个整式的平方，故 $x^2+6x+k^2=(x\pm3)^2$，因此，$k=\pm3$.

12.【答案】$\frac{7}{4}$.

【解析】因为 $a^2+b^2=c^2$，所以 $(a+b)^2-2ab=c^2$.

又因为 $a+b=4$，斜边 c 的长为 3，所以 $4^2-2ab=3^2$，则 $ab=\frac{7}{2}$，所以直角三角形的面积为 $\frac{1}{2}ab=\frac{7}{4}$.

13.【答案】-1.

【解析】由题目条件

$$a^2=\sqrt{2}b+3, \quad ①$$

$$b^2=\sqrt{2}a+3, \quad ②$$

由①－②得 $a^2-b^2=\sqrt{2}b-\sqrt{2}a$，

即 $(a+b)(a-b)=\sqrt{2}(b-a)$.

因为 $a\neq b$，所以 $a+b=-\sqrt{2}$.

由①＋②得 $a^2+b^2=\sqrt{2}(a+b)+6$，

即 $$(a+b)^2-2ab=\sqrt{2}(a+b)+6, \quad ③$$

把 $a+b=-\sqrt{2}$ 代入式③，

得 $(-\sqrt{2})^2-2ab=\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})+6$，

即 $2-2ab=-2+6$，解得 $ab=-1$.

14.【答案】(1) ①a^2+6a；②a 和 $a+6$.

(2) 9.

【解析】(1) ①裁剪正方形后剩余部分的面积为 $(a+3)^2-3^2=(a+3-3)(a+3+3)=a(a+6)=a^2+6a$.

② 拼成的长方形的宽是 $a+3-3=a$，所以长为 $a+6$，则拼成的长方形的边长分别为 a 和 $a+6$.

(2) 设 $AB=x$，则 $BC=x+3$，所以图 7-3(a) 中阴影部分的面积为

$S_1=x(x+3)-(a+3)^2-3^2+3(a+6-x-3)$，

图 7-3(b) 中阴影部分的面积为

$S_2=x(x+3)-(a+3)^2-3^2+3(a+6-x)$，

所以 $S_2-S_1=3(a+6-x)-3(a+6-x-3)=3\times3=9$.

15.【答案】$p=5$，$m=9$.

【解析】由题设得 $p(2p+1)=(m-4)(m+2)$，所以 $p\mid(m-4)(m+2)$. 由于 p 是质数，故 $p\mid(m-4)$，或 $p\mid(m+2)$.

① 若 $p\mid(m-4)$，令 $m-4=kp$，k 是正整数，于是，

$m+2>kp$，

$3p^2>p(2p+1)=(m-4)(m+2)>k^2p^2$，

故 $k^2<3$，从而 $k=1$. 所以 $\begin{cases}m-4=p,\\m+2=2p+1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=5,\\m=9.\end{cases}$

② 若 $p\mid(m+2)$，令 $m+2=kp$，k 是正整数.

当 $p>5$ 时，我们有，

$m-4=kp-6>kp-p=p(k-1)$，

$3p^2>p(2p+1)=(m-4)(m+2)>k(k-1)p^2$，

故 $k(k-1)<3$，从而 $k=1$ 或 2.

由于 $p(2p+1)=(m-4)(m+2)$ 是奇数，所以 $k\neq2$，从而 $k=1$.

于是 $\begin{cases}m-4=2p+1,\\m+2=p,\end{cases}$ 这不可能.

当 $p=5$ 时，$m^2-2m=63$，$m=9$；

当 $p=3$，$m^2-2m=29$，无正整数解；

当 $p=2$ 时，$m^2-2m=18$，无正整数解.

综上所述，所求质数 $p=5$，正整数 $m=9$.

第 8 讲　整式的除法

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

1.【答案】21.

【解析】由 $-1+a-b+8=0$ 和 $-8+4a-2b+8=0$，可得 $a=7$，$b=14$，因此 $a+b=21$.

2.【答案】1.

【解析】由条件得 $a=c^{-3}$，$b=c^2$，故 $abc=c^{-3}\cdot c^2\cdot c=1$.

3.【答案】$\frac{1}{8}$.

【解析】因为 $a+x^2=2010$，$b+x^2=2011$，$c+x^2=2012$，所以

$b-a=1$，$c-b=1$，$c-a=2$.

又 $abc=24$,所以

$$\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}+\frac{a}{bc}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$$
$$=\frac{c^2+b^2+a^2-bc-ac-ab}{abc}$$
$$=\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{2abc}$$
$$=\frac{1+1+4}{48}$$
$$=\frac{1}{8}.$$

4.【答案】$3x^3+8x^2y+7xy^2+2y^3$,$-4y^4$.

【解析】由于

$$9x^4+5x^2y^2-8y^4-8xy^3+18x^3y$$
$$=(9x^4-4x^2y^2)+(9x^2y^2-4y^4)-4y^4+2xy(9x^2-4y^2)$$
$$=x^2(9x^2-4y^2)+y^2(9x^2-4y^2)+2xy(9x^2-4y^2)-4y^4$$
$$=(x^2+2xy+y^2)(9x^2-4y^2)-4y^4$$
$$=(x+y)^2(3x-2y)(3x+2y)-4y^4,$$

故原式除以 $3x-2y$ 的商式为 $3x^3+8x^2y+7xy^2+2y^3$,余式为 $-4y^4$.

5.【答案】1010.

【解析】由于

$$x=1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots-2018^2+2019^2$$
$$=1+(-2^2+3^2)+(-4^2+5^2)+\cdots+(-2018^2+2019^2)$$
$$=1+(2+3)+(4+5)+\cdots+(2018+2019)$$
$$=\frac{(1+2019)\times2019}{2}$$
$$=1009\times2020+1010,$$

故以 2020 除 x,所得余数为 1010.

6.【答案】32.

【解析】令 $x=-1$,可得

$-a+b-c+d-e+f=(-2)^5=-32$,

即 $a-b+c-d+e-f=32$.

7.【答案】5.

【解析】因为 $x^3-x^2+x-2=0$,所以

原式$=(x^4-x^3+x^2-2x)+(3x^3-3x^2+3x-6)+5=5$.

8.【答案】-3.

【解析】由于 $x+y-2$ 是二元二次式 $x^2+axy+by^2-5x+y+6$ 的一个因式,考虑令 $x=y=1$,则 $x^2+axy+by^2-5x+y+6=0$,即 $1+a+b-5+1+6=0$,故 $a+b=-3$.

9.【答案】85.

【解析】设 $f(x)=x^3-6x^2+ax+b$,由于 $(x-1)(x-3)$ 能整除 $f(x)$,根据余数定理可知,

当 $x=1$ 时,$f(1)=0$,即 $1-6+a+b=0$;

当 $x=3$ 时,$f(3)=0$,即 $27-54+3a+b=0$.

由此得 $a=11$,$b=-6$,故 $a^2-b^2=85$.

10.【答案】$\frac{37}{2}$.

【解析】因为 $a^2+4a+1=0$,所以 $a^2=-4a-1$,于是

$$\frac{a^4+ma^2+1}{3a^3+ma^2+3a}=\frac{(-4a-1)^2+ma^2+1}{3a(-4a-1)+ma^2+3a}$$
$$=\frac{(16+m)a^2+8a+2}{(m-12)a^2}$$
$$=\frac{(16+m)(-4a-1)+8a+2}{(m-12)(-4a-1)}$$
$$=\frac{(16+m-2)(-4a-1)}{(m-12)(-4a-1)}$$
$$=\frac{14+m}{m-12}$$
$$=5,$$

所以 $14+m=5(m-12)$,解得 $m=\frac{37}{2}$.

二、填空题(每题 10 分,共 50 分)

11.【答案】757.

【解析】设 $a=m^4$,$b=m^5$,$c=n^2$,$d=n^3$,

由 $c-a=19$,得 $n^2-m^4=19$,

即 $(n+m^2)(n-m^2)=19$.

因为 19 是质数,$n+m^2$ 和 $n-m^2$ 是自然数,且 $n+m^2>n-m^2$,得 $\begin{cases}n+m^2=19,\\n-m^2=1,\end{cases}$ 解得 $n=10$,$m=3$.

所以 $d-b=10^3-3^5=757$.

12.【答案】$-\frac{7}{8}$.

【解析】由题意可得 $2x^2+3xy-2y^2-x+8y-6=2x^2+3xy-2y^2+(2m+n)x+(2n-m)y+mn$.

从而$\begin{cases}2m+n=-1,\\2n-m=8,\\mn=-6,\end{cases}$　解得$\begin{cases}m=-2,\\n=3.\end{cases}$

故$\dfrac{m^3+1}{n^2-1}=-\dfrac{7}{8}$.

13.【答案】(1) 12;(2) 14;(3) $c>a>b$.

【解析】(1) 由题意得 x^2+3x-4 是 x^3+ax^2+bx+c 的一个因式,所以 $x^2+3x-4=0$,即 $x=-4$,$x=1$ 是方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的解,

所以

$$\begin{cases}a+b+c=-1, & ①\\16a-4b+c=64, & ②\end{cases}$$

(①×4+②)÷5 得

$$4a+c=12. \quad ③$$

(2) 由③得　$a=3-\dfrac{c}{4}$,　④

代入①得　$b=-4-\dfrac{3}{4}c$,　⑤

所以 $2a-2b-c=2\left(3-\dfrac{c}{4}\right)-2\left(-4-\dfrac{3}{4}c\right)-c=14$.

(3) 因为 $c\geqslant a>1$,$a=3-\dfrac{c}{4}\leqslant c$,所以 $1<3-\dfrac{c}{4}\leqslant c$,解得$\dfrac{12}{5}\leqslant c<8$.

又因为 a、c 为大于 1 的正整数,

所以 $c=3$、4、5、6、7.

由于 $a=3-\dfrac{c}{4}$,也是正整数,

所以 $c=4$,$a=2$,$b=-4-\dfrac{3}{4}c=-4-3=-7$,

则 $c>a>b$.

14.【答案】-2.

【解析】因为 $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$,所以 $2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$ 能被$(x+2)(x-1)$整除.

设商是 A,则 $2x^4-3x^3+ax^2+7x+b=A(x+2)(x-1)$,于是 $x=-2$ 和 $x=1$ 时,右边都等于 0,所以左边也等于 0.

当 $x=-2$ 时,$2x^4-3x^3+ax^2+7x+b=32+24+4a-14+b=4a+b+42=0$,　①

当 $x=1$ 时,$2x^4-3x^3+ax^2+7x+b=2-3+a+7+b=a+b+6=0$,　②

由①-②,得 $3a+36=0$,所以 $a=-12$,所以 $b=-6-a=6$.

因此,$\dfrac{a}{b}=-\dfrac{12}{6}=-2$.

评注　利用综合除法也可以求解此题.

$$\begin{array}{r|llll}
 & 2x^2 & -5x+(a+9) & & \\
\hline
x^2+x-2 & 2x^4-3x^3 & +ax^2 & +7x+b & \\
 & 2x^4+2x^3 & -4x^2 & & \\
\hline
 & -5x^3+(a+4)x^2 & +7x+b & & \\
 & -5x^3-5x^2 & +10x & & \\
\hline
 & (a+9)x^2 & -3x+b & & \\
 & (a+9)x^2-(a+9)x-2(a+9) & & & \\
\hline
 & (-12-a)x+b+2(a+9) & & &
\end{array}$$

因为 $2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$ 能被 x^2+x-2 整除,所以

$$\begin{cases}-12-a=0,\\b+2(a+9)=0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}a=-12,\\b=6.\end{cases}$$

因此,$\dfrac{a}{b}=-\dfrac{12}{6}=-2$.

15.【答案】$f(x)=3x^2+x-2$.

【解析】设 $f(x)=ax^2+bx+c$,则由余式定理可得

$$\begin{cases}f(1)=a+b+c=2,\\f(3)=9a+3b+c=28,\\f(-1)=a-b+c=0.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=3,\\b=1,\\c=-2.\end{cases}$$

所以 $f(x)=3x^2+x-2$.

第 9 讲　因式分解

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1.【答案】$(x^2+x+1)(x^3-x+1)$.

【解析】原式 $=x^3(x^2+x+1)-(x^3-1)$

$=x^3(x^2+x+1)-(x-1)(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^3-x+1)$.

2.【答案】3.

【解析】因为 $a=2002x+2003$,$b=2002x+2004$,$c=2002x+2005$,所以 $a-b=-1$,$b-c=-1$,$a-c=-2$,进而我们有,

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}[(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ac+c^2)]$

$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$

$=\frac{1}{2}\times(1+1+4)$

$=3$.

3.【答案】-2017.

【解析】

$$原式=\frac{2016-\sqrt{2016^2-12\times2017}}{2\times3}\times\left(3\times\frac{2016-\sqrt{2016^2-12\times2017}}{2\times3}-2016\right)$$

$$=\frac{2016-\sqrt{2016^2-12\times2017}}{2\times3}\times\frac{2016-\sqrt{2016^2-12\times2017}-2016\times2}{2}$$

$$=-\frac{2016-\sqrt{2016^2-12\times2017}}{2\times3}\times\frac{2016+\sqrt{2016^2-12\times2017}}{2}$$

$$=-\frac{2016^2-2016^2+12\times2017}{12}$$

$=-2017$.

4.【答案】6.

【解析】因为 $20=4\times5=(-4)\times(-5)$

$=2\times10=(-2)\times(-10)$

$=1\times20=(-1)\times(-20)$,

所以 $k=4+5=9$,或 $k=-4-5=-9$,

或 $k=2+10=12$,或 $k=-2-10=-12$,

或 $k=1+20=21$,或 $k=-1-20=-21$.

因此,k 共有 6 个整数值.

5.【答案】$(y-1)^2(x-1)^2$.

【解析】令 $x+y=a$,$xy=b$,于是有,

$(xy-1)^2-(x+y-2xy)(2-x-y)$

$=(b-1)^2-(a-2b)(2-a)$

$=b^2-2b+1+a^2-2a-2ab+4b$

$=(a^2-2ab+b^2)+2b-2a+1$

$=(b-a)^2+2(b-a)+1$

$=(b-a+1)^2$.

故原式 $=(xy-x-y+1)^2$

$=[x(y-1)-(y-1)]^2$

$=[(y-1)(x-1)]^2$

$=(y-1)^2(x-1)^2$.

6.【答案】$(x+2)(x-3)$.

【解析】因为甲看错了 a 的值,分解的结果为 $(x+6)(x-1)=x^2+5x-6$,所以 $b=-6$.

因为乙看错了 b 的值,分解的结果为 $(x-2)(x+1)=x^2-x-2$,所以 $a=1$.

所以 $x^2-ax+b=x^2-x-6=(x+2)(x-3)$.

7.【答案】平行四边形.

【解析】已知等式整理得 $a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd=0$,即 $(a-c)^2+(b-d)^2=0$,

可得 $a-c=0$,$b-d=0$,

即 $a=c$,$b=d$,则四边形是平行四边形.

8.【答案】$13\times3^{2n+1}\times2^n$.

【解析】$N=5^2\times3^{2n+1}\times2^n-3^n\times6^{n+2}$

$=25\times3^{n+1}\times3^n\times2^n-3^n\times6^{n+2}$

$=25\times3\times3^n\times(3^n\times2^n)-3^n\times6^2\times6^n$

$=3^n\times6^n\times(75-36)=39\times3^n\times6^n$

$=13\times3^{2n+1}\times2^n$.

9.【答案】$(x-5y+3)(x-3y-1)$.

【解析】$x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3$

$=x^2-8xy+16y^2-y^2+2x-4y-3$

$=(x-4y)^2-y^2+2y-1-(2y-1)+2x-4y-3$

$=(x-4y)^2-(y-1)^2+2x-6y-2$

$=(x-5y+1)(x-3y-1)+2(x-3y-1)$

$=(x-5y+3)(x-3y-1)$.

10.【答案】0,2,4,6,8,10.

【解析】能利用平方差公式分解因式,说明漏掉的指数只能是偶数.

又因为 x 的指数为不大于 10 的非负整数,

所以该指数可能是 0、2、4、6、8、10 六个数.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11.【答案】6.

【解析】显然 $c>1$.由题设得 $b^3=c^4-a^2$.

若取$\begin{cases}c^2-a=b,\\c^2+a=b^2,\end{cases}$则 $c^2=\dfrac{b(b+1)}{2}$,

由大到小考察 b,使$\dfrac{b(b+1)}{2}$为完全平方数,易知当 $b=8$ 时,$c^2=36$,则 $c=6$,从而 $a=28$.下面说明 c 没有比 6 更小的正整数解,列表如下:

c	c^4	$b^3(b^3<c^4)$	c^4-b^3
2	16	1,8	17,8
3	81	1,8,27,64	80,73,54,17
4	256	1,8,27,64,125,216	255,248,229,192,131,40
5	625	1,8,27,64,125,216,343,512	624,617,598,561,500,409,282,113

显然,表中 c^4-b^3 的值均不是完全平方数,故 c 的最小值为 6.

12.【答案】$b=-3,c=-2$.

【解析】由已知,我们可以知道 m、n 是方程的两个整数根.不妨设 $m\leqslant n$,则由 $x^2+bx-c=(x-m)(x-n)=0$ 展开得 $m+n=-b=3-9a$,$mn=-c=2-8a$,消去 a,得 $9mn-8(m+n)=-6$.两边同时乘以 9,得 $81mn-72(m+n)=-54$,分解因式,得$(9m-8)(9n-8)=10$.

所以$\begin{cases}9m-8=1,\\9n-8=10,\end{cases}$或$\begin{cases}9m-8=2,\\9n-8=5,\end{cases}$

或$\begin{cases}9m-8=-10,\\9n-8=-1,\end{cases}$或$\begin{cases}9m-8=-5,\\9n-8=-2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m=1,\\n=2,\end{cases}$或$\begin{cases}m=\dfrac{10}{9},\\n=\dfrac{13}{9},\end{cases}$或$\begin{cases}m=-\dfrac{2}{9},\\n=\dfrac{7}{9},\end{cases}$

或$\begin{cases}m=\dfrac{1}{3},\\n=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

又 m、n 是整数,所以后面三组解舍去,故 $m=1$,$n=2$.

因此,$b=-(m+n)=-3$,$c=-mn=-2$.

13.【答案】9801 或 2025 或 3025.

【解析】设 $x=\overline{ab}$,$y=\overline{cd}$,则 $100x+y=(x+y)^2$,

故 $x^2+(2y-100)x+(y^2-y)=0$①有整数解.

由于 $10<x<100$,故 $y\neq0$.

因此 $\Delta_x=(2y-100)^2-4(y^2-y)=4(2500-99y)$是完全平方数,

可设 $t^2=2500-99y$,故 $99y=(50-t)(50+t)$,$50-t$ 和 $50+t$ 两数中必有 11 的倍数,只能有 $50-t=1$ 或$50-t=45$,

相应得到 $y=1$ 或 25,代入①解得$\begin{cases}x=98,\\y=1,\end{cases}$$\begin{cases}x=20,\\y=25,\end{cases}$

$\begin{cases}x=30,\\y=25.\end{cases}$

因此$\overline{abcd}=9801$ 或 2025 或 3025.

14.【答案】m 的值可能为 4、5、-5、-4.

【解析】因为 $4=2\times2=1\times4=(-1)\times(-4)=(-2)\times(-2)$,所以 m 的值可能为 $2+2=4$,$1+4=5$,$-1-4=-5$,$-2-2=-4$.

故 m 的值可能为 4、5、-5、-4.

15.【答案】$x=\pm\sqrt{39}$.

【解析】

$(\sqrt{x^2+42}+\sqrt{x^2+10})(\sqrt{x^2+42}-\sqrt{x^2+10})$

$=(\sqrt{x^2+42})^2-(\sqrt{x^2+10})^2$

$=(x^2+42)-(x^2+10)$

$=32$,

并且 $\sqrt{x^2+42}+\sqrt{x^2+10}=16$.

所以 $\sqrt{x^2+42}-\sqrt{x^2+10}=32\div16=2$.

所以$\begin{cases}\sqrt{x^2+42}=9,\\\sqrt{x^2+10}=7.\end{cases}$

又因为$(\sqrt{x^2+42})^2=x^2+42=9^2=81$.

所以 $x=\pm\sqrt{39}$.

经检验 $x=\pm\sqrt{39}$ 都是原方程的解.

第 10 讲 因式分解的应用

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1.【答案】5.

【解析】因为 $x^4+2x^3+(3+k)x^2+(2+k)x+2k=0$,所以

$(x^4+2x^3+x^2)+[(2+k)x^2+(2+k)x]+2k=0$,

$x^2(x^2+2x+1)+(2+k)(x^2+x)+2k=0$,

$(x^2+x)^2+(2+k)(x^2+x)+2k=0$,

$(x^2+x+2)(x^2+x+k)=0$,

因为 $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\neq 0$,

所以只能是 $x^2+x+k=0$,

因为方程 $x^4+2x^3+(3+k)x^2+(2+k)x+2k=0$ 所有实根的乘积为 -2,所以 $k=-2$,即原方程实根的解等价于 $x^2+x-2=0$,故两实根是 -2 和 1,从而所有实根的平方和等于 5.

2.【答案】$-\frac{7}{8}$.

【解析】

$(x+2y+m)(2x-y+n)$

$=2x^2+3xy-2y^2+(2m+n)x+(2n-m)y+mn$

$=2x^2+3xy-2y^2-x+8y-6$

所以 $2m+n=-1, 2n-m=8, mn=-6$,

解得 $m=-2, n=3$,

所以$\frac{m^3+1}{n^2-1}=\frac{-8+1}{9-1}=-\frac{7}{8}$.

3.【答案】3.

【解析】由题意得$(a^2+b^2)^2=5+a^2b^2$,又 $ab=2$,所以 $a^2+b^2=\sqrt{5+2^2}=3$.

4.【答案】$-\frac{1}{11}, -\frac{5}{7}$.

【解析】联立$\begin{cases}3a+2b=5-c,\\2a+b=1+3c,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=7c-3,\\b=7-11c.\end{cases}$

因为 a、b、c 都是非负数,所以$\begin{cases}7c-3\geqslant 0,\\7-11c\geqslant 0,\\c\geqslant 0,\end{cases}$解得 $\frac{3}{7}\leqslant c\leqslant\frac{7}{11}$.

所以 $S=3a+b-7c=3\times(7c-3)+(7-11c)-7c=3c-2$,

当 $c=\frac{7}{11}$时,S 的最大值为 $3\times\frac{7}{11}-2=-\frac{1}{11}$;

当 $c=\frac{3}{7}$时,S 的最小值等于 $3\times\frac{3}{7}-2=-\frac{5}{7}$.

故 S 的最大值为$-\frac{1}{11}$,最小值为$-\frac{5}{7}$.

5.【答案】25.

【解析】解法 1:因为 $x^2-2x-5=0$,所以 $x^2=2x+5$,所以

$d=x^4-2x^3+x^2-12x-5$

$=(2x+5)^2-2x(2x+5)+x^2-12x-5$

$=4x^2+20x+25-4x^2-10x+x^2-12x-5$

$=x^2-2x-5+25$

$=25$.

解法 2:因为 $x^2-2x-5=0$,所以 $x^2-2x=5$,

所以 $d=x^4-2x^3+x^2-12x-5$

$=x^2(x^2-2x+1)-12x-5$

$=6x^2-12x-5$

$=6(x^2-2x)-5$

$=6\times 5-5$

$=25$.

6.【答案】0.

【解析】由已知得$\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)(x+y+z)=x+y+z$,

即$\frac{x^2}{y+z}+x+\frac{y^2}{z+x}+y+\frac{z^2}{x+y}+z=x+y+z$,

所以$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$.

7.【答案】12.

【解析】因为 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc)$,

所以 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]$,

而 $a=\frac{3}{8}x-20, b=\frac{3}{8}x-18, c=\frac{3}{8}x-16$,

故 $a-b=-2, a-c=-4, b-c=-2$，

所以，原式 $=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2]=\frac{1}{2}\times(4+16+4)=12$.

8.【答案】26，28.

【解析】注意到，

$3^{48}-1$

$=(3^{24}-1)\times(3^{24}+1)$

$=(3^{12}-1)\times(3^{12}+1)\times(3^{24}+1)$

$=(3^{6}-1)\times(3^{6}+1)\times(3^{12}+1)\times(3^{24}+1)$

$=(3^{3}-1)\times(3^{3}+1)\times(3^{6}+1)\times(3^{12}+1)\times(3^{24}+1)$

$=26\times28\times(3^{6}+1)\times(3^{12}+1)\times(3^{24}+1)$.

可检验，$3^{48}-1$ 能被大于 20 且小于 30 的两位整数整除的是 26、28.

9.【答案】±6.

【解析】由题意得 $x^2-mxy+9y^2=(x\pm3y)^2$，所以 $x^2-mxy+9y^2=x^2\pm6xy+9y^2$，故 $-m=\pm6$，从而 $m=\pm6$.

10.【答案】101030 或 103010 或 301010.

【解析】$4x^3-xy^2=x(4x^2-y^2)=x(2x+y)(2x-y)$，

当 $x=10, y=10$ 时，$x=10, 2x+y=30, 2x-y=10$.

故用"因式分解"法产生的密码是 101030 或 103010 或 301010.

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11.【答案】(1) 证明：对任意一个完全平方数 m，设 $m=n^2$(n 为正整数).

因为 $|n-n|=0$，所以 $n\times n$ 是 m 的最佳分解，所以对任意一个完全平方数 m，总有 $F(m)=\frac{n}{n}=1$.

(2) $\frac{5}{7}$.

【解析】(1) 略.

(2) 设交换 t 的个位上的数与十位上的数得到的新数为 t'，则 $t'=10y+x$.

因为 t 为"吉祥数"，所以 $t'-t=(10y+x)-(10x+y)=9(y-x)=18$，进而得到 $y=x+2$.

又因为 $1\leqslant x\leqslant y\leqslant9$，$x$、$y$ 为自然数，所以"吉祥数"有 13、24、35、46、57、68、79.

所以 $F(13)=\frac{1}{13}, F(24)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}, F(35)=\frac{5}{7}$，

$F(46)=\frac{2}{23}, F(57)=\frac{3}{19}, F(68)=\frac{4}{17}$，

$F(79)=\frac{1}{79}$，

而 $\frac{5}{7}>\frac{2}{3}>\frac{4}{17}>\frac{3}{19}>\frac{2}{23}>\frac{1}{13}>\frac{1}{79}$，所以所有"吉祥数"中，$F(t)$ 的最大值是 $\frac{5}{7}$.

12.【答案】-4.

【解析】依题意，有 $m^2-n^2=n-m$. 又因 $m\neq n$，所以 $m+n+1=0$，即 $m=-n-1$.

将其代入 $n^2=m+4$ 可得 $n^2=-n-1+4$，即 $n^2+n=3$.

再将 $m=-n-1$ 代入所求式子，得 $m^3-2mn+n^3=(-n-1)^3-2n(-n-1)+n^3=-n^2-n-1=-4$.

13.【答案】$\left(-\frac{3}{5},0\right)$.

【解析】由 $m^3-n^3+mn^2-nm^2=2m^2+2n^2$ 可知 $(m^2+n^2)(m-n-2)=0$，进而可知 $EF=2$.

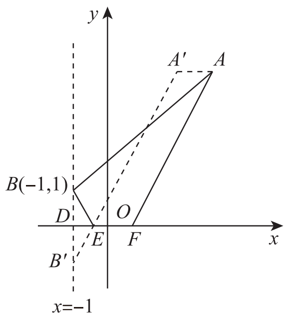
如答图 10-1所示，过点 A 作 x 轴的平行线，并且在这条平行线上截取线段 AA'，使 $AA'=2$，作点 B 关于 x 轴的对称点 B'，连接 $A'B'$，交 x 轴于点 E，在 x 轴上截取线段 $EF=2$，则此时四边形 $ABEF$ 的周长最小.

因为 $A(3,4)$，所以 $A'(1,4)$. 因为 $B(-1,1)$，所以 $B'(-1,-1)$.

设直线 $A'B'$ 的解析式为 $y=kx+b$，则 $\begin{cases}k+b=4,\\-k+b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{5}{2},\\b=\frac{3}{2},\end{cases}$ 所以直线 $A'B'$ 的解析式为 $y=\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$.

当 $y=0$ 时，$\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$，解得 $x=-\frac{3}{5}$.

所以点 E 的坐标为 $\left(-\frac{3}{5},0\right)$.



答图 10-1

14.【答案】(1) $S_1=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}ab$，

$S_2=ab-\frac{1}{2}b^2$；(2) 8；(3) $1<\frac{b}{a}<2$.

【解析】(1) $S_1=a^2+b^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b(a+b)=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}ab$，

$S_2=a(a+b)-b^2-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}(a-b)(a+b)=ab-\frac{1}{2}b^2$.

(2) 因为 $a+b=5$，$ab=3$，所以

$$S_1=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}ab$$
$$=\frac{1}{2}(a+b)^2-\frac{3}{2}ab$$
$$=\frac{25}{2}-\frac{9}{2}$$
$$=8.$$

(3) 因为 $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}ab<ab-\frac{1}{2}b^2$，

所以 $\frac{1}{2}a^2+b^2-\frac{3}{2}ab<0$.

所以 $a^2+2b^2-3ab<0$，

进而 $(a-2b)(a-b)<0$.

又 $a>b$，所以 $a-2b<0$.

故 $a<2b$，从而 $1<\frac{a}{b}<2$.

15.【答案】24.

【解析】因为 a、b 是方程 $x^2-x-3=0$ 的两个根，所以 $a^2-a-3=0$，$b^2-b-3=0$，即 $a^2=a+3$，$b^2=b+3$.从而我们有，

$$2a^3+b^2+3a^2-11a-b+6$$
$$=2a(a+3)+b+3+3(a+3)-11a-b+6$$
$$=2a^2-2a+18$$
$$=2(a+3)-2a+18$$
$$=24.$$

第 11 讲　非负数

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

1.【答案】16.

【解析】因为 $5x^2-4xy+4y^2+12x+25$

$$=x^2-4xy+4y^2+4x^2+12x+25$$
$$=(x-2y)^2+4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+16\geqslant 16,$$

所以多项式 $5x^2-4xy+4y^2+12x+25$ 的最小值为 16.

2.【答案】$a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 4$.

【解析】因为 b 是实数，并且由 $b^2-ab+\frac{1}{2}a+2=0$，可得 $\left(b-\frac{1}{2}a\right)^2-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a+2=0$，

所以 $a^2-2a-8=4\left(b-\frac{1}{2}a\right)^2\geqslant 0$，

故 $(a-4)(a+2)\geqslant 0$，解得 $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 4$.

3.【答案】0.

【解析】不妨设 $x\geqslant y>0$，则 $\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{y}$，所以 $\frac{3}{7}\leqslant\frac{2}{y}$，解得 $y\leqslant 4$.

又显然 $y\geqslant 3$，即 $3\leqslant y\leqslant 4$.经验证 $y=3$，$y=4$ 均不符合条件.所以，可以知道符合条件的解的组数为 0 组.

4.【答案】8.

【解析】因为 $a+b+c=6$，所以 a、b、c 的平均数是 2，方差 $S^2=\frac{1}{3}[(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2]=\frac{1}{3}[a^2+b^2+c^2-12]$，

又因为 a、b、c 均为非负数，且 $a>0$，所以 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\geqslant$

$a^2+b^2+c^2$,

所以 $a^2+b^2+c^2\leqslant 6^2=36$,

所以方差 S^2 的最大值为 $\frac{1}{3}\times(36-12)=8$($a=6,b=c=0$ 时取等号).

5.【答案】1.

【解析】由于 $a^2+b^2=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(a-b)^2]$

$$\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2=2,$$

当且仅当 $a=b=1$ 时,a^2+b^2 的最小值是 2,$\frac{a^2+b^2}{a+b}$的最小值是 1.

评注　本题还可以用"变量代换"的方法.设 $a=1+t,b=1-t$.则

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{(1+t)^2+(1-t)^2}{2}=t^2+1\geqslant 1.$$

当且仅当 $t=0,a=b=1$ 时,$\frac{a^2+b^2}{a+b}$的最小值是 1.

6.【答案】6.

【解析】显然 6 个数$\left\{a,b,ab,\frac{1}{ab},\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right\}$符合条件.下面否定个数为 3、4、5 的情形.

(1) 设 3 个数$\{a,b,ab\}$符合条件,则 $a=b\cdot ab=ab^2,b^2=1,b=1$,矛盾.这说明,3 个数的情形不存在.

(2) 设 4 个数$\{a,b,ab,c\}$符合条件.

① 若 $b=a\cdot ab$,则 $a^2=1,a=1$,矛盾;

② 若 $b=a\cdot c$,则 $c=\frac{b}{a}$,4 个数为$\left\{a,b,ab,\frac{b}{a}\right\}$,则 $a=b\cdot ab$ 或$a=b\cdot\frac{b}{a}$或$a=ab\cdot\frac{b}{a}$,即 $b=1$(矛盾)或 $a=b$(矛盾)或 $a=b^2$.由 $a=b^2$ 可得 4 个数为$\left\{b^2,b,b^3,\frac{1}{b}\right\}$,则$\frac{1}{b}=b^2\cdot b$ 或$\frac{1}{b}=b^2\cdot b^3$ 或$\frac{1}{b}=b\cdot b^3$,均得 $b=1$,矛盾;

③ 若 $b=ab\cdot c$,则 $c=\frac{1}{a}$,4 个数为$\left\{a,b,ab,\frac{1}{a}\right\}$,则 $a=b\cdot ab$ 或 $a=b\cdot\frac{1}{a}$或 $a=ab\cdot\frac{1}{a}$,即 $b=1$(矛盾)或 $b=a^2$ 或 $a=b$(矛盾).

由 $b=a^2$ 可得从而 4 个数为$\left\{a,a^2,a^3,\frac{1}{a}\right\}$,则$\frac{1}{a}=a\cdot a^2$ 或$\frac{1}{a}=a\cdot a^3$ 或$\frac{1}{a}=a^2\cdot a^3$,均得 $a=1$,矛盾.

这说明,4 个数的情形不存在.

(3) 设 5 个数$\{a,b,ab,c,d\}$符合条件.仿前述 4 个数的情形可推出矛盾.

7.【答案】13.

【解析】因为不等式 $a^2+b^2+c^2+43\leqslant ab+9b+8c$,所以 $a^2-ab+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2-9b+27+c^2-8c+16\leqslant 0$,

所以$\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+3\left(\frac{1}{2}b-3\right)^2+(c-4)^2\leqslant 0$,

故 $a=\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}b=3,c=4$,即 $a=3,b=6,c=4$.

因此,$a+b+c=3+6+4=13$.

8.【答案】3.

【解析】由 $a^2(b^2+1)+b(b+2a)=40$,得

$$a^2b^2+(a+b)^2=40, \quad ①$$

由 $a(b+1)+b=8$,得

$$ab+(a+b)=8, \quad ②$$

由①和②得 $a^2b^2+(a+b)^2=a^2b^2+(8-ab)^2=40$,整理得$(ab-4)^2=4$,解得 $ab=2$ 或 $ab=6$,

当 $ab=6$ 时,$a^2+b^2=40-a^2\cdot b^2-2ab=-8$,两数平方的和为负数不成立,所以 $ab=2$.

因为 $2+(a+b)=8$,解得 $a+b=6$,

所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{6}{2}=3$.

9.【答案】2.

【解析】因为 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+14=0$,

所以,$x^2-2x+1+y^2+4y+4+z^2-6z+9=0$,

即$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=0$,

所以 $x-1=0,y+2=0,z-3=0$,

即 $x=1,y=-2,z=3$,故 $x+y+z=2$.

10.【答案】1.

【解析】解不等式组$\begin{cases}\frac{x-1}{2}<\frac{x+1}{3},\\ 5x-2\geqslant x+a,\end{cases}$得$\frac{a+2}{4}\leqslant x$

<5.

因为该不等式组只有4个整数解,所以$0<\frac{a+2}{4}\leqslant 1$,解得$-2<a\leqslant 2$.

解关于y的分式方程$\frac{y+a}{y-1}+\frac{2a}{1-y}=2$,得$y=2-a$.

因为当$y=1$,即$a=1$时,该分式方程无解,所以$a\neq 1$.

因为该方程的解为非负数,所以$2-a\geqslant 0$,则$a\leqslant 2$.

综上可知,$-2<a\leqslant 2$且$a\neq 1$,故符合条件的所有整数a为-1、0、2,它们的和为1.

二、解答题(每题10分,共50分)

11.【答案】(1)证明:由$2y=x^2-1$知$2(x+y+1)=2x+2y+2=2x+x^2-1+2=(x+1)^2$,所以原命题成立.

(2)$x=6$,$y=3$.

(3)$2\sqrt{2}-2$.

【解析】(1)略.

(2)因为$x(x-1)+xy+y=51$,

所以$y=\frac{51+x-x^2}{x+1}=\frac{49}{x+1}-(x-2)$.

因为$x+1\neq 0$,所以$x+1$为49的约数,

从而,$x+1=49$或$x+1=7$或$x+1=1$,

则$x=48$,$y=-45$(舍去);或$x=6$,$y=3$;或$x=0$,$y=51$(舍去).

综上所述,正整数解为$x=6$,$y=3$.

(3)因为$xy=1$,所以$y=\frac{1}{x}$,

故$S=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2y}=1-\frac{1}{x+\frac{2}{x}+3}$.

设$N=x+\frac{2}{x}+3$,

因为$\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2\geqslant 0$,

所以$x-2\sqrt{x\times\frac{2}{x}}+\frac{2}{x}\geqslant 0$,

所以$x+\frac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{2}$,

所以$N=\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{2}{x}}\right)^2+2\sqrt{2}+3\geqslant 2\sqrt{2}+3$,

当$\sqrt{x}-\sqrt{\frac{2}{x}}=0$时,即$x=\sqrt{2}$,$N$有最小值$3+2\sqrt{2}$,

所以$0<\frac{1}{N}\leqslant\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$,所以$S=1-\frac{1}{N}\geqslant 2\sqrt{2}-2$.

所以当$x=\sqrt{2}$,$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$时,S取得最小值$2\sqrt{2}-2$.

12.【答案】$\frac{36}{11}$.

【解析】由$14(a^2+b^2+c^2)=(a+2b+3c)^2$,可得$13a^2+10b^2+5c^2-4ab-6ac-12bc=0$,

配方得$(3a-c)^2+(2a-b)^2+(3b-2c)^2=0$,

所以,$3a-c=0$,$2a-b=0$,$3b-2c=0$,

即$c=3a$,$b=2a$.

代入所求代数式可得,

$$\frac{a^2+2b^2+3c^2}{ab+ac+bc}=\frac{a^2+8a^2+27a^2}{2a^2+3a^2+6a^2}=\frac{36}{11}.$$

评注 事实上,在配方时还可采用下面的方法.

由$14(a^2+b^2+c^2)=(a+2b+3c)^2$,可得,

$13a^2+10b^2+5c^2-4ab-6ac-12bc=0$,

配方得,

$$5\left[c^2-2\cdot\frac{3a+6b}{5}\cdot c+\left(\frac{3a+6b}{5}\right)^2\right]-\frac{(3a+6b)^2}{5}+13a^2+10b^2-4ab=0,$$

即$5\left(c-\frac{3a+6b}{5}\right)^2+\frac{56}{5}a^2+\frac{14}{5}b^2-\frac{56}{5}ab=0$,

所以$5\left(c-\frac{3a+6b}{5}\right)^2+\frac{14}{5}(2a-b)^2=0$,

所以$c-\frac{3a+6b}{5}=0$,$2a-b=0$,

解得$b=2a$,$c=3a$.

代入所求代数式可得,

$$\frac{a^2+2b^2+3c^2}{ab+ac+bc}=\frac{a^2+8a^2+27a^2}{2a^2+3a^2+6a^2}=\frac{36}{11}.$$

13.【答案】1297.

【解析】依题意,设$b+c=(n-1)^2$,则$a+c=n^2$,$a+b=(n+1)^2$,n为正整数,且$n>1$.

所以$2(a+b+c)=(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=3n^2+2$,可见$n$为偶数,且$a+b+c=\frac{3n^2+2}{2}$,

所以 $a=\frac{n^2+4n}{2}$,$b=\frac{n^2+2}{2}$,$c=\frac{n^2-4n}{2}$.

可见,$n\geqslant6$,且当 n 增大时,$a^2+b^2+c^2$ 的值也随之增大.

又 $n=6$ 时,$a=30$,$b=19$,$c=6$ 符合要求.

所以 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值为$30^2+19^2+6^2=1297$.

14.【答案】0.

【解析】因为$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\geqslant0$,所以 $2|ab|\leqslant a^2+b^2=1$,所以有$-\frac{1}{2}\leqslant ab\leqslant\frac{1}{2}$.

令 $y=a^4+ab+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2+ab=-2a^2b^2+ab+1=-2\left(ab-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$,当$-\frac{1}{2}\leqslant ab\leqslant\frac{1}{4}$时,$y$ 随 ab 的增大而增大,当 $\frac{1}{4}\leqslant ab\leqslant\frac{1}{2}$时,$y$ 随 ab 的增大而减小.

故当 $ab=-\frac{1}{2}$时,a^4+ab+b^4 的最小值为$-2\times\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}=-2\times\frac{9}{16}+\frac{9}{8}=0$,即 a^4+ab+b^4 的最小值为 0,当且仅当 $|a|=|b|$时,$ab=-\frac{1}{2}$,此时 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$,或 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15.【答案】3300m.

【解析】乙队最后一天完成 $240\times\frac{18}{24}=180$(m),丙队最后一天完成 $180\times\frac{8}{24}=60$(m).设甲队 a 天完成,过 b 天后的 18 时乙队完成,自乙队完成的当天零时起,再过 c 天后的 8 时丙队完成,则根据题意得,

$300a=240(a+b)+180=180(a+b+c)+60$,

即 $5a=4(a+b)+3=3(a+b+c)+1$,

整理可得$\begin{cases}a=4b+3,\\a+b=3c-2,\\5b+3=3c-2,\end{cases}$ 所以 $b=\frac{3}{5}c-1$.

因为 b 是正整数,所以

$c=5,10,15,\cdots$.

若 $c=5$,则 $b=2$,$a=11$.

当 $c>5$ 时,$300a\geqslant3600$,矛盾.

因此,这段马路的长为 $300\times11=3300$(m).

第 12 讲 分式的运算

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1.【答案】$\sqrt{5}$.

【解析】原式$=\frac{(a+b)^2-a^2b^2}{a+b+ab}+ab$

$$=\frac{(a+b+ab)(a+b-ab)}{a+b+ab}+ab$$

$$=a+b-ab+ab$$

$$=a+b=\sqrt{5}.$$

2.【答案】$b<a<c$.

【解析】因为$\frac{c}{a+b}<\frac{a}{b+c}<\frac{b}{c+a}$,

所以$\frac{c}{a+b}+1<\frac{a}{b+c}+1<\frac{b}{c+a}+1$,

即$\frac{a+b+c}{a+b}<\frac{a+b+c}{b+c}<\frac{a+b+c}{c+a}$.

又 a、b、c 都是负数,所以 $a+b<b+c<c+a$,

所以 $b<a<c$.

3.【答案】0.

【解析】

原式$=\frac{(x-y)(y+z)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}+\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}+\frac{(y-z)(x+y)(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}+\frac{(z-x)(x+y)(y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$$=\frac{2z(x-y)}{(y+z)(z+x)}-\frac{2z(x-y)}{(y+z)(z+x)}$$

$$=0.$$

4.【答案】0.

【解析】因为 $a+b+c=0$,即 $c=-(a+b)$,$a=-(b+c)$,$b=-(a+c)$,所以,

原式 $=\frac{1}{a^2+b^2-(a+b)^2}+\frac{1}{b^2+c^2-(b+c)^2}+$

$\frac{1}{c^2+a^2-(c+a)^2}=-\frac{1}{2ab}-\frac{1}{2bc}-\frac{1}{2ac}=-\frac{c+a+b}{2abc}=0$.

5.【答案】11.

【解析】因为 $m+p+q=18$,且 $\frac{1}{m+p}+\frac{1}{p+q}+\frac{1}{m+q}=\frac{7}{9}$,所以

$$\frac{m}{p+q}+\frac{p}{m+q}+\frac{q}{m+p}$$
$$=\frac{m+p+q}{p+q}+\frac{m+p+q}{m+q}+\frac{m+p+q}{m+p}-3$$
$$=(m+p+q)\left(\frac{1}{m+p}+\frac{1}{p+q}+\frac{1}{m+q}\right)-3$$
$$=18\times\frac{7}{9}-3=11.$$

6.【答案】$a,\frac{a}{a-1}$.

【解析】方程 $x+\frac{1}{x-1}=a+\frac{1}{a-1}$ 可以写成 $x-1+\frac{1}{x-1}=a-1+\frac{1}{a-1}$ 的形式.

因为方程 $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$ 的两根分别为 a 和 $\frac{1}{a}$,

所以方程 $x+\frac{1}{x-1}=a+\frac{1}{a-1}$ 的两根关系式为 $x-1=a-1$,$x-1=\frac{1}{a-1}$,即方程的根为 $x=a$,$x=\frac{a}{a-1}$,所以方程 $x+\frac{1}{x-1}=a+\frac{1}{a-1}$ 的根是 a 和 $\frac{a}{a-1}$.

7.【答案】$-\frac{1}{2}$.

【解析】因为 $\begin{cases}a+2b+3c=0,\\2a+3b+4c=0,\end{cases}$

所以 $a+b+c=0$,即 $(a+b+c)^2=0$,

展开得 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=0$,

所以 $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ac)$,

原式 $=\frac{ab+bc+ca}{-2(ab+bc+ca)}=-\frac{1}{2}$.

8.【答案】$\frac{33}{2}$.

【解析】因为 $abc=-1$,$a+b+c=4$,

所以 $a^2-3a-1=a^2-3a+abc=a(bc+a-3)=a(bc-b-c+1)=a(b-1)(c-1)$,

所以 $\frac{a}{a^2-3a-1}=\frac{1}{(b-1)(c-1)}$,

同理可得 $\frac{b}{b^2-3b-1}=\frac{1}{(a-1)(c-1)}$,

$\frac{c}{c^2-3c-1}=\frac{1}{(a-1)(b-1)}$,

又 $\frac{a}{a^2-3a-1}+\frac{b}{b^2-3b-1}+\frac{c}{c^2-3c-1}=\frac{4}{9}$,

所以 $\frac{1}{(b-1)(c-1)}+\frac{1}{(a-1)(c-1)}+\frac{1}{(a-1)(b-1)}=\frac{4}{9}$,

即 $\frac{4}{9}(a-1)(b-1)(c-1)=(a-1)+(b-1)+(c-1)$,

整理得 $\frac{4}{9}(abc-ab-ac-bc+a+b+c-1)=a+b+c-3$,

将 $abc=-1$,$a+b+c=4$,代入得 $ab+bc+ac=-\frac{1}{4}$,则

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=\frac{33}{2}$.

9.【答案】$\frac{mnk+1}{(m+1)(n-1)(k-1)}S$.

【解析】如答图 12-1 所示,连接 BB'、$C'C$.

则 $S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle A'B'B}+S_{\triangle A'BC'}+S_{\triangle BB'C'}$,

因为 $BA':A'C=m$,$CB':AB'=n$,$AC':BC'=k$,

所以 $B'A:AC=1:(n-1)$,$BA':A'C=m:1$,$C'B:BA=1:(k-1)$,

所以 $\frac{S_{\triangle C'BA'}}{S_{\triangle C'BC}}=\frac{m}{m+1}$,

那么 $S_{\triangle C'BA'}=\frac{m}{m+1}S_{\triangle C'BC}$,

同理,$S_{\triangle C'BC}=\frac{1}{k-1}S_{\triangle ABC}$,

所以

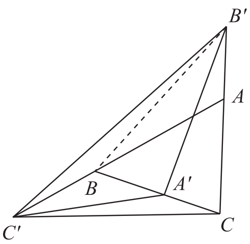
$$S_{\triangle C'BA'}=\frac{m}{m+1}\times\frac{1}{k-1}S_{\triangle ABC},\qquad ①$$

同理,

$$S_{\triangle B'C'B}=\frac{1}{k-1}S_{\triangle B'BA}=\frac{1}{k-1}\times\frac{1}{n-1}S_{\triangle ABC}\text{，②}$$

$$S_{\triangle B'BA'}=\frac{m}{m+1}S_{\triangle B'BC}=\frac{m}{m+1}\times\frac{n}{n-1}S_{\triangle ABC}\text{，③}$$

①＋②＋③得 $S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle C'BA'}+S_{\triangle B'C'B}+S_{\triangle B'BA'}=\frac{mnk+1}{(m+1)(n-1)(k-1)}S$.



答图 12-1

10.【答案】42.

【解析】a、b、c、n 是互不相等的正整数，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{n}$ 也是整数，所以要使得 n 尽量大，则 a、b、c 的值应尽量小.

所以若 $a=2,b=3,c=4$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$，故此种情况不符合题意；

若 $a=2,b=3,c=5$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{31}{30}$，故此种情况不符合题意；

若 $a=2,b=3,c=6$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$，故此种情况不符合题意；

若 $a=2,b=3,c=7$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{41}{42}$，此时 $n=42$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{n}$ 也是整数，符合题意.

故 n 的最大值为 42.

评注 本题考查了分式的加法运算，明确分母越小，分式的值越大，从而最后剩下的凑整分数的分母越大，采用赋值与分类讨论是解答本题的关键.

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11.【答案】$\frac{1}{12}$.

【解析】由已知可得 $a^2-6a+9+|b-1|=0$，即 $(a-3)^2+|b-1|=0$，所以 $a=3,b=1$，

所以原式 $=\left(\frac{4}{9-1}+\frac{3+1}{3-9}\right)\div\frac{9+3-2}{9+6}+\frac{1}{3}$

$$=-\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.$$

12.【答案】$\frac{x^{2^{n+1}}+2^{n+1}(1-x)-1}{(1-x)(1-x^{2^{n+1}})}$.

【解析】原式 $=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}-\frac{1}{1-x}$

$$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}-\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{2^n}{1-x^{2^n}}+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}-\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}-\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{x^{2^{n+1}}+2^{n+1}(1-x)-1}{(1-x)(1-x^{2^{n+1}})}.$$

13.【答案】$\frac{\sqrt{3}}{4}$.

【解析】因为 $\frac{1+a^2}{2a^2}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a^2}\right)$，

同理可得，$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{b^2}\right)$，$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{c^2}\right)$，

所以 $1+\frac{1}{a^2}-\frac{2}{b}+1+\frac{1}{b^2}-\frac{2}{c}+1+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{a}$

$$=\left(1-\frac{1}{a}\right)^2+\left(1-\frac{1}{b}\right)^2+\left(1-\frac{1}{c}\right)^2=0,$$

所以 $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=1$，即 $a=b=c=1$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

14.【答案】120.

【解析】由 $\frac{ab}{a+b}=4$ 得 $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{4}$，所以

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}, \qquad ①$$

同理得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{5}, \qquad ②$$

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{6}, \qquad ③$$

将式①②③相加得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{37}{120}, \qquad ④$$

④－①得 $\frac{1}{c}=\frac{7}{120}$，所以 $c=\frac{120}{7}$，

④－②得 $\frac{1}{b}=\frac{13}{120}$，所以 $b=\frac{120}{13}$，

④－③得 $\frac{1}{a}=\frac{17}{120}$，所以 $a=\frac{120}{17}$，

所以 $17a+13b-7c=120+120-120=120$.

故 $17a+13b-7c$ 的值为 120.

15.【答案】2.

【解析】设 $\frac{a^2b^2}{a^2y^2+b^2x^2}=\frac{b^2c^2}{b^2z^2+c^2y^2}=\frac{c^2d^2}{c^2w^2+d^2z^2}=\frac{abcd}{xyzw}=\frac{1}{k}$，则 $\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2b^2}=\frac{b^2z^2+c^2y^2}{b^2c^2}=\frac{c^2w^2+d^2z^2}{c^2d^2}=\frac{xyzw}{abcd}=k$，

整理得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{w^2}{d^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{xyzw}{abcd}=k$，

所以 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}$，$\frac{y^2}{b^2}=\frac{w^2}{d^2}$，$\frac{xyzw}{abcd}=k$，

设 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}=k_1$，$\frac{y^2}{b^2}=\frac{w^2}{d^2}=k_2$，

由 $\frac{xyzw}{abcd}=k$ 可得 $k=\sqrt{k_1^2\cdot k_2^2}$，

由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2b^2}$ 得 $k_1+k_2=k$，

所以原式 $=2\times\frac{1}{k_1}+2\times\frac{1}{k_2}=\frac{2(k_1+k_2)}{k_1k_2}=2$.

第 13 讲　分式方程

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

1.【答案】$a>-1$，且 $a\neq3$.

【解析】方程去分母，得

$(x+1)(x-1)-x(x+2)=a$，

解得 $x=-\frac{a+1}{2}$.

因为关于 x 的方程 $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x}{x-1}=\frac{a}{x^2+x-2}$ 的根为负数，所以 $-\frac{a+1}{2}<0$，$-\frac{a+1}{2}\neq-2$，即 $a>-1$，且 $a\neq3$.

2.【答案】-3.

【解析】原式 $=\frac{1}{3}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+8}+\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+11})=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{1}{24}$，

化简得 $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+11}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{8}$，即 $\frac{1}{x+11}=\frac{1}{8}$，解得 $x=-3$.

检验：当 $x=-3$ 时，$(x-1)(x+2)(x+5)(x+8)(x+11)\neq0$，所以原分式方程的解为 $x=-3$.

3.【答案】-8.

【解析】

$$\begin{cases}1-3(y-7)\geqslant-2, & ①\\ \frac{a+y}{2}\leqslant y-3, & ②\end{cases}$$

由①得 $y\leqslant8$，由②得 $y\geqslant a+6$，

因为关于 y 的不等式组 $\begin{cases}1-3(y-7)\geqslant-2,\\ \frac{a+y}{2}\leqslant y-3\end{cases}$ 有解，

所以 $a+6\leqslant8$，即 $a\leqslant2$.

解分式方程 $\frac{1}{x-2}-\frac{ax-1}{2-x}=4$，得 $x=\frac{8}{4-a}$.

因为 $x-2\neq0$，，所以 $\frac{8}{4-a}\neq2$，即 $a\neq0$.

因为关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x-2}-\frac{ax-1}{2-x}=4$ 有正整数解，所以 $4-a=1$ 或 $4-a=2$ 或 $4-a=4$ 或 $4-a=8$，

即 $a=3$ 或 $a=2$ 或 $a=0$ 或 $a=-4$.

又因为 $a\leqslant2$，$a\neq0$，所以 $a=2$ 或 -4.

所以所有符合条件的整数 a 的值的积为 $2\times(-4)=-8$.

4.【答案】2.

【解析】原方程两边同乘$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$，得$(x+3)(x+4)+(x+1)(x+4)+(x+1)(x+2)=(x+1)(x+2)(x+3)$，

所以 $3x^2+15x+18=(x+1)(x+2)(x+3)$，

化简得$(x+2)(x+3)(3-x-1)=0$，

解得 $x_1=-2, x_2=-3, x_3=2$.

经检验，$x_1=-2, x_2=-3$ 不是原方程的根，$x_3=2$ 是原方程的根.

故原方程的解为 $x=2$.

5.【答案】5.1.

【解析】由题意可得 $a^2-a-1=0$，所以 $a^2=a+1$，

所以 $a^4=(a^2)^2=(a+1)^2=a^2+2a+1=a+1+2a+1=3a+2$，

$a^3=a\cdot a^2=a(a+1)=a^2+a=a+1+a=2a+1$，

所以$\dfrac{2a^4-3a^2x+2}{a^3+2a^2x-a}=\dfrac{6a+4-3a^2x+2}{2a+1+2a^2x-a}=-\dfrac{93}{112}$，

化简得 $150xa^2=765a+765=765(a+1)=765a^2$.

因为 $a^2>0$，所以 $150x=765$，解得 $x=5.1$.

经检验，$x=5.1$ 是原方程的根.

故原方程的解为 $x=5.1$.

6.【答案】-1.

【解析】已知条件

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=0, & ①\\[2ex] \dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{y}-\dfrac{5}{z}=0, & ②\end{cases}$$

由①－②消去 x 得$\dfrac{8}{y}+\dfrac{8}{z}=0$，即$\dfrac{y}{z}=-1$.

由①×3＋②消去 y 得$\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{z}=0$，即$\dfrac{z}{x}=-1$.

①×5＋②×3 消去 z 得$\dfrac{8}{x}-\dfrac{8}{y}=0$，即$\dfrac{x}{y}=1$.

所以$\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=1-1-1=-1$.

7.【答案】1.

【解析】原式整理得$\dfrac{3x+4}{6x+5}=\dfrac{7}{11}$，

方程的两边同乘 $11(6x+5)$，

得 $11(3x+4)=7(6x+5)$，

解得 $x=1$.

把 $x=1$ 代入原方程检验，经检验，$x=1$ 是原方程的根.

所以原方程的解为 $x=1$.

8.【答案】-4 或 6 或 1.

【解析】$\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{mx}{x^2-4}=\dfrac{3}{x+2}$，化为整式得

$$2(x+2)+mx=3(x-2),$$

所以 $2x+4+mx=3x-6$，即 $x-mx=10$，解得$x=\dfrac{10}{1-m}$.

因为当 $x=2$ 时分母为 0，方程无解，即$\dfrac{10}{1-m}=2$，$m=-4$ 时方程无解；

当 $x=-2$ 时分母为 0，方程无解，即$\dfrac{10}{1-m}=-2$，$m=6$ 时方程无解；

当 $m=1$ 时，$x=\dfrac{10}{1-m}$无意义，方程也无解.

故 m 的值为-4 或 6 或 1.

9.【答案】54.

【解析】设 A、B 两地距离为 x km，第一次出发时间为 m min，第二次出发时间为 n min，

根据题意得

$$x=(11-m)a, \quad ①$$

$$x-10=\frac{2a}{3}\left(11+\frac{1}{3}-m\right), \quad ②$$

$$x=\frac{3a}{4}(11-n), \quad ③$$

$$x+30=a\left(11+\frac{1}{3}-n\right), \quad ④$$

由式①②得$\dfrac{1}{3}=\dfrac{3(x-10)}{2a}-\dfrac{x}{a}$，

由式③④得$\dfrac{1}{3}=\dfrac{x+30}{a}-\dfrac{4x}{3a}$，

所以$\dfrac{3(x-10)}{2a}-\dfrac{x}{a}=\dfrac{x+30}{a}-\dfrac{4x}{3a}$，

即$\dfrac{3(x-10)}{2}-x=(x+30)-\dfrac{4x}{3}$，

解得 $x=54$.

10.【答案】48.

【解析】设扶梯的速度为 x 级/分，旅客 B 的速度为 y 级/分，扶梯外面的级数为 n，

则$\begin{cases}\dfrac{60}{3y}=\dfrac{60-n}{x},\\ \dfrac{30}{y}=\dfrac{n-30}{x},\end{cases}$两式相除得$\dfrac{2}{3}=\dfrac{60-n}{n-30}$，解得$n=48$，

经检验得$n=48$是方程的根.

评注 可把“扶梯”类比为“河流”，转化为船顺流和逆流的问题，转化为熟悉的问题.

二、解答题(每题10分，共50分)

11.【答案】(1)$\dfrac{123}{14}$；(2) $a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$，$c=\dfrac{1}{3}$.

【解析】(1)原式可化为$\left(5-\dfrac{1}{x-19}\right)+\left(1+\dfrac{1}{x-9}\right)=\left(4+\dfrac{5}{x-6}\right)+\left(2+\dfrac{5}{x-8}\right)$，

即$\dfrac{1}{x-9}-\dfrac{1}{x-19}=\dfrac{5}{x-6}+\dfrac{5}{x-8}$，

所以$\dfrac{-10}{(x-9)(x-19)}=\dfrac{-10}{(x-6)(x-8)}$，

$(x-6)(x-8)=(x-9)(x-19)$，

化简得$14x=123$，解得$x=\dfrac{123}{14}$，

经检验$x=\dfrac{123}{14}$是原方程的解，故$x=\dfrac{123}{14}$.

(2)原方程可化为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=3, & ①\\ \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=4, & ②\\ \dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}=5, & ③\end{cases}$$

①+②+③得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6, \quad ④$$

④−①得$c=\dfrac{1}{3}$，

④−②得$a=\dfrac{1}{2}$，

④−③得$b=1$.

经检验$a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$，$c=\dfrac{1}{3}$是原方程的解.

12.【答案】证明：设$abc=k$，$ab+a+1=u$，$bc+b+1=v$，$ac+c+1=w$.

将上面后3个等式两边分别乘以c、a、b得，

$abc+ca+c=cu$，代入$abc=k$并根据$ac+c+1=w$得到

$$k-1+w=cu, \quad ①$$

$abc+ab+a=av$，代入$abc=k$并根据$ab+a+1=u$得到

$$k-1+u=av, \quad ②$$

$abc+bc+b=bw$，代入$abc=k$并根据$bc+b+1=v$得到

$$k-1+v=bw, \quad ③$$

已知$\dfrac{a}{u}+\dfrac{b}{v}+\dfrac{c}{w}=1$，两边同乘以$uvw$得$avw+buw+cuv=uvw$，

①两边乘以v；②两边乘以w；③两边乘以u，然后相加可得，

$(k-1)(u+v+w)+uv+vw+uw=avw+buw+cuv=uvw$， ④

①×②×③三式得，$(k-1+u)(k-1+v)(k-1+w)=abcuvw=kuvw$，

所以$(k-1)^3+(u+v+w)(k-1)^2+(uv+vw+uw)(k-1)-uvw(k-1)=0$，

提取公因式得$(k-1)[(k-1)^2+(u+v+w)(k-1)+(uv+vw+uw)-uvw]=0$，

与④比较可得$(k-1)^3=0$，解得$k=1$，即$abc=1$.

13.【答案】乙至少跑第5圈时，至多跑第9圈时一定能追上甲.

【解析】设$AD=BC=a$ m，$AB=CD=b$ m，甲的速度为65m/min，乙的速度为74m/min.

由题意得乙的速度比甲快，所以乙第一次追上甲的时间是在出发后的$\dfrac{2a+b}{9}$min，乙第一次追上甲所走的路程为$\dfrac{2a+b}{9}\times74$(m).

设这时乙所走的圈数为p，则$p=\dfrac{74(2a+b)}{9(2a+2b)}=4+\dfrac{38a+b}{9(a+b)}=9-\dfrac{7a+44b}{9(a+b)}$.

从而得$4<p<9$，当$38a+b<9(a+b)$，

即当$a<\dfrac{8}{29}b$时，$\dfrac{38a+b}{9(a+b)}<1$，

所以乙至少跑第5圈时，才能第一次追上甲.

又当 $7a+44b<9(a+b)$，

即 $a>\frac{35}{2}b$ 时，$\frac{7a+44b}{9(a+b)}<1$，

所以乙至多跑第9圈时一定能追上甲.

14.【答案】(1) 1600m；(2) 1200m.

【解析】(1) 设甲跑了 n 圈后，两人首次在 A 点处相遇，再设甲、乙两人的速度分别为 $v_1=3m$，$v_2=2m$，由题意可得在 A 点处相遇时，他们跑步的时间是 $\frac{400n}{3m}$，得 $\frac{400n}{3m}\cdot 2m=\frac{800}{3}n$.

因为乙跑回到 A 点处，所以 $\frac{800}{3}n$ 应是250的整数倍，从而知 n 的最小值是15.

此时，甲跑过的路程为 $400\times 15=6000$(m).

所以甲跑了1600m后，两人首次在 A 点处相遇.

(2) 设乙跑了 $(250p+200)$m，甲跑了 $(400q+200)$m 时，两人首次在 B 点处相遇，设甲、乙两人的速度分别为 $v_1=5m$，$v_2=6m$，由题意可得

$$\frac{400q+200}{5m}=\frac{250p+200}{6m},$$

即 $\frac{8q+4}{5}=\frac{5p+4}{6}$，

所以 $48q+24=25p+20$，即 $48q+4=25p$（p，q 均为正整数）.

所以 p、q 的最小值为 $q=2$，$p=4$，

此时，乙跑过的路程为 $250\times 4+200=1200$(m).

所以乙跑了1200m后，两人首次在 B 点处相遇.

15.【答案】(1) 48；(2) 甲在楼梯上，走动的级数为176级.

【解析】(1) 设扶梯露在外面的部分有 x 级，乙每分钟走动的级数为 a 级，则甲每分钟走动的级数为 $2a$ 级，扶梯每分钟向上运动 b 级.由题意得

$$\begin{cases}\frac{24}{2a}=\frac{x}{2a+b}, & ①\\ \frac{16}{a}=\frac{x}{a+b}, & ②\end{cases}$$

①÷②得 $\frac{3}{4}=\frac{a+b}{2a+b}$，

整理得 $b=2a$，代入②得 $x=48$.

故扶梯露在外面的部分有48级.

(2) 设追上乙时，甲扶梯走了 m 遍，楼梯走了 n 遍，则乙走扶梯 $(m-1)$ 遍，走楼梯 $(n-1)$ 遍.

由题意得 $\frac{48m}{4a}+\frac{48n}{2a}=\frac{48(m-1)}{3a}+\frac{48(n-1)}{a}$，

整理得 $m+6n=16$，

这里 m、n 中必有一个是整数，且 $0\leqslant m-n\leqslant 1$.

① 若 m 为整数，则 $n=\frac{16-m}{6}$，所以 $\begin{cases}m=1,\\ n=\frac{5}{2}\end{cases}$（舍去），$\begin{cases}m=2,\\ n=\frac{7}{3}\end{cases}$（舍去），$\begin{cases}m=3,\\ n=\frac{13}{6}\end{cases}$（符合条件），$\begin{cases}m=4,\\ n=2\end{cases}$（舍去），$\begin{cases}m=5,\\ n=\frac{11}{6}\end{cases}$（舍去，以后均不满足条件）.

② 若 n 为整数，$m=16-6n$，所以 $\begin{cases}n=1,\\ m=10,\end{cases}$ $\begin{cases}n=2,\\ m=4,\end{cases}$ $\begin{cases}n=3,\\ m=-2,\end{cases}$ …，这些均不符合要求.

所以方程有唯一解 $\begin{cases}m=3,\\ n=\frac{13}{6},\end{cases}$ 此时，甲在楼梯上.

他已走动的级数是 $(\frac{48m}{4a}+\frac{48n}{2a})\times 2a=24m+48n=72+104=176$(级).

评注 本题考查了分式方程在行程问题中的应用.分析题意并找到合适的等量关系是解决问题的关键.本题难点在于自动扶梯在上升，具有一定的速度，同时甲、乙也在上楼梯，变化量较多.解题时要善于抓住不变量，只有不变量才是列方程的依据.另外，本题求解时设的未知数 x 和 y，只设不求，这种方法在解复杂的应用题时常用来帮助分析数量关系，便于解题.

第14讲 有理式的恒等变形

一、填空题(每题5分，共50分)

1.【答案】>.

【解析】$M=3x^2-8xy+9y^2-4x+6y+13$

$=(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)+2(x^2-4xy+4y^2)$

$=(x-2)^2+(y+3)^2+2(x-2y)^2>0$.

2.【答案】$\frac{11}{81}$.

【解析】由 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=\frac{1}{3}$，

$x+y=1$，有 $x^2-xy+y^2=\frac{1}{3}$.

又因 $x^2+2xy+y^2=1$，则 $3xy=\frac{2}{3}$，$xy=\frac{2}{9}$.

由 $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=\frac{2}{9}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{2}{3}, \\ y=\frac{1}{3}. \end{cases}$

故 $x^5+y^5=\frac{32}{243}+\frac{1}{243}=\frac{33}{243}=\frac{11}{81}$.

3.【答案】28.

【解析】因为实数 x、y、z 满足 $x^2+y^2+z^2=4$，所以，

$(2x-y)^2+(2y-z)^2+(2z-x)^2$

$=5(x^2+y^2+z^2)-4(xy+yz+xz)$

$=20-2[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]$

$=28-2(x+y+z)^2\leqslant 28$.

所以当 $x+y+z=0$ 时，$(2x-y)^2+(2y-z)^2+(2z-x)^2$ 的最大值为 28.

4.【答案】720.

【解析】因为 $a(b+c)=152$，$b(c+a)=162$，$c(a+b)=170$，所以

$$ab+ac=152, \quad ①$$

$$bc+ba=162, \quad ②$$

$$ca+cb=170, \quad ③$$

由①+②+③并化简得

$$ab+bc+ca=242, \quad ④$$

④−①得 $bc=90$，

④−②得 $ca=80$，

④−③得 $ab=72$，

所以 $bc\cdot ca\cdot ab=90\times 80\times 72$，即 $(abc)^2=720^2$.

因为 a、b、c 均为正数，所以 $abc=720$.

5.【答案】$a>b$，$c>d$.

【解析】因为 $2a-2b=2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$，

又 x、y、z 是三个互不相同的非零实数，

所以 $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2>0$，

所以 $a>b$.

因为 $2c-2d=\frac{2}{x^2}+\frac{2}{y^2}+\frac{2}{z^2}-\frac{2}{xy}-\frac{2}{yz}-\frac{2}{zx}=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)^2$，

又 x、y、z 是三个互不相同的非零实数，

所以 $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}\right)^2>0$，

所以 $c>d$.

故答案是 $a>b$，$c>d$.

6.【答案】1.

【解析】因为 $w+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{y}$，

所以 $w-x=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{x-y}{xy}$，

同理可得，

$x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{y-z}{yz}$，

$y-z=\frac{z-w}{zw}$，

$z-w=\frac{w-x}{wx}$，

所以 $(w-x)(x-y)(y-z)(z-w)$

$=\frac{x-y}{xy}\cdot\frac{y-z}{yz}\cdot\frac{z-w}{zw}\cdot\frac{w-x}{wx}$

$=\frac{(x-y)(y-z)(z-w)(w-x)}{w^2x^2y^2z^2}$，

所以 $w^2x^2y^2z^2=1$.

评注 此题考查了对称式和轮换对称式.解题的关键是通过变形得出，

$(w-x)(x-y)(y-z)(z-w)$

$=\frac{(x-y)(y-z)(z-w)(w-x)}{w^2x^2y^2z^2}$.

7.【答案】-3.

【解析】当 $x^3+y^3+z^3+mxyz$ 能被 $x+y+z$ 整除时，它含有 $x+y+z$ 因式.

令 $x+y+z=0$，得 $x=-(y+z)$，代入原式其值必

为0,即$[-(y+z)]^3+y^3+z^3-myz(y+z)=0$,

把左边因式分解,得$-yz(y+z)(m+3)=0$.

因为$xyz\neq0$,所以$x\neq0$,

又因为$x=-(y+z)$,所以$(y+z)\neq0$,

所以当$m+3=0$时等式成立,

即当$m=-3$时,x、y、z不论取什么值,原式都能被$x+y+z$整除.

8.【答案】0.

【解析】由题意得$(a+b+c)^3=0$可得,

$a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+3c^2(a+b)+6abc=0$,

整理得$a^3+b^3+c^3-3a^3-3b^3-3c^3+6abc=0$,

$-2(a^3+b^3+c^3)+6abc=0$,

所以$abc=0$,从而可判断出a、b、c有一个等于0,

假设$a=0$,则$b+c=0$,$b=-c$,

所以$a^{15}+b^{15}+c^{15}=0$.

9.【答案】373.

【解析】因为

$$x^4+324=x^4+36x^2+324-36x^2$$
$$=(x^2+18)^2-36x^2$$
$$=[x(x+6)+18][x(x-6)+18],$$

所以,

$$原式=\frac{(10\times16+18)}{[4\times(-2)+18]}\times\frac{(22\times28+18)}{(16\times10+18)}\times\frac{(34\times40+18)}{(28\times22+18)}\times\frac{(46\times52+18)}{(40\times34+18)}\times\frac{(58\times64+18)}{(52\times46+18)}$$
$$=373.$$

评注 本题考查因式分解的应用.解决本题的关键是找到本题中蕴含的规律$x^4+324=[x(x+6)+18][x(x-6)+18]$,以降低计算的工作量.

10.【答案】0.

【解析】因为$2^a\cdot5^b=10=2\times5$,所以$2^{a-1}\cdot5^{b-1}=1$,所以

$$(2^{a-1}\cdot5^{b-1})^{d-1}=1^{d-1},\qquad①$$

同理可证

$$(2^{c-1}\cdot5^{d-1})^{b-1}=1^{b-1}.\qquad②$$

由①②两式得

$2^{(a-1)(d-1)}\cdot5^{(b-1)(d-1)}=2^{(c-1)(b-1)}\cdot5^{(d-1)(b-1)}$,

即$2^{(a-1)(d-1)}=2^{(c-1)(b-1)}$,

所以$(a-1)(d-1)=(b-1)(c-1)$,

所以$(a-1)(d-1)-(b-1)(c-1)=0$.

二、解答题(每题10分,共50分)

11.【答案】证明:由题意得

$$(2b-c-a)^2-9(a-c)^2$$
$$=(2b-c-a+3a-3c)(2b-c-a-3a+3c)$$
$$=4(2a-b-c)(2c-a-b),$$

可得$(2b-c-a)^2-4(2a-b-c)(2c-a-b)=9(a-c)^2$.

12.【答案】证明:由题意知,$x+y+z=xyz$,所以,

$$左边=x(1-z^2-y^2+y^2z^2)+y(1-z^2-x^2+x^2z^2)+z(1-y^2-x^2+x^2y^2)$$
$$=(x+y+z)-xz^2-xy^2+xy^2z^2-yz^2-yx^2+yx^2z^2-zy^2-zx^2+zx^2y^2$$
$$=xyz-xy(y+x)-xz(x+z)-yz(y+z)+xyz(xy+yz+zx)$$
$$=xyz-xy(xyz-z)-xz(xyz-y)-yz(xyz-x)+xyz(xy+yz+zx)$$
$$=xyz+xyz+xyz+xyz=4xyz$$
$$=右边.$$

故$x(1-y^2)(1-z^2)+y(1-x^2)(1-z^2)+z(1-x^2)(1-y^2)$
$=4xyz$.

评注 此题主要考查了整式的等式证明.本例的证明思路就是“由繁到简”,注意整体思想的应用.

13.【答案】证明:令

$$y+z-2x=a,\qquad①$$
$$z+x-2y=b,\qquad②$$
$$x+y-2z=c,\qquad③$$

则要证的等式变为$a^3+b^3+c^3=3abc$.

联想到乘法公式,

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$,

所以将①②③相加有,

$a+b+c=y+z-2x+z+x-2y+x+y-2z$

$=0$,即$a^3+b^3+c^3-3abc=0$,

所以$(y+z-2x)^3+(z+x-2y)^3+(x+y-2z)^3$

$=3(y+z-2x)(z+x-2y)(x+y-2z)$.

评注 此题考查了整式的等式证明.注意换元

法也可以在恒等式证明中发挥效力.

14.【答案】证明:由题设得 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$,

即 $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-1\right)+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-1\right)+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+1\right)=0$,

所以 $\frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2-2ac}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{2ab}=0$,

即

$$\frac{(a+b-c)(ab-ac-a^2+ab-bc-b^2+ac+bc+c^2)}{2abc}=0,$$

化简得 $\frac{(a+b-c)[c^2-(a-b)^2]}{2abc}=0$,

即 $\frac{(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{2abc}=0$,

所以 $a+b-c=0$ 或 $c-a+b=0$ 或 $c+a-b=0$,

(1) 若 $a+b-c=0$,则

$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-(b-c)^2}{2bc}=1$,

$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{c^2+a^2-(c-a)^2}{2ac}=1$,

$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-(a+b)^2}{2ab}=-1$,

(2) 若 $c+a-b=0$,同理可得,

$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=1$,$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=-1$,

$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$,

(3) 若 $b+c-a=0$,同理可得,

$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-1$,$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=1$,

$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=1$,

综上(1)(2)(3)所述,可得三个分数 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$、$\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$、$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 的值有两个为1,一个为-1.

15.【答案】(1) 经观察,发现规律:$\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)1个}\underbrace{22\cdots2}_{n个2}5=(\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)个3}5)^2$.

证明如下:

$(\underbrace{33\cdots3}_{(n-1)个3}5)^2=(\underbrace{33\cdots3}_{n个3}+2)^2$

$=\left(\frac{1}{3}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+2\right)^2$

$=\left[\frac{1}{3}(10n-1)+2\right]^2$

$=\left(\frac{10^n+5}{3}\right)^2$

$=\frac{10^{2n}}{9}+\frac{10^{n+1}}{9}+\frac{25}{9}$

$=\frac{10^{2n}-1}{9}+\frac{10^{n+1}-1}{9}+\frac{25+2}{9}$

$=\underbrace{11\cdots1}_{2n个1}+\underbrace{11\cdots1}_{(n+1)个1}+3$

$=\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个}\underbrace{22\cdots2}_{n个2}5$.

(2) 一般地,设 $m=a^2+b^2$,$n=c^2+d^2$,则

$mn=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$=a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2$

$=a^2c^2+b^2d^2+2abcd+b^2c^2-2abcd+a^2d^2$

$=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$

或 $(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$.

第15讲 实数与二次根式

一、填空题(每题5分,共50分)

1.【答案】$\frac{1}{4}$.

【解析】$a=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2\sqrt{6}}$

$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{4}=\frac{b}{4}$,

所以 $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$.

2.【答案】2.

【解析】当 $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ 时，

原式 $=(x^2)^2-3x(x^2+1)+1$

$=\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2\right]^2-3\times$

$\frac{3+\sqrt{13}}{2}\times\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^2+1\right]+1$

$=\left(\frac{11+3\sqrt{13}}{2}\right)^2-3\times\frac{3+\sqrt{13}}{2}\times$

$\frac{13+3\sqrt{13}}{2}+1$

$=\frac{119+33\sqrt{13}}{2}-\frac{117+33\sqrt{13}}{2}+1$

$=2.$

3.【答案】8.

【解析】因为 $\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}$

$+\cdots+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\frac{2}{3}$，

所以 $\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}-$

$\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2}{3}$，

即 $1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2}{3}$，

解得 $k=8$.

4.【答案】11.

【解析】由 $\sqrt{x}$ 有意义，得 $x\geqslant0$，所以 $120\geqslant120-\sqrt{x}\geqslant0$，所以有 $\sqrt{120}\geqslant\sqrt{120-\sqrt{x}}\geqslant0$.

又因为 $\sqrt{120-\sqrt{x}}$ 为整数，

所以 $\sqrt{120-\sqrt{x}}$ 的值为 0，1，2，…，10，共 11 个整数.所以 x 取值对应有 11 个.

5.【答案】18.

【解析】由题意得 $\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-4=0,\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-1=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=12,\\ y=-6,\end{cases}$ 所以 $x-y=18$.

6.【答案】$2\sqrt{6}-5$.

【解析】

原式 $=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{21}+\sqrt{26}-\sqrt{39}}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{26}+\sqrt{39}}$

$=\frac{\sqrt{7}\times(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\sqrt{13}\times(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\sqrt{7}\times(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{13}\times(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})\times(\sqrt{7}+\sqrt{13})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\times(\sqrt{7}+\sqrt{13})}$

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$=2\sqrt{6}-5.$

7.【答案】15.

【解析】由 $a-b=2+\sqrt{3}$，$b-c=2-\sqrt{3}$ 两式相加得，$a-c=4$.

原式 $=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$

$=\frac{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca}{2}$

$=\frac{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)}{2}$

$=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2}{2}$

$=\frac{(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2+4^2}{2}$

$=15.$

8.【答案】0.

【解析】由题意得

$$\begin{cases}x+5x+6\geqslant0, & ①\\ 0\leqslant x^2+5x+7\leqslant1, & ②\end{cases}$$

由①得 $x^2+5x+7\geqslant1$，结合②得 $x^2+5x+7=1$，

所以原式 $=\sqrt{1-\sqrt{1}}+0=0$.

9.【答案】7.

【解析】设 $A=\sqrt{\frac{15}{a}}$，$B=\sqrt{\frac{15}{b}}$，因为 15 只能约分成 3、5，那么 a、b 只能是 $15n^2$.

先考虑 A 这边：

① $A=\frac{1}{1}$，那么 $B=1$ 或者 $\frac{1}{2}$，此时有，有序数对 (a,b) 取值为 (15，60)，(15，15)，(60，15).

② $A=\frac{1}{2}$，则 $B=\frac{1}{2}$，此时 (a,b) 取值为 (60，60).

③ $A=\frac{1}{4}$,那么 $B=\frac{1}{4}$,此时 $2\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1$,

(a,b)取值为$(240,240)$.

④ $A=\frac{1}{3}$,那么 $B=\frac{1}{6}$,此时 $2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=1$,

(a,b)取值为$(135,540)$,$(540,135)$.

综上可得共有 7 对.

评注 本题考查二次根式的化简求值,难度较大,关键是根据题意分别讨论$\sqrt{\frac{15}{a}}$及$\sqrt{\frac{15}{b}}$的取值.

10.【答案】30.

【解析】因为 $n^3+2n^2=n^2(n+2)$,而它是一个奇数的平方,所以 n 必是奇数,$n+2$ 必为某个奇数的平方.所以符合条件的 n 中,最小的两个正整数是 7 和 23,则最小的两个数的和是 $7+23=30$.

评注 此题主要考查了平方根的定义和奇数的特点;注意奇数的平方还是奇数.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11.【答案】2.

【解析】化简 x 与 y 得,

$x=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2$,$y=(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2$,

所以 $x+y=4n+2$,$xy=1$.

将 $xy=1$ 代入方程,化简得 $x^2+y^2=98$,

所以$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=98+2\times1=100$,

解得 $x+y=10$.

则 $4n+2=10$,解得 $n=2$.

12.【答案】10582.

【解析】设$\sqrt{6}+\sqrt{5}=x$,$\sqrt{6}-\sqrt{5}=y$,那么 $x+y=2\sqrt{6}$,$xy=1$.

又 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{6})^2-2\times1=22$,$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=42\sqrt{6}$,

所以 $(\sqrt{5}+\sqrt{6})^6+(\sqrt{6}-\sqrt{5})^6=x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3=10582$,

又 $0<\sqrt{6}-\sqrt{5}<1$,从而 $0<(\sqrt{6}-\sqrt{5})^6<1$,故 $10581<(\sqrt{6}+\sqrt{5})^6<10582$,

所以比$(\sqrt{6}+\sqrt{5})^6$ 大的最小整数为 10582.

13.【答案】2019.

【解析】因为

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1}}{n(n+1)}$$

$$=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)},$$

而$\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

所以 $S=1+1-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+1+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}$

$$=2019+1-\frac{1}{2020}$$

$$=2019\frac{2019}{2020},$$

所以$[S]=2019$.

14.【答案】$1+\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

【解析】设 $\sqrt{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$($x$、$y$、$z$ 为正整数),两边平方得

$13+2\sqrt{5}+2\sqrt{7}+2\sqrt{35}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}$.

所以有

$$x+y+z=13,\quad ①$$

$$xy=5,\quad ②$$

$$yz=7,\quad ③$$

$$zx=35,\quad ④$$

由②得 $xyz=5z$,

由③得 $xyz=7x$,

由④得 $xyz=35y$,

于是 $5z=35y=7x$,即 $x=5y$,$z=7y$,代入①得 $y=1$,$x=5$,$z=7$.

故$\sqrt{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})}=1+\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

15.【答案】2020.

【解析】因为 $1\leqslant a\leqslant2$,$0\leqslant a-1\leqslant1$,

所以 $m=\sqrt{(a-1)+2\sqrt{a-1}+1}+$

$\sqrt{(a-1)-2\sqrt{a-1}+1}$

$=\sqrt{a-1}+1+1-\sqrt{a-1}$

$=2$.

所以

$m^{10}+m^9+m^8+\cdots+m-26$

$=(m^{10}+m^9+m^8+\cdots+m+1)-27$

$=\dfrac{(m-1)(m^{10}+m^9+m^8+\cdots+m+1)}{m-1}-27$

$=\dfrac{m^{11}-1}{m-1}-27$

$=2^{11}-1-27$

$=2048-1-27$

$=2020$.

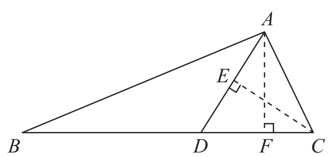
评注　此题可利用关系式 $2^0+2^1+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$，运算将更简单.

第 16 讲　勾股定理

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

1.【答案】36.

【解析】如答图 16-1 所示，过 A 作 $AF\perp DC$，过 C 作 $CE\perp AD$.



答图 16-1

因为 $AC=DC=5$，又 $AD=6$，所以 $AE=DE=\dfrac{1}{2}AD=3$.

在 Rt△DEC 中，根据勾股定理得 $CE=\sqrt{DC^2-DE^2}=4$，

所以 $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}AD\cdot CE=\dfrac{1}{2}\times6\times4=12$.

又因为 $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}DC\cdot AF=\dfrac{1}{2}\times5\times AF=12$，

所以 $AF=\dfrac{24}{5}$.

又因为 $BD=10$，

则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AF$

$=\dfrac{1}{2}(BD+DC)\times AF$

$=36$.

2.【答案】$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$或$\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

【解析】设三角形的面积为 s，由题意知 $a=s$，$b=\dfrac{2s}{x}$，$c=\dfrac{s}{3}$.

显然 $a>c$，分两种情况：

① 如果 a 为斜边，那么 $a^2=b^2+c^2$，即 $s^2=\left(\dfrac{2s}{x}\right)^2+\left(\dfrac{s}{3}\right)^2$，解得 $x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

② 如果 b 为斜边，那么 $b^2=a^2+c^2$，即 $\left(\dfrac{2s}{x}\right)^2=s^2+\left(\dfrac{s}{3}\right)^2$，解得 $x=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

故所求 x 的值为$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$或$\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

3.【答案】7 或 25.

【解析】当 $n=1$ 时，

$$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}(m^2-1), & ①\\ b=m, & ②\\ c=\dfrac{1}{2}(m^2+1). & ③\end{cases}$$

因为直角三角形有一边长为 5，

所以，当 $a=5$ 时，$\dfrac{1}{2}(m^2-1)=5$，解得 $m=\pm\sqrt{11}$(舍去).

当 $b=5$ 时，即 $m=5$，代入①③得，$a=12$，$c=13$.

当 $c=5$ 时，$\dfrac{1}{2}(m^2+1)=5$，解得 $m=\pm3$.因为 $m>0$，所以 $m=3$，代入①②得，$a=4$，$b=3$.

综上所述，直角三角形的另外两条边长之和为 7 或 25.

4.【答案】$\dfrac{2m^2-n^2}{m}$.

【解析】如答图 16-2 所示，分别过点 B、D 作 AD、BC 的垂线 BE 和 DF，垂足分别是 E、F，则有

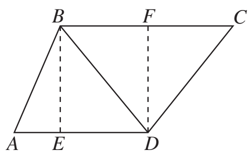
$BE=DF, BF=DE=FC=\frac{p}{2}$.

在 Rt△ABE 中,$BE^2=n^2-\left(m-\frac{p}{2}\right)^2$.

在 Rt△BED 中,$BE^2=m^2-\frac{p^2}{4}$.

所以 $n^2-\left(m-\frac{p}{2}\right)^2=m^2-\frac{p^2}{4}$.

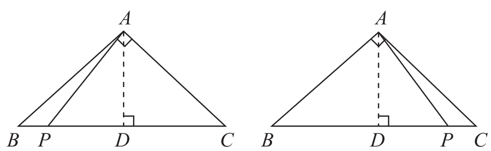
解得 $p=\frac{2m^2-n^2}{m}$.



答图 16-2

5.【答案】7 或 25.

【解析】如答图 16-3 所示,作 $AD\perp BC$,交 BC 于点 D.



答图 16-3

因为 $BC=8\text{cm}$,所以 $BD=CD=\frac{1}{2}BC=4\text{cm}$,所以 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=3\text{cm}$.

本题目分两种情况:

① 当点 P 运动 t s 后有 $PA\perp AC$ 时,

因为 $AP^2=PD^2+AD^2=PC^2-AC^2$,

所以 $PD^2+AD^2=PC^2-AC^2$,

所以 $PD^2+3^2=(PD+4)^2-5^2$,则 $PD=2.25$,

所以 $BP=4-2.25=1.75=0.25t$,

所以 $t=7$s.

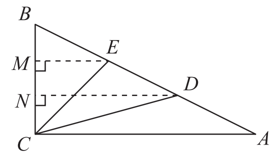
② 当点 P 运动 t s 后有 $PA\perp AB$ 时,同理可证得 $PD=2.25$.

所以 $BP=4+2.25=6.25=0.25t$,所以 $t=25$s,

所以点 P 运动的时间为 7s 或 25s.

6.【答案】$\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

【解析】如答图 16-4 所示,作 $EM\perp BC$,$DN\perp BC$.



答图 16-4

因为 $\angle C=90°$,所以 $\angle BME=\angle BND=90°$,

设 $AB=3x$,则 $BE=DE=AD=x$

设 $BC=3y$,则 $BM=MN=NC=y$,$2ME=ND$,

在 Rt△CME 中,

$$ME^2+MC^2=EC^2, \quad ①$$

在 Rt△CND 中,

$$ND^2+NC^2=CD^2, \quad ②$$

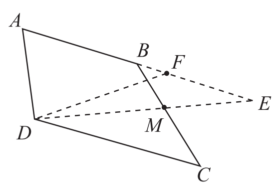
①+②得 $5ME^2+5y^2=1$,

所以 $ME^2+y^2=\frac{1}{5}$.

在 Rt△BME 中,$BE^2=BM^2+ME^2$,即 $x^2=y^2+ME^2=\frac{1}{5}$,所以 $AB=3BE=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

7.【答案】1.5.

【解析】如答图 16-5 所示,延长 DM、AB 交于 E,在 AE 上取中点 F,连接 DF.



答图 16-5

因为 $\angle BAD=60°$,$\angle ADC=120°$,所以 $\angle BAD+\angle ADC=180°$,所以 $AB\parallel CD$,所以 $\angle EBM=\angle DCM$.

在△EMB 和△DMC 中,

$$\begin{cases}\angle EBM=\angle DCM,\\ BM=CM,\\ \angle EMB=\angle DMC(\text{对顶角相等}),\end{cases}$$

所以△EMB≌△DMC,所以 $BE=CD$.

因为 $AB+CD=2\sqrt{3}$,点 F 为 EA 的中点,$\angle BAD=60°$,$AD=AF=EF=\sqrt{3}$,所以$\angle EDA=90°$.

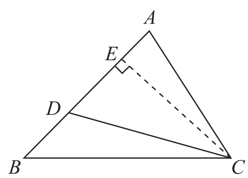
根据勾股定理可得 $ED=\sqrt{3}AD$,所以 $ED=3$.

因为 M 为 ED 的中点,所以 $MD=1.5$.

评注　本题是一道根据三角形的中线定义结合勾股定理求解的综合题，有利于锻炼学生综合分析、解答问题的能力.

8.【答案】$15°$.

【解析】如答图 16-6 所示，过 C 作 $CE\perp AB$ 于 E. 设 $DE=x$，则 $AE=2-x$.



答图 16-6

在 Rt$\triangle DCE$ 中，$\angle ADC=60°$，所以 $CE=\sqrt{3}x$.

在 Rt$\triangle AEC$ 中，根据勾股定理得 $AE^2+CE^2=AC^2$，所以$(2-x)^2+(\sqrt{3}x)^2=(\sqrt{6})^2$，

解得 $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

所以 $BE=CE=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

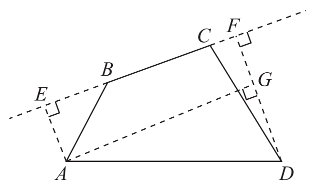
又$\angle BEC=90°$，所以$\angle BCE=45°$，

又$\angle DCE=90°-\angle ADC=90°-60°=30°$，

所以$\angle BCD=\angle BCE-\angle DCE=15°$.

9.【答案】$2\sqrt{19}$.

【解析】如答图 16-7 所示，作 $AE\perp BC$ 于 E，$DF\perp BC$ 于 F，$AG\perp DF$ 于 G，则四边形 $AEFG$ 四个内角均为直角.



答图 16-7

所以四边形 $AEFG$ 为长方形，$AE=FG$，$EF=AG$，

$\angle ABE=180°-135°=45°$，$\angle DCF=180°-120°=60°$，

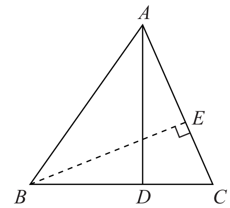
所以 $AE=EB=\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}$，$CF=\dfrac{1}{2}\times CD=3$，$FD=\sqrt{3}CF=3\sqrt{3}$，

所以 $AG=EF=8$，$DG=DF-AE=2\sqrt{3}$，

所以 $AD=\sqrt{AG^2+DG^2}=2\sqrt{19}$.

10.【答案】$\dfrac{1}{2}\sqrt{30+2\sqrt{33}}$.

【解析】如答图 16-8 所示，过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E，则 $BE=\sqrt{3}AE$.



答图 16-8

设 $AE=x$，则 $BE=\sqrt{3}x$，$AB=2x$.

因为 $BD=2CD=2$，所以 $BD=2$，$CD=1$，$BC=3$.

所以 $CE=\sqrt{BC^2-BE^2}=\sqrt{9-3x^2}$.

由 $AB^2-BD^2=AD^2=AC^2-CD^2$，

得 $4x^2-4=(x+\sqrt{9-3x^2})^2-1$.

所以 $4x^2-4=8-2x^2+2x\sqrt{9-3x^2}$，

化简得 $3x^2-6=x\sqrt{9-3x^2}$，

$9x^4-36x^2+36=9x^2-3x^4$，

$4x^4-15x^2+12=0$，

解得 $x^2=\dfrac{15\pm\sqrt{33}}{8}$.

又 $AB=2x=\sqrt{\dfrac{15-\sqrt{33}}{2}}<2$，

所以 $x=\sqrt{\dfrac{15-\sqrt{33}}{8}}$不合题意.

故 $x=\sqrt{\dfrac{15+\sqrt{33}}{8}}$，

从而 $AB=\sqrt{\dfrac{15+\sqrt{33}}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{30+2\sqrt{33}}$.

评注　本题考查勾股定理的知识，难度较大，解题关键是过点 B 作 $BE\perp AC$，构建直角三角形，以便灵活运用勾股定理.

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11.【答案】证明：如答图 16-9 所示，过点 A 作 $AM\parallel BC$，交 FD 延长线于点 M，连接 EM.

因为 $AM\parallel BC$，所以$\angle MAE=\angle ACB=90°$，$\angle MAD=\angle B$.

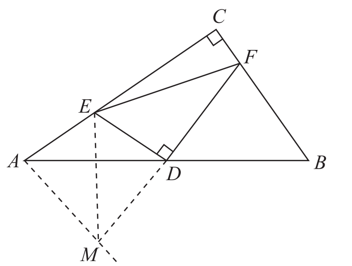
因为 $AD=BD$，$\angle ADM=\angle BDF$，

所以 $\triangle ADM \cong \triangle BDF$，

所以 $AM=BF$，$MD=DF$.

又因为 $DE\perp DF$，所以 $EF=EM$.

所以 $AE^2+BF^2=AE^2+AM^2=EM^2=EF^2$.



答图 16-9

12.【答案】(1) $3\sqrt{15}$；(2) 定值为 4，证明见解析.

【解析】(1)如答图 16-10(a)所示，过 C 作 $CD\perp AB$ 交 AB 于 D.

设 $BD=x$，则 $AD=8-x$，

又 $BC=6$，$AB=8$，$AC=\frac{1}{2}AB=4$，

在 $Rt\triangle BDC$ 中，根据勾股定理得

$$x^2+CD^2=6^2, \qquad ①$$

在 $Rt\triangle ACD$ 中，根据勾股定理得

$$(8-x)^2+CD^2=4^2, \qquad ②$$

联立①②，消去 CD^2 得 $x^2-36=(8-x)^2-16$，

即 $16x=84$，解得 $x=\frac{21}{4}$.

把 $x=\frac{21}{4}$ 代入①得 $CD=\sqrt{36-\frac{441}{16}}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$，

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{3\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$.

(2) 证明：过 A 作 $AE\perp CP$，交 CP 于 E，如答图 16-10(b)所示.

设 $CE=x$，$AE=y$，$AC=a$，$AB=2a$，

在 $Rt\triangle ACE$ 中，根据勾股定理得

$$x^2+y^2=a^2, \qquad ①$$

在 $Rt\triangle ABE$ 中，根据勾股定理得

$$(6+x)^2+y^2=(2a)^2, \qquad ②$$

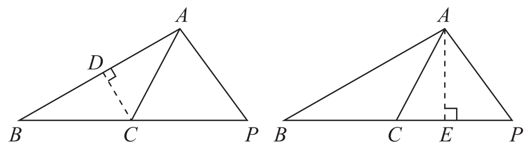
①－②得

$$-4x=12-a^2, \qquad ③$$

在 $Rt\triangle AEP$ 中，根据勾股定理得

$$\begin{aligned}AP^2&=AE^2+EP^2\\&=y^2+(2-x)^2\\&=x^2+y^2-4x+4,\end{aligned}$$

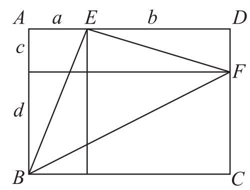
将①和③代入得，$AP^2=a^2+12-a^2+4=16$，开方得 $AP=4$，则 AP 的值为定值，且定值为 4.



(a) (b)

答图 16-10

13.【答案】证明：如答图 16-11 所示，构造一个边长为 $(a+b)$ 和 $(c+d)$ 的矩形 $ABCD$.



答图 16-11

在 $Rt\triangle ABE$ 中，$BE=\sqrt{AE^2+AB^2}$，

所以

$BE=\sqrt{a^2+(c+d)^2}=\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$，

在 $Rt\triangle BCF$ 中，$BF=\sqrt{BC^2+CF^2}=\sqrt{(a+b)^2+d^2}=\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$，

在 $Rt\triangle DEF$ 中，$EF=\sqrt{DE^2+DF^2}=\sqrt{b^2+c^2}$，

在 $Rt\triangle BEF$ 中，$BE+EF>BF$，

即 $\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}+\sqrt{b^2+c^2}$

$>\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$.

评注 本题考查了勾股定理的运用，本题中构建矩形 $ABCD$ 并且构建 $\triangle BEF$ 是解题的关键. 代数问题有的可以用几何的方法求解，几何问题也可以用代数的方法求解，这种数形转换实质也是一种建模方法.

14.【答案】证明：设勾长为 x，弦长为 z，则股长为 $z-1$，所以 x、$z-1$、z 是一个基本勾股数组. 若 z 为奇数，则 $z-1$ 为偶数；若 z 为偶数，则 $z-1$ 是奇数. 所以 x 为奇数，设 $x=2a+1$（a 为正整

数），则有$(2a+1)^2+(z-1)^2=z^2$，解得 $z=2a^2+2a+1$.

故勾股数组具有形式 $2a+1, 2a^2+2a, 2a^2+2a+1$.

15.【答案】证明：利用勾股定理可以证明 $b^2+c^2=2m_a^2+\frac{1}{2}a^2$，所以

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{(b-c)^2}{2}+bc-\frac{a^2}{4}\geqslant bc-\frac{a^2}{4},$$

又

$$\begin{aligned}m_a^2&=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\\&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\frac{a^2}{4}\\&=\frac{2bc+(b-c)^2-a^2}{2}+\frac{a^2}{4}\\&=bc+\frac{(b-c+a)(b-c-a)}{2}+\frac{a^2}{4}.\end{aligned}$$

因为 $b-c-a=b-(a+c)<0$，$b-c+a=(a+b)-c>0$，所以 $m_a^2<bc+\frac{a^2}{4}$，所以 $bc-\frac{a^2}{4}<m_a^2<bc+\frac{a^2}{4}$.

第 17 讲　平行四边形

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

1.【答案】6.4.

【解析】设平行四边形 $ABCD$ 中 AD 与 BC 之间的距离为 h，则平行四边形的面积为 $AD\times h$，所以

$$S_{\triangle APD}=\frac{1}{2}AD\times h=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}.$$

因为 $S_{\square ABCD}=12.8$，所以 $S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}\times12.8=6.4$.

2.【答案】②④.

【解析】① 一组对边相等，一组对角相等的四边形，不能证明另一组对边也相等或平行，即一组对边和一组对角分别相等的四边形不一定是平行四边形，故①错误.

② 两组对角的内角平分线分别平行的四边形，能证明两组对角相等，故四边形一定是平行四边形，故②正确.

③ 一组对边中点的距离等于另一组对边边长的和的一半的四边形，梯形中两腰中点的连线也可以等于上下底之和的一半，故③错误.

④ 两条对角线都平分四边形的面积的四边形是平行四边形，可以推出两条对角线互相平分，故④正确.

故答案为②④.

3.【答案】85°.

【解析】因为在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$BC=AD$，所以$\angle EAD=\angle AEB$.

又因为 $AB=AE$，所以$\angle B=\angle AEB$，所以$\angle B=\angle EAD$.

在$\triangle ABC$ 和$\triangle EAD$ 中，$\begin{cases}AB=AE,\\\angle ABC=\angle EAD,\\BC=AD,\end{cases}$

所以$\triangle ABC\cong\triangle EAD$(SAS)，

所以$\angle AED=\angle BAC$.

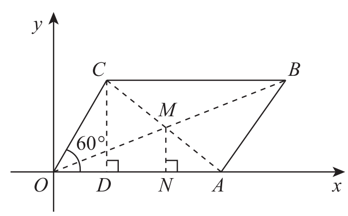
因为 AE 平分$\angle DAB$，所以$\angle BAE=\angle DAE$，所以$\angle BAE=\angle AEB=\angle B$，所以$\triangle ABE$ 为等边三角形，所以$\angle BAE=60°$.

所以$\angle BAC=\angle BAE+\angle EAC=85°$，

所以$\angle AED=\angle BAC=85°$.

4.【答案】$\frac{3\sqrt{3}-5}{3}$.

【解析】如答图 17-1 所示，连接 OB 和 AC 交于 M，过 M 作 $MN\perp OA$ 于 N，过 C 作 $CD\perp OA$ 于 D.



答图 17-1

因为四边形 $ABCO$ 是平行四边形，所以过 M 的直线都把平行四边形的面积分为相等的两部分，如过 M 的直线 OB.

因为四边形 $ABCO$ 是平行四边形，

所以 $BC=OA$，$OC=AB$，$CM=AM$.

在$\triangle CBO$和$\triangle AOB$中,有$\begin{cases}OC=AB,\\BC=OA,\\OB=OB,\end{cases}$

所以$\triangle CBO\cong\triangle AOB$(SSS),

所以$S_{\triangle BOC}=S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}S_{\square ABCO}$.

因为在$\triangle COD$中,$\angle CDO=90^\circ$,$OC=\dfrac{1}{2}OA=4$,$\angle OCD=30^\circ$,

所以$OD=2$,$CD=2\sqrt{3}$.

因为$MN\perp OA$,$CD\perp OA$,所以$MN\parallel CD$.

因为$CM=AM$,所以$DN=AN$,

所以$MN=\dfrac{1}{2}CD=\sqrt{3}$,$ON=OD+DN=2+\dfrac{1}{2}\times(8-2)=5$,即$M$的坐标是$(5,\sqrt{3})$.

将$M(5,\sqrt{3})$代入$y=\dfrac{1}{3}x+b$得$\sqrt{3}=\dfrac{5}{3}+b$,从而$b=\dfrac{3\sqrt{3}-5}{3}$.

5.【答案】$b+c-a$.

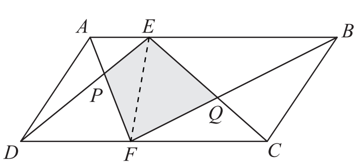
【解析】因为OB、OC分别平分$\angle ABC$、$\angle ACB$,$MN\parallel BC$,$EF\parallel AB$,$GH\parallel AC$,所以四边形$BMOF$、$AGOE$、$HCNO$是平行四边形,

所以$OM=BM$,$ON=NC$,$OG=AE$,$OE=AG$,

所以$\triangle GMO$的周长$+\triangle ENO$的周长$-\triangle FHO$的周长$=OG+OM+GM+OE+ON+EN-OH-OF-FH=AE+EN+NC+BM+GM+AG-HC-FH-BF=b+c-a$.

6.【答案】40.

【解析】如答图17-2所示,连接EF,因为$\triangle ADF$与$\triangle DEF$同底等高,所以$S_{\triangle ADF}=S_{\triangle DEF}$,即$S_{\triangle ADF}-S_{\triangle DPF}=S_{\triangle DEF}-S_{\triangle DPF}$,即$S_{\triangle APD}=S_{\triangle EPF}=15\text{cm}^2$.



答图 17-2

同理可得$S_{\triangle BQC}=S_{\triangle EFQ}=25\text{cm}^2$,

所以阴影部分的面积为$S_{\triangle EPF}+S_{\triangle EFQ}=15+25=40\text{cm}^2$.

7.【答案】4或8.

【解析】如答图17-3所示,作$DE\perp AB$于E.

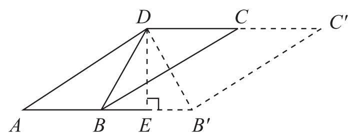
因为$\angle A=30^\circ$,所以$DE=\dfrac{1}{2}AD=2\sqrt{3}$,

所以$AE=\sqrt{3}DE=6$,

$BE=\sqrt{BD^2-DE^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$,

所以$AB=AE-BE=4$,或$AB=AE+BE=8$.

因为四边形$ABCD$是平行四边形,所以$CD=AB=4$或8.



答图 17-3

8.【答案】20.

【解析】因为$AB\parallel IL$,$IJ\parallel BC$,所以四边形$EIHB$是平行四边形,所以$S_{\triangle EHB}=S_{\triangle EIH}$,

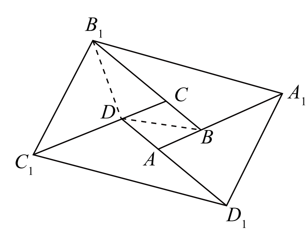
同理可得$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle EFJ}$,$S_{\triangle DFG}=S_{\triangle FKG}$,$S_{\triangle GCH}=S_{\triangle GHL}$.

所以

$$\begin{aligned}S_{四边形IJKL}&=S_{四边形EFGH}-(S_{四边形ABCD}-S_{四边形EFGH})\\&=55-(90-55)\\&=20.\end{aligned}$$

9.【答案】13^5.

【解析】如答图17-4所示,连接BD、B_1D,因为$B_1C=2BC$,所以$\triangle B_1DC$的面积是$\triangle DBC$的面积的2倍.



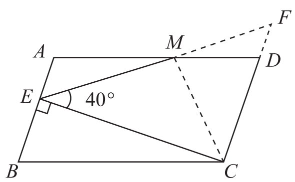
答图 17-4

又因为$C_1D=2DC$,$\triangle B_1C_1D$的面积是$\triangle B_1DC$的面积的2倍,所以$\triangle B_1C_1C$的面积是$\triangle DBC$的面积的6倍,也就是平行四边形$ABCD$的面积的3倍.依此类推,其余三个三角形的面积都是平

行四边形 $ABCD$ 面积的 3 倍，所以新的平行四边形的面积是原来平行四边形面积的 13 倍，按此规律继续下去，那么平行四边形 $A_5B_5C_5D_5$ 的面积是13^5.

10.【答案】30°.

【解析】如答图 17-5 所示，延长 EM 与 CD 的延长线交于点 F，连接 CM.因为 M 是 AD 的中点，所以 $AM=DM$.



答图 17-5

因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $AB\parallel CD$，又 $\angle BEC=90°$，所以 $\angle ECF=90°$，$\angle A=\angle MDF$.

在$\triangle AEM$ 和$\triangle DFM$ 中，$\begin{cases}\angle AEM=\angle F,\\ \angle AME=\angle DMF,\\ AM=DM,\end{cases}$

所以$\triangle AEM\cong\triangle DFM$(AAS)，

所以 $EM=FM$，所以 $CM=EM=\dfrac{1}{2}EF$，

则$\angle MEC=\angle MCE=40°$，

所以$\angle EMC=100°$，$\angle MCD=50°$.

又因为 M 为 AD 的中点，$AD=2DC$，

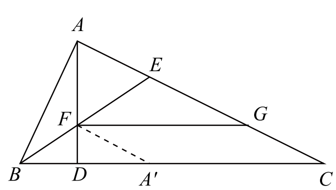
所以 $MD=CD=\dfrac{1}{2}AD$，

所以$\angle DMC=\angle DCM=50°$，

所以$\angle DME=\angle EMC+\angle DMC=100°+50°=150°$，则$\angle AME=30°$.

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11.【答案】证法 1：如答图 17-6 所示，在 BC 边上取一点 A'，使 $BA'=BA$，连接 $A'F$.



答图 17-6

因为在$\triangle A'BF$ 与$\triangle ABF$ 中，有

$$\begin{cases}BA'=BA,\\ \angle A'BF=\angle ABF,\\ BF=BF,\end{cases}$$

所以$\triangle A'BF\cong\triangle ABF$(SAS)，

所以 $A'F=AF=CG$，　①

又$\angle BA'F=\angle BAF=90°-\angle CAD=\angle C$，

所以$\angle BA'F=\angle C$，因此 $FA'\parallel GC$，　②

于是，由①和②知，四边形 $FA'CG$ 为平行四边形，故 $FG\parallel A'C$，即 $FG\parallel BC$.

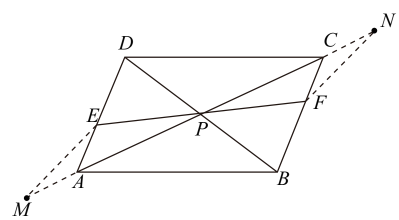
证法 2：如答图 17-6 所示，过 F 作 $FA'\parallel AC$ 交 BC 边于点 A'，则$\angle BA'F=\angle C$.

因为$\angle BAC=90°$，且 $AD\perp BC$，所以$\angle BAF=90°-\angle CAD=\angle C$，所以$\angle BA'F=\angle BAF$.

又在$\triangle A'BF$ 与$\triangle ABF$ 中，因为$\angle A'BF=\angle ABF$，$BF=BF$，所以$\triangle A'BF\cong\triangle ABF$，所以 $A'F=AF=CG$.

而 $FA'\parallel AC$，即 $FA'\parallel GC$，所以四边形 $FA'CG$ 为平行四边形，故 $FG\parallel A'C$，即 $FG\parallel BC$.

12.【答案】证明：如答图 17-7 所示，延长 AC，在 C 上方取 N，A 下方取 M，使 $AM=AE$，$CN=CF$，则由已知可得 $PM=PN$，可证$\triangle PME\cong\triangle PNF$，且$\triangle AME$ 和$\triangle CNF$ 都是等腰三角形.所以$\angle M=\angle N$，$\angle MEP=\angle NFP$，$\angle AEP=\angle PFC$，$AD\parallel BC$.



答图 17-7

可证得$\triangle PAE\cong\triangle PCF$，所以 $PA=PC$，

再证$\triangle PED\cong\triangle PFB$，得 $PB=PD$.

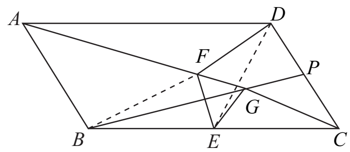
所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

13.【答案】(1) $2\sqrt{21}$.

(2) 证明：如答图 17-8 所示，连接 BF、DE.

由(1)知$\triangle CDE$ 是等边三角形，

所以 $DE=CE$，$\angle CED=60°$.



答图 17-8

因为 $BE=BF=BA$,$\angle ABC=120°$,

所以$\angle AFB=\frac{1}{2}(180°-\angle ABF)$,

$\angle BFE=\frac{1}{2}(180°-\angle EBF)$,

所以 $\angle AFE=\angle AFB+\angle BFE=\frac{1}{2}(180°-\angle ABF)+\frac{1}{2}(180°-\angle EBF)=120°$,

所以$\angle EFG=60°$.

又因为 $GF=GE$,所以$\triangle EFG$ 是等边三角形,

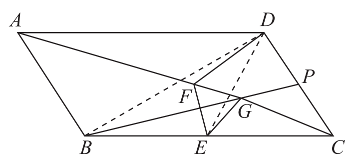
所以$\angle FEG=\angle CED=60°$,$EF=EG$,

所以 $\angle FEG-\angle DEG=\angle CED-\angle DEG$,即 $\angle DEF=\angle CEG$,

所以$\triangle DEF\cong\triangle CEG$(SAS),

所以 $CG=DF$.

【解析】(1) 如答图 17-9 所示,连接 BD、DE.



答图 17-9

因为 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AB\parallel CD$,$AB=CD$,

所以$\angle BCD=180°-\angle ABC=180°-120°=60°$,

因为 $BC=2AB$,点 E 是 BC 的中点,所以 $BE=CE=CD$,所以$\triangle CDE$ 是等边三角形,所以 $DE=CE=BE$,$\angle CDE=\angle CED=60°$,所以$\angle CBD=\angle BDE=30°$,

所以$\angle BDC=90°$.

因为 $CD=AB=5$,所以 $BC=10$,$BD=\sqrt{BC^2-CD^2}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$,

所以 $BP=\sqrt{BD^2+DP^2}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2+3^2}=2\sqrt{21}$.

14.【答案】(1) 证明:因为$\triangle ABD$、$\triangle BCE$ 都是等边三角形,

所以 $\angle DBE=\angle ABC=60°-\angle ABE$,$AB=BD$,$BC=BE$.

在$\triangle ABC$ 与$\triangle DBE$ 中,$\begin{cases}AB=DB,\\ \angle ABC=\angle DBE,\\ BC=BE,\end{cases}$

所以$\triangle ABC\cong\triangle DBE$(SAS).

所以 $AC=DE$.

又因为 $AC=AF$,所以 $DE=AF$.

同理可得 $EF=AD$.

所以四边形 $ADEF$ 是平行四边形,所以 AE 与 DF 互相平分.

(2) 当$\angle BAC=150°$时,$AE=DF$.理由如下:

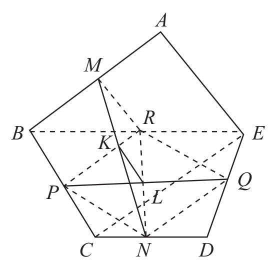
因为$\triangle ABD$ 和$\triangle ACF$ 是等边三角形,所以$\angle DAB=\angle FAC=60°$,

因为$\angle BAC=150°$,所以$\angle DAF=360°-60°-60°-150°=90°$,所以四边形 $ADEF$ 是矩形,所以 $AE=DF$,所以$\angle BAC=150°$时,$AE=DF$.

(3) 当$\angle BAC=60°$时,D、A、F 共线,

此时以 A、D、E、F 为顶点的四边形不存在.

15.【答案】证明:如答图 17-10 所示,连接 BE、CE,取 BE 的中点 R,连接 MR、RN、PR、PN、NQ、RQ.



答图 17-10

因为点 M 是 AB 的中点,点 R 是 BE 的中点,

所以 $MR\parallel AE$,$MR=\frac{1}{2}AE$,

因为 R、N、P、Q 分别为 BE、CD、BC、DE 的中点,所以 $PR\parallel CE$,$PR=\frac{1}{2}CE$,$NQ\parallel CE$,$NQ=\frac{1}{2}CE$,

所以 $PR \parallel NQ$，$PR=NQ$，

所以四边形 $PNQR$ 是平行四边形，所以 RN 与 PQ 互相平分.

因为点 L 是 PQ 的中点，所以点 L 是 RN 的中点，所以点 K 是 MN 的中点，

所以 $KL \parallel MR$，$KL=\frac{1}{2}MR$，

所以 $KL \parallel AE$，$KL=\frac{1}{4}AE$.

评注 此题主要考查平行四边形的判定与性质及三角形中位线定理的综合运用.

第 18 讲　菱形、矩形和正方形

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

1.【答案】$45°$.

【解析】在矩形 $ABCD$ 中，$AO=BO=CO=DO$，$\angle ABC=90°$.

因为 $\angle CAE=15°$，AE 平分 $\angle BAD$，

所以 $\angle BAE=\angle BEA=45°$，

所以 $AB=BE$，所以 $\angle BAC=60°$，$OA=OB$，

所以 $\triangle AOB$ 是等边三角形，

所以 $\angle BCA=30°$，$AB=\frac{1}{2}AC=BO$，

所以 $BE=BO$.

又因为 $\angle DBC=\angle ACB=30°$，在 $\triangle BOE$ 中，$\angle BOE=(180°-\angle DBC)\div 2=75°$，所以 $\angle COE=180°-60°-75°=45°$.

2.【答案】$50°$.

【解析】如答图 18-1 所示，连接 AC，延长 MN 交 PC 延长线于点 O.

因为 M 和 N 分别是边 AB 和 BC 的中点，所以 MN 为 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $MN \parallel AC$，$MN=\frac{1}{2}AC$.

在菱形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，AC 平分 $\angle BAD$，

所以在四边形 $AMOC$ 中，$AM \parallel OC$，$AC=MO$，

所以四边形 $AMOC$ 为平行四边形.

因为 $\angle BAD=100°$，所以 $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BAD=50°$，所以 $\angle MOC=\angle BAC=50°$.

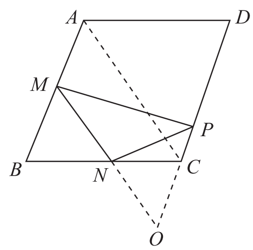
因为 $MN=\frac{1}{2}AC$，所以 $MN=ON$，所以 PN 为 $\triangle MPO$ 的中线.

因为 $MP\perp CD$ 于点 P，所以 $\angle MPO=90°$，

所以 $\triangle MPO$ 为直角三角形，

所以 $PN=ON$(直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半)，

所以 $\triangle NPO$ 为等腰三角形，所以 $\angle NPC=\angle MOC=50°$.



答图 18-1

3.【答案】$75°$.

【解析】因为 DF 平分 $\angle ADC$，所以 $\angle CDF=45°$，

所以 $\triangle CDF$ 是等腰直角三角形，所以 $CD=CF$.

因为 $\angle BDF=15°$，所以 $\angle CDO=\angle CDF+\angle BDF=45°+15°=60°$.

在矩形 $ABCD$ 中，$OD=OC$，所以 $\triangle OCD$ 是等边三角形，所以 $OC=CD$，$\angle OCD=60°$，

所以 $OC=CF$，$\angle OCF=90°-\angle OCD=90°-60°=30°$.

在 $\triangle COF$ 中，$\angle COF=\frac{1}{2}\times(180°-30°)=75°$.

4.【答案】$\frac{6}{5}$.

【解析】由题意知，四边形 $AFPE$ 是矩形，因为点 M 是矩形对角线 EF 的中点，则延长 AM 应过点 P，所以当 AP 为 $Rt\triangle ABC$ 的斜边上的高时，即 $AP\perp BC$ 时，AM 有最小值，此时 $AM=\frac{1}{2}AP$.由勾股定理知 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=5$.

因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}BC\cdot AP$，

所以 $AP=\frac{3\times 4}{5}=\frac{12}{5}$，

所以 $AM=\frac{1}{2}AP=\frac{6}{5}$.

5.【答案】180.

【解析】因为△APB 的面积为 60,△BPC 的面积为 30,P 到 AB 的距离是 P 到 BC 的距离的 2 倍,设 P 到 BC 的距离为 x,则 $x^2+(2x)^2=10^2$,解得 $x=2\sqrt{5}$.

所以 $\frac{1}{2}\cdot BC\cdot 2\sqrt{5}=30$,$BC=6\sqrt{5}$,故 $BC^2=180$,即正方形 $ABCD$ 的面积为 180.

6.【答案】$\sqrt{15}+3$.

【解析】因为阴影部分的面积与正方形 $ABCD$ 的面积之比为 2∶3,所以阴影部分的面积为 $\frac{2}{3}\times9=6$,空白部分的面积为 $9-6=3$.

由 $CE=DF$,$BC=CD$,$\angle BCE=\angle CDF=90°$,可得△$BCE$≌△$CDF$,所以△$BCG$ 的面积与四边形 $DEGF$ 的面积相等,均为 $\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}$.

因为 $\angle DCF+\angle BCG=90°$,所以 $\angle CBG+\angle BCG=90°$,即 $\angle BGC=90°$.

设 $BG=a$,$CG=b$,则 $\frac{1}{2}ab=\frac{3}{2}$,

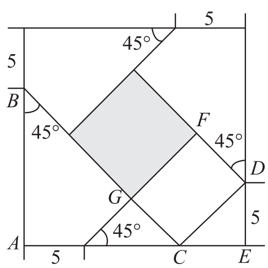
又因为 $a^2+b^2=3^2$,所以 $a^2+2ab+b^2=9+6=15$,即 $(a+b)^2=15$,

所以 $a+b=\sqrt{15}$,即 $BG+CG=\sqrt{15}$,

所以△BCG 的周长 $=\sqrt{15}+3$.

7.【答案】$20\sqrt{2}$.

【解析】如答图 18-2 所示,延长 BG 交 AE 与点 C.因为 $\angle ABC=45°$,所以△ABC 是等腰直角三角形,所以 $AB=AC$,所以 $CE=5$.



答图 18-2

因为△CED 是等腰直角三角形,所以 $CD=5\sqrt{2}$.

因为 $CD=GF$,所以中间的小正方形的边长是 $5\sqrt{2}$,因而周长是 $20\sqrt{2}$.

8.【答案】$\frac{n-1}{4}$.

【解析】由题意可得阴影部分面积等于正方形面积的 $\frac{1}{4}$,即 $\frac{1}{4}\mathrm{cm}^2$,

5 个这样的正方形重叠部分(阴影部分)的面积和为 $\frac{1}{4}\times4(\mathrm{cm}^2)$,

n 个这样的正方形重叠部分(阴影部分)的面积和为 $\frac{1}{4}\times(n-1)=\frac{n-1}{4}(\mathrm{cm}^2)$.

故答案为 $\frac{n-1}{4}$.

9.【答案】40.

【解析】在由 3×4 个小正方形组成的矩形 $ABCD$ 中,共有矩形 60 个,是正方形的有 20 个.

正方形中,边长为 1 的 12 个,边长为 2 的 6 个,边长为 3 的 2 个.

不是正方形的矩形有 40 个,其中,

两边长分别为 2 和 1 的有 17 个;

两边长分别为 3 和 1 的有 10 个;

两边长分别为 4 和 1 的有 3 个;

两边长分别为 3 和 2 的有 7 个;

两边长分别为 3 和 4 的有 1 个;

两边长分别为 4 和 2 的有 2 个.

10.【答案】$2\sqrt{5}$.

【解析】如答图 18-3 所示,延长 DF 交圆 O 于 M,连接 CO、DN、EN、MN、DO、EO.

因为 $AB\perp DM$,$DF=FN$,所以 $DF=FM$,$FD=FN=FM$,所以 $\angle DNM=90°$,所以 $\angle DNF=\angle FNM=\angle M=45°$.

因为 $\angle ENK=45°$,所以 E、N、M 共线,

所以 $\angle DOE=2\angle DME=90°$,

因为 $\angle DOF+\angle ODF=90°$,$\angle DOF+\angle EOK=90°$,所以 $\angle ODF=\angle EOK$.

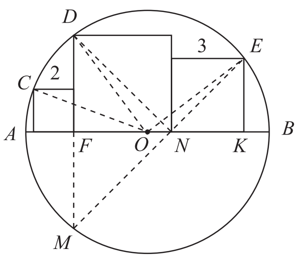
因为 $OD=OE$,$\angle DFO=\angle EKO=90°$,

所以△DOF≌△EOK,所以 $OF=EK=3$.

在 Rt△AOC 中,$CO=\sqrt{AC^2+OA^2}=\sqrt{29}$.

在 Rt△DFO 中，$DF=\sqrt{OD^2-OF^2}=\sqrt{29-9}$
$=2\sqrt{5}$.

故答案为 $2\sqrt{5}$.

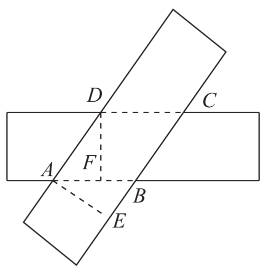


答图 18-3

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11.【答案】(1) 证明：如答图 18-4 所示，因为 $AD \parallel BC$，$DC \parallel AB$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

分别过点 A、D 作 $AE\perp BC$ 于 E，$DF\perp AB$ 于 F.



答图 18-4

因为两张矩形纸片的宽度相等，

所以 $AE=DF$.

又因为 $AE\cdot BC=DF\cdot AB=S_{\square ABCD}$，

所以 $BC=AB$.

所以平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2) 存在最小值和最大值.

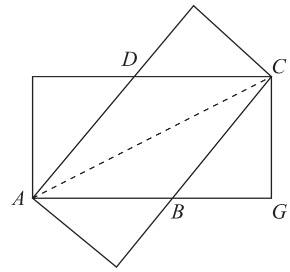
① 当 $\angle DAB=90°$ 时，菱形 $ABCD$ 为正方形，周长最小值为 8.

② 当 AC 为矩形纸片的对角线时，设 $AB=x$. 如答图 18-5 所示.

在 Rt△BCG 中，$BC^2=CG^2+BG^2$，

即 $x^2=(8-x)^2+2^2$，解得 $x=\dfrac{17}{4}$.

所以周长最大值为 $\dfrac{17}{4}\times 4=17$.



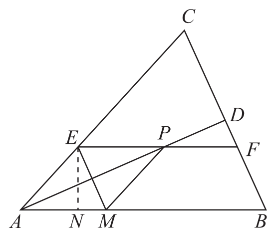
答图 18-5

12.【答案】(1) 证明：因为 $EF\parallel AB$，$PM\parallel AC$，所以四边形 $AEPM$ 为平行四边形.

因为 $AB=AC$，AD 平分 $\angle CAB$，所以 $\angle CAD=\angle BAD$.

因为 $\angle BAD=\angle EPA$，所以 $\angle CAD=\angle EPA$，所以 $EA=EP$，所以四边形 $AEPM$ 为菱形.

(2) 如答图 18-6 所示，P 为 EF 中点时，$S_{菱形AEPM}=\dfrac{1}{2}S_{四边形EFBM}$.



答图 18-6

理由如下：

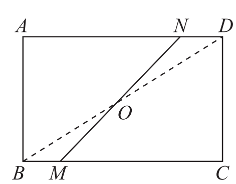
因为四边形 $AEPM$ 为菱形，所以 $AD\perp EM$.

因为 $AD\perp BC$，所以 $EM\parallel BC$.

又因为 $EF\parallel AB$，所以四边形 $EFBM$ 为平行四边形.

作 $EN\perp AB$ 于 N，则 $S_{菱形AEPM}=EP\cdot EN=\dfrac{1}{2}EF\cdot EN=\dfrac{1}{2}S_{四边形EFBM}$.

13.【答案】(1) 证明：如答图 18-7 所示，连接 BD，则 BD 过点 O.



答图 18-7

因为 $AD /\!/ BC$，所以 $\angle OBM=\angle ODN$，

又 $OB=OD$，$\angle BOM=\angle DON$，

所以 $\triangle OBM \cong \triangle ODN$，

所以 $BM=DN$.

(2) 证明：因为矩形 $ABCD$，所以 $AD /\!/ BC$，$AD=BC$.

又 $BM=DN$，所以 $AN=CM$，

所以四边形 $AMCN$ 是平行四边形，

由翻折得，$AM=CM$，所以四边形 $AMCN$ 是菱形.

(3) $2\sqrt{3}$.

【解析】(1)、(2) 略.

(3) 因为 $S_{\triangle CDN}=\frac{1}{2}DN\cdot CD$，

$S_{\triangle CMN}=\frac{1}{2}CM\cdot CD$，

又 $S_{\triangle CDN}:S_{\triangle CMN}=1:3$，所以 $DN:CM=1:3$.

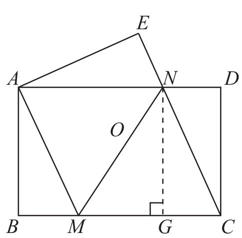
设 $DN=k$，则 $CN=CM=3k$，如答图 18-8 所示，过点 N 作 $NG\perp MC$ 于点 G.

则 $CG=DN=k$，$MG=CM-CG=2k$，$NG=\sqrt{CN^2-CG^2}=\sqrt{9k^2-k^2}=2\sqrt{2}k$，

所以 $MN=\sqrt{MG^2+NG^2}=\sqrt{4k^2+8k^2}$

$=2\sqrt{3}k$，

所以 $\frac{MN}{DN}=\frac{2\sqrt{3}k}{k}=2\sqrt{3}$.



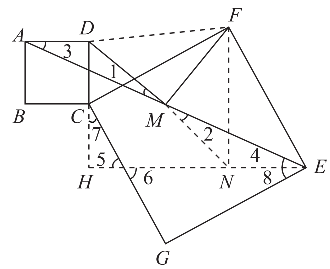
答图 18-8

14.【答案】证明：如答图 18-9 所示，过点 E 作 AD 的平行线分别交 DM、DC 的延长线于 N、H，连接 DF、FN. 所以 $\angle ADC=\angle H$，$\angle 3=\angle 4$.

因为 $AM=ME$，$\angle 1=\angle 2$，所以 $\triangle AMD \cong \triangle EMN$，

所以 $MD=MN$，$AD=EN$.

因为 $ABCD$ 和 $CGEF$ 是正方形，所以 $AD=DC$，$FC=FE$，$\angle ADC=\angle FCG=\angle CFE=90°$，$\angle 5=\angle 6=90°-\angle NEG=\angle NEF$，$DC=AD=NE$.



答图 18-9

又因为 $\angle H=90°$，所以 $\angle DCF+\angle 7=\angle 5+\angle 7=90°$. 所以 $\angle DCF=\angle 5=\angle NEF$.

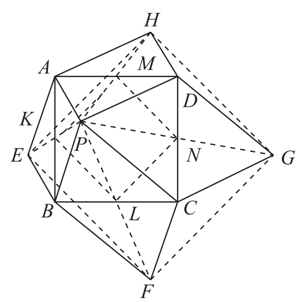
又因为 $FC=FE$，所以 $\triangle DCF \cong \triangle NEF$.

所以 $FD=FN$，$\angle DFC=\angle NFE$.

因为 $\angle CFE=90°$，所以 $\angle DFN=90°$，即 $\triangle DFN$ 为等腰直角三角形.

又 $MD=MN$，所以 $FM\perp MD$，$FM=MD$.

15.【答案】证明：如答图 18-10 所示，连接 PH、PG、PF、PE，与 AD、DC、CB、BA 交点分别为 M、N、L、K，再连接 HG、GF、FE、EH.



答图 18-10

根据平行四边形的性质，M 平分 AD 和 PH，N 平分 CD 和 PG，

因此 MN 是 $\triangle PHG$ 的中位线，所以 $HG /\!/ MN$，$HG=2MN$.

同理可证：$GF /\!/ NL$，$GF=2NL$；$FE /\!/ LK$，$FE=2LK$；$EH /\!/ KM$，$EH=2KM$.

因为顺次连接正方形 $ABCD$ 各边中点得 $MNLK$ 是正方形，

所以 $MN=NL=LK=KM$，4 个角都为 90°.

所以 $HG=GF=EF=EH$，四边形 $EFGH$ 的 4

个角也为 90°，

所以 E、F、G、H 是正方形的四个顶点.

第 19 讲　梯形、三角形和梯形的中位线

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1.【答案】$\frac{a+b+c}{2^{2020}}$.

【解析】根据中位线定理,第 1 个中点三角形的周长是原三角形的 $\frac{1}{2}$；

第 2 个中点三角形的周长是第 1 个中点三角形的 $\frac{1}{2}$；

第 3 个中点三角形的周长是第 2 个中点三角形的 $\frac{1}{2}$，

……

于是,第 2020 个中点三角形的周长为

$(\underbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\cdots\times\frac{1}{2}}_{2020个})(a+b+c)=\frac{a+b+c}{2^{2020}}$.

2.【答案】221.

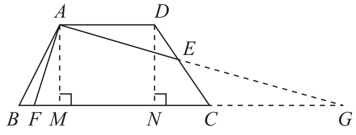
【解析】设第一排有 a 名学生,则第 n 排有 $a+n-1$,所以 $\frac{n(a+a+n-1)}{2}=3125$.

因为 a 与 n 为正整数,n 取到最大值,所以 $a=38$,$n=50$.

所以排在这等腰梯形阵最外面的一周的学生总人数是 $a+a+n-1+n-2+n-2=221$.

3.【答案】$4-2\sqrt{2}$.

【解析】如答图 19-1 所示,延长 AE 交 BC 的延长线于 G.



答图 19-1

因为 E 为 CD 中点,所以 $CE=DE$.

因为 $AD\parallel BC$,所以 $\angle DAE=\angle G=30°$.

在△ADE 和△GCE 中,$\begin{cases}\angle DAE=\angle G,\\ \angle AED=\angle GEC,\\ DE=CE,\end{cases}$

所以△ADE≌△GCE(AAS),

所以 $AD=CG=\sqrt{2}$,$AE=EG=2\sqrt{3}$,

所以 $AG=AE+EG=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$,

因为 $AE\perp AF$,$\angle AGF=\angle DAE=30°$,

所以 $AF=AG\times\frac{\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=4$,

$GF=AG\div\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\div\frac{\sqrt{3}}{2}=8$.

过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M,过点 D 作 $DN\perp BC$ 于点 N,则 $MN=AD=\sqrt{2}$.

因为四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,所以 $BM=CN$.

因为 $MG=AG\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6$.

所以 $CN=MG-MN-CG=6-\sqrt{2}-\sqrt{2}=6-2\sqrt{2}$.

因为 $AF\perp AE$,$AM\perp BC$,所以 $\angle FAM=\angle G=30°$,

所以 $FM=AF\times\frac{1}{2}=4\times\frac{1}{2}=2$,

所以 $BF=BM-MF=CN-MF=6-2\sqrt{2}-2=4-2\sqrt{2}$.

4.【答案】$3\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{2}$ 或 $10-4\sqrt{2}$.

【解析】有三种情况：

① 如答图 19-2(a)所示,当 $AE=BE$ 时,过 D 作 $DH\perp BC$ 于 H.

因为四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,所以 $BE=CH=\frac{1}{2}(BC-AD)=4$.

由勾股定理得 $AB=4\sqrt{2}$,所以 $CE=BC-BE=6$.

因为 $\angle B=\angle BAE=45°$,所以 $\angle AEB=90°$,

所以 $\angle FEC=180°-90°-45°=45°=\angle C$,

所以 $\angle EFC=180°-45°-45°=90°$,

所以由勾股定理得 $CF=EF=3\sqrt{2}$.

② 如答图 19-2(b)所示,当 $AB=AE=4\sqrt{2}$ 时,

由勾股定理求得 $BE=8$,所以 $CE=BC-BE=2$,

同理可求出 $\angle FEC=90°$,$\angle EFC=45°=\angle C$,

由勾股定理得 $CF=\sqrt{EF^2+CE^2}=2\sqrt{2}$.

③ 如答图 19-2(c)所示,当 $AB=BE=4\sqrt{2}$ 时,

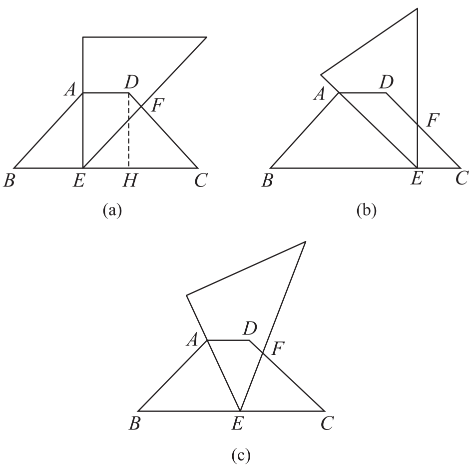
$\angle AEB=\angle BAE=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B)=67.5^\circ$,

所以$\angle FEC=180^\circ-67.5^\circ-45^\circ=67.5^\circ$.

因为 $\angle C=45^\circ$,所以 $\angle CFE=180^\circ-\angle C-\angle FEC=67.5^\circ=\angle FEC$,

所以 $CF=CE=BC-BE=10-4\sqrt{2}$,

故答案为 $3\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{2}$ 或 $10-4\sqrt{2}$.



答图 19-2

5.【答案】1.

【解析】如答图 19-3 所示,延长 AD 交 BC 于 E.

因为 $AD\perp BD$,BD 平分$\angle ABC$,

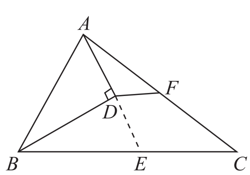
所以$\triangle ABD\cong\triangle EBD$,

所以 $BE=AB=5$.

又因为 $BC=7$,所以 $EC=BC-BE=7-5=2$.

因为 DF 为$\triangle AEC$ 的中位线,

所以 $DF=\frac{1}{2}EC=\frac{1}{2}\times2=1$.



答图 19-3

6.【答案】①②③④.

【解析】如答图 19-4 所示,过点 D 作 $DE/\!/AC$ 交 BC 的延长线于点 E.

因为 $AD/\!/BC$,所以四边形 $ACED$ 是平行四边形,所以 $CE=AD$,$AC=DE$.

因为 $AD=3$,$BC=7$,所以 $BE=BC+CE=7+3=10$.

因为 $AC\perp BD$ 于点 D,所以 $BD\perp DE$.

又因为 $AD/\!/BC$,$AB=DC$,所以梯形 $ABCD$ 是等腰梯形,所以 $AC=BD$,所以 $BD=DE$,

即 Rt$\triangle BDE$ 是等腰直角三角形,所以$\angle OBC=\angle OCB=45^\circ$,故①正确.

所以点 D 到 BE 的距离为$\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}\times10=5$,

点 O 到 BC 的距离为$\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times7=\frac{7}{2}$,

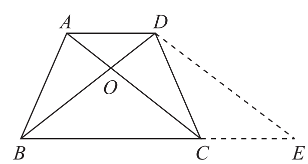
$$\begin{aligned}S_{\triangle AOB}&=S_{\triangle OCD}\\&=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle OBC}\\&=\frac{1}{2}\times7\times5-\frac{1}{2}\times7\times\frac{7}{2}\\&=\frac{21}{4},\end{aligned}$$

故②正确.

$S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(3+7)\times5=25$,故③正确.

AD 和 BC 两平行线间的距离为点 D 到 BC 的距离,为 5,故④正确.

综上所述,正确的有①②③④.



答图 19-4

7.【答案】$\frac{5}{28}$.

【解析】如答图 19-5 所示,连接 CP,设$\triangle CPE$ 的面积是 x,$\triangle CDP$ 的面积是 y.

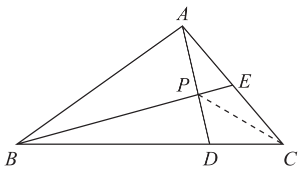
因为 $BD:DC=3:1$,E 为 AC 的中点,

所以$\triangle BDP$ 的面积是 $3y$,$\triangle APE$ 的面积是 x,$\triangle ABP$ 的面积是 $6x$.

所以 $6x+x=3y+x+y$,解得 $y=\frac{3}{2}x$.

又因为 $6x+x=\frac{1}{2}$,所以 $x=\frac{1}{14}$.

则四边形 $PDCE$ 的面积为 $x+y=\frac{5}{28}$.

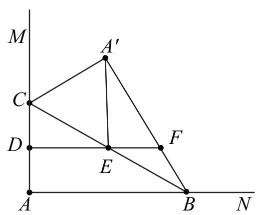


答图 19-5

8.【答案】$4\sqrt{3}$ 或 4.

【解析】当 $\triangle A'EF$ 为直角三角形时,存在两种情况:

① 当 $\angle A'EF=90°$ 时,如答图 19-6 所示.



答图 19-6

因为 $\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 关于 BC 所在直线对称,

所以 $A'C=AC=4$, $\angle ACB=\angle A'CB$.

因为点 D、E 分别为 AC、BC 的中点,所以 D、E 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

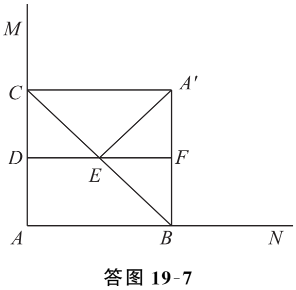
所以 $DE\parallel AB$,所以 $\angle CDE=\angle MAN=90°$,所以 $\angle CDE=\angle A'EF$,

所以 $AC\parallel A'E$,所以 $\angle ACB=\angle A'EC$,所以 $\angle A'CB=\angle A'EC$,所以 $A'C=A'E=4$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle A'CB$ 中,因为 E 是斜边 BC 的中点,所以 $BC=2A'E=8$.

由勾股定理得 $AB^2=BC^2-AC^2$,所以 $AB=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$.

② 当 $\angle A'FE=90°$ 时,如答图 19-7 所示.



答图 19-7

因为 $\angle ADF=\angle A=\angle DFB=90°$,所以 $\angle ABF=90°$,

因为 $\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 关于 BC 所在直线对称,

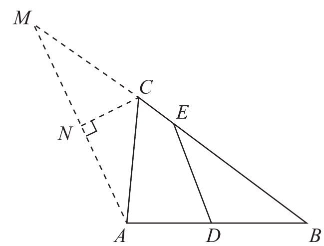
所以 $\angle ABC=\angle CBA'=45°$,

所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,所以 $AB=AC=4$.

综上所述,AB 的长为 $4\sqrt{3}$ 或 4.

9.【答案】$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【解析】如答图 19-8 所示,延长 BC 至 M,使 $CM=CA$,连接 AM,作 $CN\perp AM$ 于 N.



答图 19-8

因为 DE 平分 $\triangle ABC$ 的周长,所以 $ME=EB$,又 $AD=DB$,所以 $DE=\frac{1}{2}AM$, $DE\parallel AM$.

因为 $\angle ACB=60°$,所以 $\angle ACM=120°$.

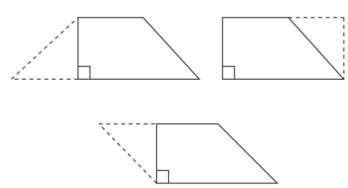
因为 $CM=CA$,所以 $\angle ACN=60°$, $AN=MN$,

所以 $AN=AC\cdot\sin\angle ACN=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $AM=\sqrt{3}$,所以 $DE=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10.【答案】等腰梯形、矩形、平行四边形.

【解析】如答图 19-9 所示,可拼成以下三种平行四边形图形:等腰梯形、矩形、平行四边形.



答图 19-9

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11.【答案】5.

【解析】如答图 19-10 所示,因为 EF 是点 B、D 的对称轴,所以 $\triangle BFE\cong\triangle DFE$,所以 DE

$=BE$.

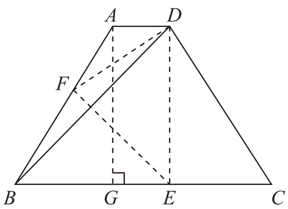
因为在$\triangle BDE$中,$DE=BE$,$\angle DBE=45°$,所以$\angle BDE=\angle DBE=45°$.

所以$\angle DEB=90°$,所以$DE\perp BC$.

在等腰梯形$ABCD$中,$AD=2$,$BC=8$,过A作$AG\perp BC$于G,则四边形$AGED$是矩形,所以$GE=AD=2$.

所以$Rt\triangle ABG\cong Rt\triangle DCE$,所以$BG=EC=3$.

所以$BE=5$.



答图 19-10

12.【答案】(1)证明:如答图19-11所示,延长CA交FM的平行线BG于G点,有$\angle G=\angle CAD$,$\angle GBA=\angle BAD$.

因为AD平分$\angle BAC$,所以$\angle BAD=\angle CAD$,所以$AG=AB$.

因为$FM\parallel AD$,所以$\angle F=\angle BAD$,$\angle FEA=\angle DAC$.

因为$\angle BAD=\angle DAC$,所以$\angle F=\angle FEA$,所以$EA=FA$,所以$GE=BF$.

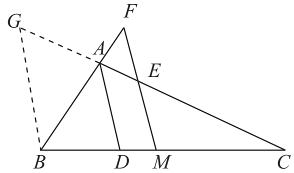
因为M为BC边的中点,即$BM=CM$,

又因为$EM\parallel GB$,所以$CE=GE$,所以$CE=BF$.

(2) $AB+AC=2EC$.

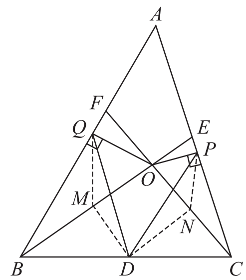
证明:因为$EA=FA$,$CE=BF$,

所以$AB+AC=AB+AE+EC=AB+AF+EC=BF+EC=2EC$.



答图 19-11

13.【答案】证明:如答图19-12所示,取OB中点M,OC中点N,连接MD、MQ、DN、PN.因为D为BC的中点,所以$DM\parallel OC$,$DM=\frac{1}{2}OC$,$DN\parallel OB$,$DN=\frac{1}{2}OB$.



答图 19-12

因为在$Rt\triangle BOQ$和$Rt\triangle OCP$中,$QM=\frac{1}{2}OB$,$PN=\frac{1}{2}OC$.

所以$DM=PN$,$QM=DN$.

$\angle QMD=\angle QMO+\angle OMD=2\angle ABO+\angle FOB$,

$\angle PND=\angle PNO+\angle OND=2\angle ACO+\angle EOC$.

因为$\angle ABO=\angle ACO$,$\angle FOB=\angle EOC$,

所以$\angle QMD=\angle PND$.

所以$\triangle QMD\cong\triangle DNP$(SAS),所以$DQ=DP$.

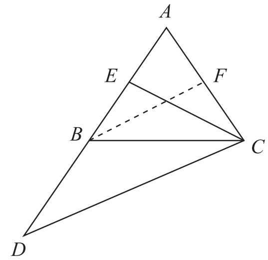
14.【答案】证明:如答图19-13所示,取AC的中点F,连接BF.

因为$AB=AC$,点E、F分别是AB、AC的中点,所以$AE=AF$.

因为$\angle A=\angle A$,$AB=AC$,所以$\triangle ABF\cong\triangle ACE$(SAS),所以$FB=EC$.

因为$BD=AB$,$AF=CF$,

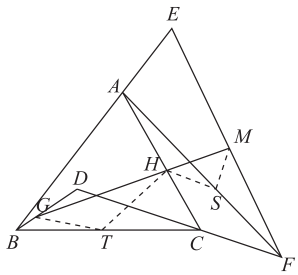
所以$CD=2FB$,所以$CD=2EC$.



答图 19-13

15.【答案】证明：如答图 19-14 所示，取 BC 中点 T，AF 的中点 S，连接 GT、HT、HS、SM.

因为 G、H、M 分别为 BD、AC、EF 的中点，所以 $MS // AE, MS=\frac{1}{2}AE, HS // CF, HS=\frac{1}{2}CF$.



答图 19-14

因为 $GT // CD, HT // AB, GT=\frac{1}{2}CD, HT=\frac{1}{2}AB$，所以 $GT // HS, HT // SM$，

所以 $\angle SHM=\angle TGH, \angle SMH=\angle THG$，

所以 $\angle TGH=\angle THG, GT=TH$，

所以 $AB=CD$.

第 20 讲　待定系数法

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

1.【答案】(1) 4；(2)365.

【解析】(1) 因为 $x^2+x-1=0$，所以 $x^2=1-x$.

所以 $x^3+2x^2+3=x(1-x)+2x^2+3=x^2+x+3=1-x+x+3=4$.

(2) 令 $x=1$，由已知等式得

$$a_{12}+a_{11}+\cdots+a_2+a_1+a_0=1, \quad ①$$

令 $x=-1$，得

$$a_{12}-a_{11}+\cdots+a_2-a_1+a_0=729, \quad ②$$

① +②得 $2(a_{12}+a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0)=730$.

故 $a_{12}+a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=365$.

2.【答案】26.

【解析】因为多项式 $2x^3-5x^2+7x-8$ 与多项式 $ax^2+bx+11$ 的乘积中含 x^4 项的系数为 $2b-5a$，含 x^3 项的系数为 $7a-5b+22$，而题干中已知该乘积没有含 x^4 的项，也没有含 x^3 的项，所以

$\begin{cases}2b-5a=0,\\7a-5b+22=0,\end{cases}$ 得 $a=4, b=10$.

所以 $a^2+b=4^2+10=26$.

3.【答案】3、−10、14.

【解析】$3x^2-4x+7$ 能表示成 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$ 的形式.

而 $a(x+1)^2+b(x+1)+c$

$=ax^2+a+2ax+bx+b+c$

$=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$.

所以 $a=3, -4=2a+b, a+b+c=7$，

解得 $a=3, b=-10, c=14$.

4.【答案】−121.

【解析】当 $x=1$ 时，得

$$a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1, \quad ①$$

当 $x=-1$ 时，得

$$-a_5+a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=-243, \quad ②$$

① +②得 $2a_4+2a_2+2a_0=-242$，

所以 $a_4+a_2+a_0=-121$.

5.【答案】−1.

【解析】$(x-2y+A)(x+y+B)=x^2+xy+Bx-2xy-2y^2-2By+Ax+Ay+AB=x^2-xy-2y^2+(B+A)x+(-2B+A)y+AB$.

因为 $x^2-xy-2y^2-x-7y-6=(x-2y+A)(x+y+B)$，

所以 $\begin{cases}B+A=-1,\\-2B+A=-7,\\AB=-6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}A=-3,\\B=2.\end{cases}$

故 $A+B$ 的值为−1.

6.【答案】16.

【解析】因为 $(2x-3y+b)(3x+y+c)=6x^2-7xy-3y^2+(2c+3b)x+(b-3c)y+bc$，

所以 $6x^2-7xy-3y^2+(2c+3b)x+(b-3c)y+bc=6x^2-7xy-3y^2+14x+y+a$，

所以 $2c+3b=14, b-3c=1, a=bc$，

联立以上三式可得 $a=4, b=4, c=1$，

故 $abc=16$.

7.【答案】−2,1.

【解析】由题意得

$(x-a)(x+2)-1=(x+3)(x+b)$,

即 $x^2+(2-a)x-2a-1=x^2+(3+b)x+3b$,

所以可得方程组$\begin{cases}2-a=3+b,\\-2a-1=3b.\end{cases}$

解得 $a=-2,b=1$.

8.【答案】9.

【解析】因为使 x^2+x-n 能分解为两个整系数一次式的乘积,所以设 $x^2+x-n=(x+a)(x+b)$,所以 $a+b=1,ab=-n$.

可得 a 和 b 符号相反,且 a 和 b 的绝对值是相邻的两个数,所以

若 $a=-1,b=2$,可得 $n=2$,

若 $a=-2,b=3$,可得 $n=6$,

若 $a=-3,b=4$,可得 $n=12$,

若 $a=-4,b=5$,可得 $n=20$,

若 $a=-5,b=6$,可得 $n=30$,

若 $a=-6,b=7$,可得 $n=42$,

若 $a=-7,b=8$,可得 $n=56$,

若 $a=-8,b=9$,可得 $n=72$,

若 $a=-9,b=10$,可得 $n=90$,

若 $a=-10,b=11$,可得 $n=110$,不符合题意,舍去.

所以可得这样的 n 有 9 个.

9.【答案】-7、-2、2、7.

【解析】因为 $-8=(-1)\times 8=(-2)\times 4=(-4)\times 2=(-8)\times 1$,则 $-m$ 的值可能为 $-1+8$,$-2+4$,$-4+2$,$-8+1$,

故 m 的值可能为 -7、-2、2、7.

10.【答案】26.

【解析】由已知可知,$f(-\frac{1}{3})=0$,$f(\frac{3}{2})=0$,由此可得

$$\begin{cases}-\frac{a}{27}+\frac{b}{9}+\frac{47}{3}-15=0,\\ \frac{27}{8}a+\frac{9}{4}b-\frac{141}{2}-15=0,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=24,\\b=2.\end{cases}$

所以 $a+b=24+2=26$.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11.【答案】存在,$p=6$,$q=25$.

【解析】假设存在,满足题设条件的 p、q,不妨设

$$(x^2+2x+5)(x^2+mx+n)=x^4+px^2+q,$$

即 $x^4+(m+2)x^3+(n+2m+5)x^2+(2n+5m)x+5n=x^4+px^2+q$,

从而可得

$$\begin{cases}m+2=0,\\n+2m+5=p,\\2n+5m=0,\\5n=q,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}m=-2,\\n=5,\\p=6,\\q=25.\end{cases}$$

所以存在常数 p、q,且 $p=6$,$q=25$,使得 x^4+px^2+q 能被 x^2+2x+5 整除.

12.【答案】$-\frac{5}{2}$.

【解析】因为 a 是方程 $2x^2+3x-1=0$ 的一个根,所以 $2a^2+3a-1=0$,即 $2a^2+3a=1$,

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{a^3(2a^2+3a)+3a^3+9a^2-5a+1}{3a-1}\\&=\frac{4a^3+9a^2-5a+1}{3a-1}\\&=\frac{2a(2a^2+3a)+3a^2-5a+1}{3a-1}\\&=\frac{3a^2-3a+1}{3a-1}\\&=\frac{\frac{3}{2}(2a^2+3a)-\frac{15}{2}a+1}{3a-1}\\&=\frac{\frac{3}{2}-\frac{15}{2}a+1}{3a-1}\\&=\frac{\frac{5}{2}-\frac{15}{2}a}{3a-1}\\&=-\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

13.【答案】$a=-6$,$b=3$.

【解析】由于 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，

假如 $f(x)$ 能被 x^2+3x+2 整除，则 $(x+1)$ 和 $(x+2)$ 必是 $f(x)$ 的因式，

因此，当 $x=-1$ 时，$f(-1)=0$，即

$$1+a+b+2=0, \quad ①$$

当 $x=-2$ 时，$f(-2)=0$，即

$$16+4a+2b+2=0, \quad ②$$

由①②联立，则有 $\begin{cases}1+a+b+2=0,\\16+4a+2b+2=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-6,\\b=3.\end{cases}$

14.【答案】$f(x)=-\dfrac{5}{3}x^3-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{11}{3}x-\dfrac{8}{3}$.

【解析】设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，

$f(x)$ 除以 x^2-1 时，商式为 $ax+m$，

$f(x)$ 除以 x^2-4 时，商式为 $ax+n$，

则

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x^2-1)(ax+m)+2x-3, \quad ①$$

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x^2-4)(ax+n)-3x-4, \quad ②$$

在式①中分别取 $x=1,-1$ 时，

$$a+b+c+d=-1, \quad ③$$

$$-a+b-c+d=-5, \quad ④$$

在式②中分别取 $x=2,-2$ 时，

$$8a+4b+2c+d=-10, \quad ⑤$$

$$-8a+4b-2c+d=2, \quad ⑥$$

联立③④⑤⑥，解得 $a=-\dfrac{5}{3}$，$b=-\dfrac{1}{3}$，$c=\dfrac{11}{3}$，$d=-\dfrac{8}{3}$.

所以所求的三次多项式为 $f(x)=-\dfrac{5}{3}x^3-\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{11}{3}x-\dfrac{8}{3}$.

15.【答案】证明：因为 $ab+cd$ 能被 $a-c$ 整除，所以设 $ab+cd=k(a-c)$，k 是整数.

$$\begin{aligned}ad+bc&=(ad+bc-ab-cd)+(ab+cd)\\&=(a-c)(d-b)+k(a-c)\\&=(a-c)(d-b+k),\end{aligned}$$

所以 $ad+bc$ 也能被 $a-c$ 整除.

第 21 讲　一次函数及其应用

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

1.【答案】$\left(8,\dfrac{3}{2}\right)$ 或 $\left(0,\dfrac{15}{2}\right)$.

【解析】因为点 A 在直线 $y=-\dfrac{3}{4}x+6$ 上，且点 A 的横坐标为 2，所以点 A 的坐标为 $\left(2,\dfrac{9}{2}\right)$.

设点 B 的坐标为 $\left(x,-\dfrac{3}{4}x+6\right)$，因为 $AB=5$，

所以 $\sqrt{(x-2)^2+\left(-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{2}\right)^2}=5$，

解得 $x=6$ 或 -2.

所以点 B 的坐标为 $\left(6,\dfrac{3}{2}\right)$ 或 $\left(-2,\dfrac{15}{2}\right)$，

所以线段 AB 向右平移 2 个单位后，点 B 的坐标为 $\left(8,\dfrac{3}{2}\right)$ 或 $\left(0,\dfrac{15}{2}\right)$.

2.【答案】90.

【解析】设甲的速度 a km/h，乙的速度 b km/h，

由图像可知，甲、乙第一次相遇是甲出发 3.5h 时，乙到达 B 地是甲出发 6.5h 时，所以

$\begin{cases}3a=1.5b,\\6a+120=4.5b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=40,\\b=80.\end{cases}$

所以甲的速度 40km/h，乙的速度 80km/h.

所以 A、B 两地距离 $=80\times 4.5=360$(km)，

所以从 B 地返回到相遇时间

$=\dfrac{120}{40+80\times(1+50\%)}=\dfrac{3}{4}$(h)，

所以当乙车第二次与甲车相遇时，甲车距离 B 地

$=120-40\times\dfrac{3}{4}=90$(km).

3.【答案】$(1,1)$.

【解析】由 $(2k+1)x+(3k-2)y-(5k-1)=0$，

得 $(2x+3y)k+(x-2y)=5k-1$.

不论 k 为何值，上式都成立.所以 $2x+3y=5$，$x-$

$2y=-1$,解得 $x=1,y=1$.

即不论 k 为何值,一次函数 $(2k+1)x+(3k-2)y-5k+1=0$ 的图像恒过 $(1,1)$.

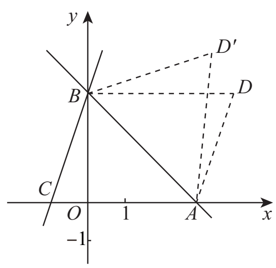
4.【答案】$(4,3)$ 或 $(3,4)$.

【解析】将点 A 的坐标代入函数表达式得 $0=-3+b$,解得 $b=3$.

故直线 AB 的表达式为 $y=-x+3$,则点 $B(0,3)$.

又 $OB:OC=3:1$,则 $OC=1$,即点 $C(-1,0)$.

① 如答图 21-1 所示,当 BD 平行 x 轴时,点 A、B、D 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 全等,则四边形 $BDAC$ 为平行四边形,则 $BD=AC=1+3=4$,则点 $D(4,3)$.



答图 21-1

② 当 BD 不平行 x 轴时,则 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABD'}$,则点 D、D' 到 AB 的距离相等,则直线 DD' // AB.设直线 DD' 的表达式为 $y=-x+n$,将点 D 的坐标代入上式并解得 $n=7$,直线 DD' 的表达式为 $y=-x+7$.

设点 $D'(x,7-x)$,以 A、B、D 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 全等,则 $BD'=BC=\sqrt{1+3^2}=\sqrt{x^2+(7-x-3)^2}$,解得 $x=3$,故点 $D'(3,4)$.

故答案为 $(4,3)$ 或 $(3,4)$.

5.【答案】$(2^n-1,2^{n-1})$.

【解析】因为点 $B_1(1,1)$,$B_2(3,2)$,所以 $A_1(0,1)$,$A_2(1,2)$,$A_3(3,4)$,

所以直线 $y=kx+b(k>0)$ 为 $y=x+1$.

则 B_n 的横坐标为 A_{n+1} 的横坐标,B_n 的纵坐标为 A_n 的纵坐标,

又 A_n 的横坐标数列为 $A_n=2^{n-1}-1$,所以纵坐标为 2^{n-1},

所以 B_n 的坐标为(A_{n+1} 的横坐标,A_n 的纵坐标)$=(2^n-1,2^{n-1})$.

6.【答案】9 或 15.

【解析】因为 $y=kx+m$ 经过点 $A(a,a)$ 和 $B(b,8b)$,

所以代入直线 AB 解析式可得 $\begin{cases}ka+m=a,\\kb+m=8b,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{m}{k-1},\\b=-\dfrac{m}{k-8},\end{cases}$

所以 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{-\dfrac{m}{k-8}}{-\dfrac{m}{k-1}}=\dfrac{k-1}{k-8}=1+\dfrac{7}{k-8}$.

因为 $a>0,b>0$,且 $\dfrac{b}{a}$ 为整数,所以 $k-8=1$ 或 7,

则 $k=9$ 或 $k=15$.

7.【答案】0.

【解析】当 $x=1$ 时,

$$f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1; \qquad ①$$

当 $x=-1$ 时,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)-f(2)=1. \qquad ②$$

联立①②求解可得 $f(2)=0,f(\dfrac{1}{2})=1$.

故答案为 0.

8.【答案】$y=\dfrac{120-15x}{2}(6\leqslant x\leqslant 8)$ 或 $y=\dfrac{6x+10}{5}(0\leqslant x\leqslant \dfrac{65}{6})$.

【解析】① 当长方体实心铁块的棱长为 10cm 和 $y$cm 的那一面平放在长方体的容器底面时,则铁块浸在水中的高度为 8cm,

此时,水位上升了 $(8-x)$cm$(x<8)$,铁块浸在水中的体积为 $10\times 8\times y=80y(\text{cm}^3)$,

所以 $80y=30\times 20\times(8-x)$,即 $y=\dfrac{120-15x}{2}$.

因为 $y\leqslant 15$,所以 $x\geqslant 6$,

所以 $y=\dfrac{120-15x}{2}(6\leqslant x\leqslant 8)$.

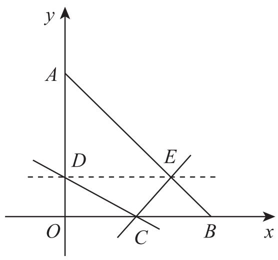
② 当长方体实心铁块的棱长为 10cm 和 10cm 的那一面平放在长方体的容器底面时,同①的方法得 $y=\dfrac{6x+10}{5}(0\leqslant x\leqslant \dfrac{65}{6})$.

故答案为 $y=\dfrac{120-15x}{2}(6\leqslant x\leqslant 8)$ 或 $y=\dfrac{6x+10}{5}$ $(0\leqslant x\leqslant\dfrac{65}{6})$.

9.【答案】$-\dfrac{1}{2}$ 或 1.

【解析】令 $y=0$,得到 $ax-a=0$,解得 $x=1$.

作图如答图 21-2 所示,点 C 的坐标为(1,0).



答图 21-2

① 当直线 $y=ax-a$ 与 y 轴交于点 D 时,$S_{\triangle ODC}=\dfrac{1}{8}S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=\dfrac{1}{4}$.

而 $OC=1$,所以点 D 的坐标为$(0,\dfrac{1}{2})$,将点 D 的坐标代入 $y=ax-a$ 中,得 $a=-\dfrac{1}{2}$.

② 过点 D 作 x 轴的平行线,交 AB 于点 E,作直线 CE.

因为△CEB 和△ODC 的面积相等,因此直线 CE 也是符合条件的直线.

因为直线 AB 的解析式为 $y=-x+2$,所以点 E 的坐标为$(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2})$.

将点 E 的坐标代入 $y=ax-a$ 中,得 $a=1$.

综上所述,$a=-\dfrac{1}{2}$ 或 $a=1$.

10.【答案】$y=\dfrac{13}{5}x-\dfrac{1}{5}$ 或 $y=-\dfrac{13}{5}x-\dfrac{14}{5}$.

【解析】根据题意,

① 当 $k>0$ 时,y 随 x 增大而增大,

所以当 $x=-3$ 时,$y=-8$;

当 $x=2$ 时,$y=5$,

所以 $\begin{cases}-3k+b=-8,\\2k+b=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{13}{5},\\b=-\dfrac{1}{5},\end{cases}$

所以函数解析式为 $y=\dfrac{13}{5}x-\dfrac{1}{5}$;

② 当 $k<0$ 时,y 随 x 增大而减小,

所以当 $x=2$ 时,$y=-8$;

当 $x=-3$ 时,$y=5$,

所以 $\begin{cases}-3k+b=5,\\2k+b=-8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\dfrac{13}{5},\\b=-\dfrac{14}{5},\end{cases}$

所以函数解析式为 $y=-\dfrac{13}{5}x-\dfrac{14}{5}$.

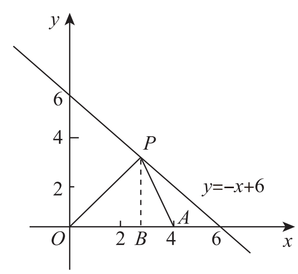
因此,函数解析式为 $y=\dfrac{13}{5}x-\dfrac{1}{5}$ 或 $y=-\dfrac{13}{5}x-\dfrac{14}{5}$.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11.【答案】(1) $S=12-2x$;(2) $P(1,5)$;

(3) $P(2,4)$.

【解析】(1) 过 P 作 $PB\perp x$ 轴,交 x 轴于点 B,如答图 21-3 所示.



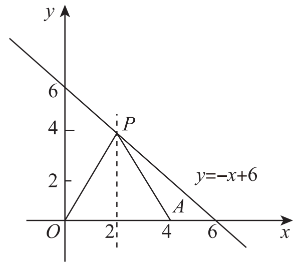
答图 21-3

因为 $P(x,y)$,且 P 在直线 $y=6-x$ 上,所以 $y=6-x$,即 $P(x,6-x)$.

所以 $PB=6-x$,因为 $A(4,0)$,所以 $OA=4$,故△OPA 的面积 S 与 x 的函数解析式为 $S=\dfrac{1}{2}OA\cdot PB=2(6-x)=12-2x$.

(2) 当 $S=10$ 时,$12-2x=10$,解得 $x=1$,此时 P 坐标为(1,5).

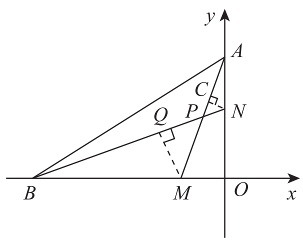
(3) 作线段 OA 的垂直平分线,交直线 $y=6-x$ 于点 P,连接 OP、AP,如答图 21-4 所示,△POA 是以 OA 为底边的等腰三角形,把 $x=2$ 代入直线 $y=6-x$ 得 $y=6-2=4$,此时 P 坐标为(2,4).



答图 21-4

12.【答案】(1) $y=\frac{3}{4}x+3$;(2) $\frac{13}{10}$;

(3) 证明:过 N 作 $NC\perp AM$,过 M 作 $MQ\perp BN$,如答图 21-5 所示.



答图 21-5

因为 $P\left(-\frac{2}{5},\frac{9}{5}\right)$,$B(-4,0)$,

所以 $BP=\sqrt{\left(-\frac{2}{5}+4\right)^2+\left(\frac{9}{5}-0\right)^2}=\frac{9\sqrt{5}}{5}$.

所以 $S_{\triangle BMP}=\frac{1}{2}BP\cdot QM$

$=\frac{1}{2}\times\frac{9\sqrt{5}}{5}\times QM$

$=\frac{1}{2}\times3\times\frac{9}{5}$,

即 $QM=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

在 Rt$\triangle BMQ$ 中,$BM=3$,$QM=\frac{3\sqrt{5}}{5}$,

根据勾股定理得 $BQ=\sqrt{BM^2-QM^2}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

则 $PQ=BP-BQ=\frac{9\sqrt{5}}{5}-\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{5}}{5}=QM$,

所以$\triangle PQM$ 为等腰直角三角形,

所以$\angle QPM=45°$,

所以$\angle CPN=\angle QPM=45°$.

又因为$\angle PCN=90°$,所以 $PN=\sqrt{2}NC$.

【解析】(1) 由 $M(-1,0)$,得到 $OM=1$.

在 Rt$\triangle AOM$ 中,$OM=1$,$AM=\sqrt{10}$,

根据勾股定理得 $AO=\sqrt{AM^2-OM^2}=3$,所以 $A(0,3)$.

又因为 $AO=BM=3$,$OM=1$,

所以 $OB=OM+MB=4$,即 $B(-4,0)$.

将 A 与 B 坐标代入 $y=kx+b$ 中得$\begin{cases}b=3,\\-4k+b=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k=\frac{3}{4},\\b=3,\end{cases}$则一次函数解析式为 $y=\frac{3}{4}x+3$.

(2) 因为 $AN=OM=1$,$OA=3$,所以 $ON=3-1=2$,即 $N(0,2)$.

设直线 BN 解析式为 $y=mx+n$,将 N 与 B 坐标代入得$\begin{cases}-4m+n=0,\\n=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=\frac{1}{2},\\n=2,\end{cases}$则直线 BN 解析式为 $y=\frac{1}{2}x+2$.

同理,直线 AM 解析式为 $y=3x+3$,联立两解析式得$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+2,\\y=3x+3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-\frac{2}{5},\\y=\frac{9}{5},\end{cases}$

即 $P\left(-\frac{2}{5},\frac{9}{5}\right)$.

则 $S_{\text{四边形}PMON}=S_{\triangle BON}-S_{\triangle BMP}$

$=\frac{1}{2}OB\cdot ON-\frac{1}{2}BM\cdot|y_P|$

$=\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times3\times\frac{9}{5}$

$=\frac{13}{10}$.

13.【答案】(1) $W=-800x+17200$,13200,10000;

(2) $W=-300(x+y)-200x+17200$,14200,9800.

【解析】(1)从 A 市、B 市各调 x 台到 D 市,则从 C 市可调 $18-2x$ 台到 D 市,从 A 市调 $10-x$ 台到 E 市,从 B 市调 $10-x$ 台到 E 市,从 C 市调 $8-(18-2x)=2x-10$ 台到 E 市,其中每一次调动都需要大于或等于 0,可知 x 的取值范围为 $5\leqslant x\leqslant9$.

$W=200x+300x+400(18-2x)+800(10-x)+700(10-x)+500(2x-10)=-800x+17200$，可知 $k=-800<0$.

当 $x=5$ 时，$W=13200$，所以 W 的最大值为 13200 元.

当 $x=9$ 时，$W=10000$，W 的最小值为 10000 元.

(2) 当从 A 市调 x 台到 D 市，B 市调 y 台到 D 市，可知从 C 市调 $18-x-y$ 到 D 市，从 A 市调 $10-x$ 台到 E 市，从 B 市调 $10-y$ 台到 E 市，从 C 市调 $8-(18-x-y)=x+y-10$ 台到 E 市.

可得 $10\leqslant x+y\leqslant 18$，$0\leqslant x\leqslant 10$，$0\leqslant y\leqslant 10$.

$$W=200x+300y+400(18-x-y)+800(10-x)+700(10-y)+500(x+y-10)=-300(x+y)-200x+17200.$$

当 $x+y=10$，$x=0$ 时，$W=14200$，W 的最大值为 14200.

当 $x+y=18$，$x=10$ 时，$W=9800$，W 的最小值为 9800.

14.【答案】(1)证明：因为 $AD\perp DE$，$BE\perp DE$，所以 $\angle D=\angle E=90^\circ$.

因为 $\angle ACB=90^\circ$，所以 $\angle ACD=90^\circ-\angle BCE=\angle CBE$，且 $CA=BC$，$\angle D=\angle E=90^\circ$，

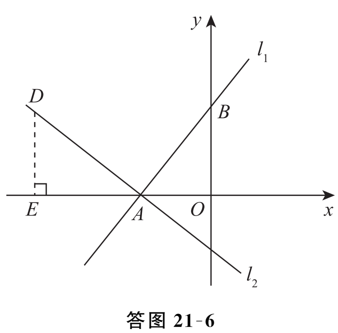
所以 $\triangle CDA\cong\triangle BEC$(AAS).

(2) $y=-\frac{3}{4}x-\frac{9}{4}$.

(3) $P(4,0)$ 或 $P(-4,0)$.

【解析】(1) 略.

(2) 如答图 21-6 所示，在 l_2 上取点 D，使 $AD=AB$，过点 D 作 $DE\perp OA$，垂足为 E.



答图 21-6

因为直线 $y=\frac{4}{3}x+4$ 与坐标轴交于点 A、B，

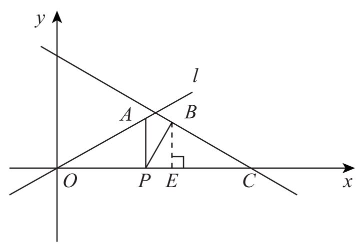
所以 $A(-3,0)$，$B(0,4)$，所以 $OA=3$，$OB=4$.

由(1)得 $\triangle BOA\cong\triangle AED$，所以 $DE=OA=3$，$AE=OB=4$，所以 $OE=7$，所以 $D(-7,3)$.

设 l_2 的解析式为 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}3=-7k+b,\\0=-3k+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{3}{4},\\b=-\frac{9}{4}.\end{cases}$

所以直线 l_2 的函数表达式为 $y=-\frac{3}{4}x-\frac{9}{4}$.

(3) ① 若点 P 在 x 轴正半轴，如答图 21-7 所示，过点 B 作 $BE\perp OC$，



答图 21-7

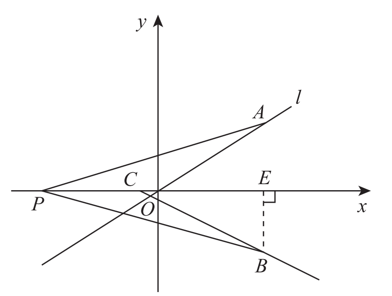
因为 $BE=2$，$\angle BCO=30^\circ$，$BE\perp OC$，所以 $BC=4$.

因为将线段 AP 绕点 P 顺时针旋转 30° 得到 BP，所以 $AP=BP$，$\angle APB=30^\circ$.

因为 $\angle APC=\angle AOC+\angle OAP=\angle APB+\angle BPC$，所以 $\angle OAP=\angle BPC$，且 $\angle AOP=\angle PCB=30^\circ$，$AP=BP$，

所以 $\triangle OAP\cong\triangle CPB$(AAS)，所以 $OP=BC=4$，所以点 $P(4,0)$.

② 若点 P 在 x 轴负半轴，如答图 21-8 所示，过点 B 作 $BE\perp OC$.



答图 21-8

因为 $BE=2$，$\angle BCO=30^\circ$，$BE\perp OC$，所以 BC

$=4$.

因为将线段 AP 绕点 P 顺时针旋转 $30°$ 得到 BP，所以 $AP=BP$，$\angle APB=30°$.

因为 $\angle APE+\angle BPE=30°$，$\angle BCE=30°=\angle BPE+\angle PBC$，所以$\angle APE=\angle PBC$.

因为 $\angle AOE=\angle BCO=30°$，所以 $\angle AOP=\angle BCP=150°$，且$\angle APE=\angle PBC$，$PA=PB$，

所以$\triangle OAP\cong\triangle CPB$(AAS)，所以 $OP=BC=4$，所以点$P(-4,0)$.

综上所述，点 P 坐标为$(4,0)$或$(-4,0)$.

15.【答案】(1) $OB=3$；(2) $F(6,-6)$；

(3) $E(-2,0)$.

【解析】(1) 对于直线 $y=-\frac{3}{4}x+6$，令 $x=0$，得到 $y=6$，可得 $A(0,6)$.

令 $y=0$，得到 $x=8$，可得 $D(8,0)$.

所以 $AC=AO=6$，$OD=8$，$AD=\sqrt{OA^2+OD^2}=10$，

所以 $CD=AD-AC=4$.

设 $BC=OB=x$，则 $BD=8-x$.

在 $Rt\triangle BCD$ 中，因为 $BC^2+CD^2=BD^2$，所以有 $x^2+4^2=(8-x)^2$，解得 $x=3$，所以 $B(3,0)$.

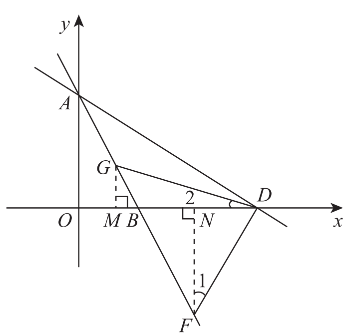
所以 $OB=3$.

(2) 设直线 AB 的解析式为 $y=kx+6$，

由(1)知 $B(3,0)$，所以 $3k+6=0$，解得 $k=-2$，

所以直线 AB 的解析式为 $y=-2x+6$.

如答图 21-9 所示，作 $GM\perp x$ 轴于 M，$FN\perp x$ 轴于 N.



答图 21-9

因为$\triangle DFG$ 是等腰直角三角形，所以 $DG=FD$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle DMG=\angle FND=90°$，

所以$\triangle DMG\cong\triangle FND$(AAS)，

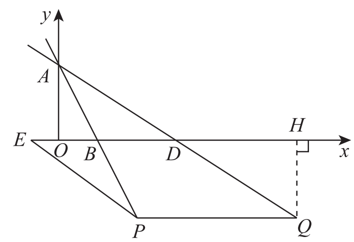
所以 $GM=DN$，$DM=FN$.

设 $GM=DN=m$，$DM=FN=n$，

因为 G、F 在直线 AB 上，则 $m=-2(8-n)+6$，$-n=-2(8-m)+6$，

解得 $m=2$，$n=6$，所以 $F(6,-6)$.

(3) 如答图 21-10 所示，设 $Q(a,-\frac{3}{4}a+6)$.



答图 21-10

因为 $PQ\parallel x$ 轴，且点 P 在直线 $y=-2x+6$ 上，所以$P\left(\frac{3}{8}a,-\frac{3}{4}a+6\right)$，所以 $PQ=\frac{5}{8}a$.

作 $QH\perp x$ 轴于 H.

所以 $DH=a-8$，$QH=\frac{3}{4}a-6$，所以$\frac{QH}{DH}=\frac{3}{4}$.

由勾股定理可知 $QH:DH:DQ=3:4:5$，

所以 $QH=\frac{3}{5}DQ=\frac{3}{8}a$，所以$\frac{3}{8}a=\frac{3}{4}a-6$，解得 $a=16$，所以 $Q(16,-6)$，$P(6,-6)$.

因为 $ED\parallel PQ$，$ED=PQ$，$D(8,0)$，所以 $E(-2,0)$.

第 22 讲　类比与猜想

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

1.【答案】5958.

【解析】先考虑一元的情形，若正数 a 满足 $a^2(a-1)=a(a-1)$，移项可得$a(a-1)^2=0$.又由 $a>0$，所以 $a=1$.再回到原题，通过移项可得 $a(a-1)^2+b(b-1)^2+c(c-1)^2=0$.又由 $a,b,c>0$ 可知 $a=b=c=1$.故答案为 5958.

2.【答案】$\underbrace{33\cdots3}_{1010个3}$.

【解析】由 $\sqrt{11-2}=3$，$\sqrt{1111-22}=33$ 猜想

$$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}-\underbrace{22\cdots2}_{1010个2}}=\underbrace{33\cdots3}_{1010个3}.$$

事实上，

$$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}-\underbrace{22\cdots2}_{1010个2}}=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{1010个1}\times(\underbrace{100\cdots01}_{1009个1}-2)}$$

$$=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{1010个1}\times\underbrace{99\cdots9}_{1010个9}}=\underbrace{33\cdots3}_{1010个3}.$$

3.【答案】89.

【解析】经计算可知 $a_1=1, a_2=2, a_3=3, a_4=5, a_5=8$，观察这一列数的规律，不难发现 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$.事实上，迈到第 n 级台阶的前一步一定是在第 $n-1$ 级台阶或者第 $n-2$ 级台阶，从而必有 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$.于是计算可得 $a_{10}=89$.

4.【答案】$\dfrac{n^2-n}{2}$.

【解析】设过平面上 n 个点按题目要求最多可以画 a_n 条直线.当平面上有两个点时，有 $a_2=1$.当平面上增加一个点时，这个点最多与前面两个点组成两条直线，所以 $a_3=1+2=3$.依此类推，在平面上已有$n-1$个点的情况下再增加一个点，这个点与前面 $n-1$ 个点最多组成 $n-1$ 条直线，所以 $a_n=a_{n-1}+n-1$.综上可以得到 $a_n=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n^2-n}{2}$.

5.【答案】$\dfrac{n^2+n+2}{2}$.

【解析】设平面上的 n 条直线最多把平面分成 a_n 个部分，则 $a_0=1, a_1=2, a_2=4$.当平面上出现第三条直线时，这条直线最多与前面两条直线相交成两个点并被分成三个部分，故最多增加三个平面部分，故 $a_3=a_2+3$.依此类推，在平面上已有$n-1$条直线的情况下再增加一条直线，这条直线最多与前面的 $n-1$ 条直线相交得到 $n-1$ 个交点，这 $n-1$ 个交点把该条直线分为 n 个部分，这 n 个部分最多为平面多增加 n 个部分.所以$a_n=a_{n-1}+n$.从而得到 $a_n=n+(n-1)+\cdots+1+a_0=\dfrac{n^2+n+2}{2}$.

6.【答案】2.

【解析】由已知，$m^2-2m-1=0, n^2+2n-1=0$，所以 m 和 $-n$ 是一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个根.又 $m+n\neq 0$，所以 $m\neq -n$.故 $m+(-n)=2, -mn=-1$，进而 $m-n=2, mn=1$.所以 $m^2n-mn^2=mn(m-n)=2$.

7.【答案】$\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

【解析】通过计算发现

$1\times2=\dfrac{1}{3}\times1\times2\times3$，

$1\times2+2\times3=\dfrac{1}{3}\times2\times3\times4$，

$1\times2+2\times3+3\times4=\dfrac{1}{3}\times3\times4\times5$.

从而可以得到 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n\times(n+1)=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

8.【答案】$\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

【解析】通过计算发现

$1\times2\times3=\dfrac{1}{4}\times1\times2\times3\times4$，

$1\times2\times3+2\times3\times4=\dfrac{1}{4}\times2\times3\times4\times5$，

…

所以类比可以得到 $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\cdots+n\times(n+1)\times(n+2)=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

9.【答案】674.

【解析】当只有 3 个数 1、2、3 时，只能取 1 个数；

当有 4 个数 1、2、3、4 时，也只能取 1 个数；

……

如此尝试下去，会发现两点：①相邻的两个数不能同时选，因为这两个数的差是 1，能够整除所有的数；②差为 2 的两个数也不能选，因为这两个数的和也必是偶数，能被其差 2 整除.这提示我们对 1，2，…，2020 进行分组：(1，2，3)，(4，5，6)，…，(2017，2018，2019)，(2020).根据前面的讨论，这 674 组数里面每组数至多取一个，所以最多能取 674 个数.而 1，4，7，…，2017，2020 这 674 个数满足要求，所以最多能取 674 个数.

10.【答案】49.

【解析】先考虑圆周上放置 4 个数的情况，写出一个在圆周上排列的例子：$-8,-3,-6,1$(从左至右在圆周上按顺时针排列，下同).再写出 6 个数的例子：$-11,-5,-7,1,-9,1$.在尝试写这些数的过程中，有三点值得注意：

(1) 猜想正数的个数不到总数的一半.

(2) 从圆周上最小的那个数顺时针数的前两个数都是负数.

(3) 不存在两个非负数相邻.否则，这两个数逆时针数的第一个数为正数，由此得到所有的数都是非负数.但是其中最小数不可能大于接下去的两个数的和.

接下来考虑 100 个数的情况：由(3)知，至多有 50 个正数，若恰有 50 个正数，则这些正数和负数相间排列，又由(2)知，这是不可能的，所以至多 49 个正数.下面给出 49 个正数的例子：

$-200,1,-202,1,-204,1,-206,1,\cdots,-296,1,-298,-99$.

二、解答题(每题 10 分，共 50 分)

11.【思路点拨】考虑二元的情形，若 $a\neq b$，则 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{ab}-\frac{1}{ba}=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2>0$，于是 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}>\frac{1}{ab}+\frac{1}{ba}$.

【证明】因为 a、b、c、d 为不全相等的非零实数，所以

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}-\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}-\frac{1}{cd}-\frac{1}{da}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)^2+\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{a}\right)^2\right]>0,$$

故命题成立.

12.【思路点拨】通过 $12=3\times4$，$1122=33\times34$ 猜测 $\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}\underbrace{22\cdots2}_{2020个2}=\underbrace{33\cdots3}_{2020个3}\times\underbrace{33\cdots3}_{2019个3}4$.

【证明】$\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}\underbrace{22\cdots2}_{2020个2}=\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}\times1\underbrace{00\cdots0}_{2019个0}2=\underbrace{11\cdots1}_{2020个1}\times3\times\underbrace{33\cdots3}_{2019个3}4=\underbrace{33\cdots3}_{2020个3}\times\underbrace{33\cdots3}_{2019个3}4$.故命题成立.

13.【思路点拨】欲证不等式的形式与一元二次方程的判别式的结构类似，可构造二次函数.

【证明】若 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，命题是显然成立的.

若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为 0，考虑抛物线

$y=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$，

因为该抛物线可以改写成

$y=(a_1^2x^2-2a_1b_1x+b_1^2)+(a_2^2x^2-2a_2b_2x+b_2^2)+\cdots+(a_n^2x^2-2a_nb_nx+b_n^2)$，

即 $y=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2\geqslant0$.

故 $y=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant0$，

所以 $4(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leqslant0$，

进而 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$.

14.【答案】5.

【解析】$y=\sqrt{(x-0)^2+(2x-3)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(2x-0)^2}$，所以 y 可以看成平面直角坐标系中，在直线 $y=2x$ 上的点 $P(x,2x)$ 到两点 $(0,3)$ 和 $(4,0)$ 的距离之和.故 y 的最小值是 5.

15.【思路点拨】如果圆桌小到只能放下一枚硬币，那么先放的一方是必胜的.对于大桌的情况，可以考虑利用中心对称.

【答案】先放硬币的一方有必胜策略，策略如下：先把硬币放到圆桌的圆心处，待后放的一方放好硬币后，把硬币放在该硬币关于圆桌圆心中心对称的位置上，依此原则继续放硬币就能获胜.

第 23 讲　从整体上看问题

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

1.【答案】26.

【解析】如果按水草生长的速度，先算出到第 28 天长满池塘有多少棵水草，然后再计算从 4 棵开始，经多少天才发展到那么多棵，这样做可以求得答数.但计算量太大，从整体上思考，问题就变得

非常简单.事实上,1 棵水草经 2 天后就变成 4 棵水草.因此,4 棵水草经过 $28-2=26$ 天就长满了水池.

2.【答案】7.

【解析】直接求出 x 的值再代入所求式子太麻烦,可以将 $x^2-\frac{4}{3}x$ 看成一个整体.据已知条件 $3x^2-4x+6=9$,所以 $3x^2-4x=3$,故 $x^2-\frac{4}{3}x=1$,进而 $x^2-\frac{4}{3}x+6=7$.

3.【答案】4096.

【解析】30 个数的和等于$(8+12+14+10+20)\times(9+11+7+15+3+19)=4096$.

4.【答案】48.

【解析】设 a、b、c、d 分别表示原来的四个数,则依题意的计算方式,所得的四个数为$\frac{a+b+c}{3}+d$、$\frac{b+c+d}{3}+a$、$\frac{c+d+a}{3}+b$、$\frac{d+a+b}{3}+c$.于是,有

$\frac{a+b+c}{3}+d+\frac{b+c+d}{3}+a+\frac{c+d+a}{3}+b+\frac{d+a+b}{3}+c=86+92+100+106$.

故 $2a+2b+2c+2d=384$,所以$\frac{a+b+c+d}{4}=48$.

从而原来四个数的平均数是 48.

5.【答案】3360.

【解析】分解质因数 $1188=2^2\times3^3\times11$.如果将 1188 的所有因数一一列举出来再求和,虽然可以得到结果,但计算量较大.我们先从整体上分析,看能否找到简单的计算方法.因 1188 的所有不同的质因数是 2、3、11,所以 1188 的因数是取或不取或取若干个的乘积.注意到 1 是所有正整数的约数,将 1188 的基本正因数分为三组:$(1,2,2^2)$,$(1,3,3^2,3^3)$,$(1,11)$.从每一组数中取出一个数来相乘(取 1 时,相当于没有从这组数中取出数来),所有不同乘积的和,即是 1188 所有约数之和.综上,1188 的所有正因数的和是$(1+2+2^2)\times(1+3+3^2+3^3)\times(1+11)=3360$.

6.【答案】20.

【解析】由已知,$S_{\triangle APE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABP}$,$S_{\triangle PHD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ADP}$,$S_{\triangle BFP}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCP}$,$S_{\triangle CGP}=\frac{1}{3}S_{\triangle CDP}$,把四个式子相加,可得 $S_{\text{阴影}}=\frac{1}{3}S_{\text{矩形}ABCD}=\frac{1}{3}\times10\times6=20$.

7.【答案】-1.

【解析】因为 $x=\sqrt{3}-1$,所以$(x+1)^2=(\sqrt{3})^2$,则 $x^2+2x=2$.

原式$=\frac{3-2(x^2+2x)}{(x^2+2x)-1}=\frac{3-2\times2}{2-1}=-1$.

8.【答案】$\frac{2}{5}$.

【解析】$3\times6\times9=3^3\times1\times2\times3$,

$5\times10\times15=5^3$,

$7\times14\times21=7^3\times1\times2\times3$,

所以原式的分子等于 $1\times2\times3\times(1^3+3^3+5^3+7^3)$,类似地,原式的分母等于 $1\times3\times5\times(1^3+3^3+5^3+7^3)$.

所以原式的值为$\frac{2}{5}$.

9.【答案】-3.

【解析】整体上对式子变形,因为,

$\frac{bc+ac}{ab}+\frac{ab+ac}{bc}+\frac{cb+ab}{ca}$

$=\frac{bc}{ab}+\frac{ac}{ab}+\frac{ab}{bc}+\frac{ac}{bc}+\frac{bc}{ca}+\frac{ab}{ca}$

$=\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}$

$=\frac{c+b}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$,

且 $a+b+c=0$,所以 $a+b=-c$,$a+c=-b$,$b+c=-a$.

故原式$=-1+(-1)+(-1)=-3$.

10.【答案】$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\frac{11}{6}\sqrt{6}$.

【解析】将已知等式迭乘,可得$(x_1x_2x_3x_4x_5x_6)^4=6^4$,又由 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6 均是正数,可以得到 $x_1x_2x_3x_4x_5x_6=6$,进而可得 $x_1=\sqrt{6}$,$x_2=\sqrt{3}$,$x_3=\sqrt{2}$,$x_4=\frac{\sqrt{6}}{2}$,$x_5=1$,$x_6=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

所以计算可知 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\frac{11}{6}\sqrt{6}$.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11.【答案】$x_1=-\frac{1}{3}$,$x_2=2$.

【解析】设$\frac{x+1}{x}=t$,则原方程可化为 $2t^2+t-6=0$.解得 $t_1=-2$,$t_2=\frac{3}{2}$.所以$\frac{x+1}{x}=-2$ 或者$\frac{x+1}{x}=\frac{3}{2}$,所以 $x_1=-\frac{1}{3}$,$x_2=2$.

经检验,$x_1=-\frac{1}{3}$,$x_2=2$ 是原方程的解.

12.【答案】12.

【解析】因为 $x^2+xy=3$,$xy+y^2=-2$,所以 $2x^2-xy-3y^2=2(x^2+xy)-3(xy+y^2)=12$.

13.【答案】证明:由已知,$x+y+z=a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c+\pi>a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c+3$,所以 $x+y+z>(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\geqslant 0$,这说明 x、y、z 这三个数的和是正数,所以 x、y、z 中必然存在一个正数.

14.【答案】难题比容易题多,多 20 道.

【解析】设共有 x 道难题,y 道容易题,z 道中等题.由于难题只有一个人能解出,所以三人共解难题 x 道;容易题有三人都能解出,所以三人共解容易题 $3y$ 道;中等题有两个人能解出,所以共解中等题 $2z$ 道.

根据题意的方程组$\begin{cases}x+y+z=100,\\x+3y+2z=180,\end{cases}$本题比较难题与容易题相差多少道,可将 $x-y$ 看作一个整体,注意到 $x-y=2(x+y+z)-(x+3y+2z)=20$.所以难题比容易题多,多 20 道.

15.【答案】不能,我们用反证法证明这个结论.如果可以按要求排成,那么每排中都有一个孩子的号码数等于同排中其余孩子号码数的和,那么每一排中各号码数之和都是某一个孩子号码数的 2 倍,是个偶数.所以这 98 个号码数的总和是个偶数,但是这 98 个数的总和为 $1+2+\cdots+98=99\times49$ 是个奇数,矛盾!所以不能按要求排成.

第 24 讲　不变量原理

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1.【答案】a^2.

【解析】在直角三角形中,斜边上的中线等于斜边的一半,因为斜边 AB 不变,所以斜边上的中线 OP 不变.过 O 作 $OH\perp AB$ 于 H,注意到 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}AB\cdot OH$,而 $OH\leqslant OP$,所以当$\triangle AOB$ 的斜边上的高 OH 等于中线 OP 时,$\triangle AOB$ 的面积最大.也就是说当三角形是等腰直角三角形时,三角形的面积最大,最大面积为 a^2,而此时,斜边上中线 OP 恰好等于三角形的高.

2.【答案】$\frac{12}{5}$.

【解析】连接 OP,$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$,$OA=OB=\frac{1}{2}AC=\frac{5}{2}$.

因为 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{4}S_{矩形ABCD}=\frac{1}{4}\times4\times3=3$,

$S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}OA\cdot PE$,

$S_{\triangle BOP}=\frac{1}{2}OB\cdot PF$,

并且 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOP}+S_{\triangle BOP}$,

所以 $3=\frac{1}{2}OA\cdot PE+\frac{1}{2}OB\cdot PF$,

故 $3=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\cdot PE+\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\cdot PF$,

所以 $PE+PF=\frac{12}{5}$.

评注　当我们连接 OP 时,不难发现,$\triangle AOP$ 和$\triangle BOP$ 的面积都会随着点 P 的运动而发生变化,但是这两个图形的面积的和却是个不变的定值,而所求的线段 PE、PF 恰好又分别是这两个三角形的高,且它们的底边 OA、OB 也是相等且不变的,这都指引我们可以从这里入手求解.

3.【答案】799.

【解析】由于每场比赛淘汰一名选手,即每场比赛被淘汰的选手人数是不变的.要决出冠军,需淘汰

799 名选手，所以需要进行 799 场比赛.

4.【答案】=.

【解析】因为 $S_{\square CDEF}=CD\cdot DA=S_{矩形ABCD}$，

所以 $S_{四边形CGEF}=S_{\square CDEF}-S_{\triangle CDG}$

$=S_{矩形ABCD}-S_{\triangle CDG}$

$=S_{四边形BGDA}$.

5.【答案】1.

【解析】因为数 a 和 $-a$ 的奇偶性相同，所以无论怎么填上“+”号或者“-”号，和式的奇偶性和 $1+2+3+\cdots+2021=\frac{(1+2021)\times 2021}{2}=1011\times 2021$ 的奇偶性是一样的，所以和式的结果一定是奇数，故最小的可能值是 1.另一方面，在四个连续整数 $4n+2$、$4n+3$、$4n+4$、$4n+5$ 之间按如下方式填上正负号可以得到 0，即 $(4n+2)-(4n+3)-(4n+4)+(4n+5)=0$，按照这样的方式填上正负号，可得 $1+(2-3-4+5)+(6-7-8+9)+\cdots+(2018-2019-2020+2021)=1$.

综上，所得最小值是 1.

6.【答案】131250.

【解析】因为 $(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_9-9)=(a_1+a_2+\cdots+a_9)-(1+2+\cdots+9)=0$ 是偶数，所以 $(a_1-1),(a_2-2),\cdots,(a_9-9)$ 这 9 个数中一定有一个偶数（否则，便得 9 个奇数的和是偶数，矛盾），进而 $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_9-9)$ 一定是偶数，所以正确的结果只能是 131250.

评注 本题抓住不变量 $(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_9-9)=0$ 进行奇偶分析.

7.【答案】$\frac{7}{3},4,\frac{8}{3}$.

【解析】因为 $\frac{a+3b}{2}+\frac{a-b+c}{3}+\frac{a-b+4c}{6}=a+b+c$，所以操作之后数组内所有数的和不变.而原来数组 5，1，3 的所有数之和为 9，四个数组内只有 $\frac{7}{3},4,\frac{8}{3}$ 的所有数之和等于 9，所以正确的只可能是 $\frac{7}{3},4,\frac{8}{3}$.

8.【答案】520.

【解析】一个依次排列为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 n 个数操作一次，新增的数为 $a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_n-a_{n-1}$，而 $(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_1$，并且 $a_n=8$，$a_1=3$ 是不变的，所以新增数之和为 5 是一个不变量.所以按照规律下去，第 100 次操作后所得数串的所有数之和为 $3+9+8+100\times(8-3)=520$.

9.【答案】17.

【解析】注意到无论如何编排，如果一个故事的页数是奇数，那么这个故事与下一个故事的第一页页码的奇偶性相反；如果一个故事页数是偶数，那么这个故事与下一个故事的第一页页码的奇偶性相同——这一点是不变的！而偶数页的故事有 11 个，奇数页的故事有 12 个，所以当第一个故事编排奇数页故事，从第二个故事起把所有偶数页故事编排完，最后全部编排奇数页故事的时候，第一页是偶数页码的故事个数最多，是 17 个.

10.【答案】不能.

【解析】开始时 $n-1$ 个黑色方格区的总周长不超过 $4(n-1)$，当整个棋盘全部染成黑色后，黑色方格区的总周长是 $4n$.每次染色后，虽然多出一个黑色方格，但是在这次染色前后黑色方格区域的总周长不会增加.也就是说，不论如何染色，原有的不超过 $4(n-1)$ 的总周长永远不会增大.这样，不可能达到 $4n$，即不可能使全部方格都变成黑色.

二、解答题（每题 10 分，共 50 分）

11.【答案】不能.

【解析】因每次变换改变表中 6 个数的符号，而 $(-1)^6=1$，所以每次变换不会改变所变动的那行（或列）中 6 个数的乘积之符号，从而也不改变全表中 36 个数乘积之符号.这样，无论操作多少次变换，表中 36 个数之积总是负的.但全表中所有数为正时，36 个数之积为正，所以不能使表中的数全变为正数.

12.【答案】不存在.

【解析】把第 i 行第 j 列的室记为 a_{ij}，转化的方法是利用相邻的室 $i+j$ 的奇偶性不同.注意从一角 A 到其对角 B，B 为 a_{81}，A 为 a_{18}，$1+8$ 与 $8+1$ 为奇数.从 A 出发要穿过 63 道门才到达 B，

每穿过一个门，$i+j$ 的奇偶性变化一次，变化 63 次不可能从奇数变到奇数，所以满足题设要求的路线不存在.

13.【答案】证明：由于 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant\frac{2}{a}$，所以黑板上所有数的倒数和总是不减的，而开始时黑板上所有数的倒数和为

$$\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\cdots+\frac{1}{2999}$$

$$=\frac{1}{1000}+(\frac{1}{1001}+\frac{1}{2999})+(\frac{1}{1002}+\frac{1}{2998})+\cdots+(\frac{1}{1999}+\frac{1}{2001})+\frac{1}{2000}$$

$$>\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000}+\cdots+\frac{1}{1000}+\frac{1}{2000}$$

$$=1+\frac{1}{2000}>1.$$

所以最后留下的数的倒数大于 1，也就是说它必定小于 1.

14.【答案】不可能，理由如下：

设 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 依次为圆周上的 6 个数，考察 $I=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6$，因为 I 在操作的过程中保持不变，并且开始时 $I=2$，但是如果所有的数相等，那么 $I=0$，所以不可能使所有数都变成相等.

15.【答案】证明：因为对于任意 0 到 9 之间的整数 a 和正整数 n，均有 $a\equiv a\times10^n\pmod 9$，所以每一次操作得到的数被 9 除的余数与原数被 9 除的余数是相同的.另一方面，$7^{2019}\equiv(-2)^{2019}\equiv(-8)^{673}\equiv1\pmod 9$，因此最后得到的十位数各数位上的数字不可能两两不同，否则各数位上的数字和是 $1+2+\cdots+9=45$，它是 9 的倍数，出现矛盾.

第 25 讲　抽屉原理

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

1.【答案】6.

【解析】因为一共有 12 种属相，把它看作 12 个抽屉，$\left[\frac{61}{12}\right]+1=5+1=6$，根据抽屉原理知，至少有 6 个人的属相相同.

2.【答案】12.

【解析】最“坏”的情况是取出黑、白球各 1 个，红、蓝、黄球各 3 个，此时是 11 个球.再多取出 1 个，即可确保至少有 4 个球同色.

3.【答案】11.

【解析】从 1，2，…，20 中取 11，12，…，20 这 10 个数，其中没有一个数是另一个数的倍数.把 1，2，…，20 分成如下 10 组：$\{1,2\times1,2^2\times1,2^3\times1,2^4\times1\}$，$\{3,2\times3,2^2\times3\}$，$\{5,2\times5,2^2\times5\}$，$\{7,2\times7\}$，$\{9,2\times9\}$，$\{11\}$，$\{13\}$，$\{15\}$，$\{17\}$，$\{19\}$，

从中任取 11 个数，一定有两数取自同一组，于是大的数便是小的数的倍数.

所以，至少任取 11 个数才能满足题意.

4.【答案】52.

【解析】取 1，2，3，…，49，50，100 这 51 个数，则这些数之中任意两个数的和与差都不能被 100 整除.下面证明取 52 个数就可以：把这 52 个正整数都除以 100，考虑得到的 52 个余数，若其中有两个相同，则它们的差能被 10 整除；若其中任意两个都不相同，把 0，1，…，99 分成如下 51 组：

$\{1,99\}$，$\{2,98\}$，…，$\{49,51\}$，$\{0\}$，$\{50\}$.

被取出的 52 个余数，总有两数出自同一组，这两数的和或差能被 100 整除.

5.【答案】55.

【解析】取出 1～9，19～27，37～45，55～63，73～81，91～99 这 54 个数，其中任意两个数的差都不等于 9.把 1，2，…，100 分成如下 54 组：$\{1,10\}$，$\{2,11\}$，…，$\{9,18\}$，$\{19,28\}$，…，$\{81,90\}$，$\{91,100\}$，$\{92\}$，$\{93\}$，…，$\{99\}$.

从中任取 55 个数，一定有两个数取自同一组，它们的差等于 9.

6.【答案】101.

【解析】先证明任意取 100 个数是不够的，如取出所有的偶数 2，4，6，8，…，200.下面证明取 101 个数是足够的：把 1，2，…，200 这 200 个正整数分成如下 100 组：$\{1,2\}$，$\{3,4\}$，…，$\{199,200\}$.

从这 100 组中任取 101 个数，由抽屉原理知，其中一定有两个数取自同一组，同一组中的两个数是

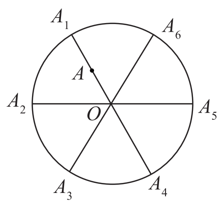
相邻的正整数,从而它们是互质的.

7.【答案】11.

【解析】学生借书共有 A、B、C、D、AB、AC、AD、BC、BD、CD 这 10 种可能的情况,可把每种情况视为一个抽屉,由抽屉原理,当有 11 个人借书时,至少有两人借书的情况相同.

8.【答案】6.

【解析】我们先证明放置 6 个点是足够的,如答图 25-1所示,设 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 将圆 O 六等分.



答图 25-1

如果对于六个扇形(圆心角 60°,半径为 1)中一个扇形内有两点(包括边界)M、N,那么 $MN\leqslant 1$.这是因为$\angle MON\leqslant 60°$,不妨设 $ON\leqslant OM$,则

$MN^2=OM^2+ON^2-2OM\cdot ON\cdot\cos\angle MON\leqslant OM^2+ON^2-OM\cdot ON=OM^2+ON(ON-OM)\leqslant OM^2\leqslant 1$

而由抽屉原理,知 6 个点中必有两点落在同一扇形内或边界上(如图中点 A),因此总有两点间的距离不大于 1.下面来看取 5 个点的情况,如果我们取圆周上的 5 个五等分点,那么任意两点间的距离都大于 1,故至少要放 6 个点.

9.【答案】37.

【解析】两道题的得分共有如下 9 种情况:

(2,2),(2,1),(2,0),(1,2),(1,1),(1,0),(0,2),(0,1),(0,0).

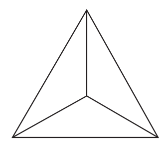
因为至少有 5 人属于同一种情况,所以学生数至少有 $9\times 4+1=37$ 人.

10.【答案】19.

【解析】因为每列有 4 格,所以至少有 2 格同色,而在每列 4 格之中,2 格同色的分布有 6 种.又因为一共有 3 种颜色,所以需要 $6\times 3=18$ 列才能把这些不同颜色不同分布的两个同色格子的情况排列完.此时若再添加一列,则一定存在两列,它们含有两个相同颜色、相同分布的格子,这就构成了同色四角矩形.

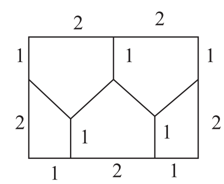
二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11.【答案】证明:如答图 25-2 所示,将正三角形的中心与三个顶点连起来把正三角形分成三个小三角形(视为 3 个抽屉).则由抽屉原理知,必定有一个小三角形的内部或边界上至少有 $\left[\dfrac{7}{3}\right]+1=3$ 个点.这三个点构成的三角形面积不超过该小三角形的面积,即不超过$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.



答图 25-2

12.【答案】证明:如答图 25-3 所示,把 3×4 的矩形分成 5 个部分.由勾股定理可以算得每个部分的任两点之间的距离不大于$\sqrt{5}$.又由抽屉原理,可知任意放置的 6 个点中必有 2 个点位于同一个部分之中,从而命题得证.



答图 25-3

13.【答案】证明:把 1~25 这 25 个自然数分成下面 6 组:

① 1;

② 2,3;

③ 4,5,6;

④ 7,8,9,10;

⑤ 11,12,13,14,15,16;

⑥ 17,18,19,20,21,22,23,24,25.

因为从这 25 个自然数中任意取出 7 个数,所以至少有 2 个数取自上面第②组到第⑥组中的某同一组,这 2 个数中大数就不超过小数的 1.5 倍.

14.【答案】证明:以平面上 9 个点 $A_1,A_2,\cdots,A_9$ 表

示 9 个数学家,如果 2 人能通话,就把表示他们的两点连线,并涂上一种颜色(不同的语言涂上不同颜色).此时有两种情况:

(1) 9 点中有任意 2 点都有连线,并涂了相应的颜色.于是从某一点 A_1 出发,分别与 $A_2,A_3,\cdots,A_9$ 连线.又据题意,每人至多能讲 3 种语言,因此在线段 $A_1A_2,A_1A_3,\cdots,A_1A_9$ 中至多只能涂 3 种不同的颜色.由抽屉原理知,这 8 条线段中至少有 2 条同色的线段.不妨设 A_1A_2 与 A_1A_3 是同色线段,因此 A_1、A_2、A_3 这 3 点表示的 3 名数学家可用同一种语言通话.

(2) 9 点中至少有 2 点不连线,不妨设是 A_1 与 A_2 不连线.由于每 3 人中至少有 2 人能通话,因此从 A_1 与 A_2 出发至少有 7 条连线.再由抽屉原理知,其中必有 4 条连线从 A_1 或 A_2 出发.不妨设从 A_1 出发,又因 A_1 至多能讲 3 种语言,所以这 4 条连线中,至少有 2 条连线是同色的.若 A_1A_3 与 A_1A_4 同色,则 A_1,A_3,A_4 这 3 点表示的 3 名数学家可用同一种语言通话.

15.【答案】证明:用 a_i 表示这位棋手从第 1 天到第 i 天(包括第 i 天)下棋的总盘数,$i=1,2,\cdots,77$.由于每天至少下一盘棋,所以 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{77}$.

又因为每周至多下 12 盘棋,所以 $a_{77}\leqslant\frac{77}{7}\times12=132$,

所以 $1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{77}\leqslant132$.

考虑下面 154 个正整数:

$a_1,a_2,\cdots,a_{77},a_1+21,a_2+21,\cdots,a_{77}+21$.

其中最小的是 a_1,最大的 $a_{77}+21$ 不超过 $132+21=153$.

因此这 154 个正整数中必定有 2 个是相等的.

由于 $a_1<a_2<\cdots<a_{77},a_1+21<a_2+21<\cdots<a_{77}+21$,

所以必定存在 $i<j$,使得 $a_j=a_i+21$,从而 $a_j-a_i=21$.

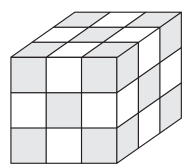
令 $n=j-i$,那么该棋手在第 $i+1,i+2,\cdots,i+n=j$ 这连续的 n 天中恰好下了 21 盘棋.

第 26 讲　染色问题与染色方法

解答题(每题 10 分,共 100 分)

1.【答案】证明:记点 A 为 A_0,点 B 为 A_{n+1},从 A 至 B 的分点依次为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$.设从 A 至 B 的线段中最后一个标准线段为 A_kA_{k+1}.若 $k=0$,则仅有一个标准线段,命题显然成立;若 $k\geqslant1$,由 A 与 B 不同色,则 A 必与 A_k 同色,不妨设 A 与 A_k 均为红色,那么在 A 和 A_k 之间若有一红蓝的标准线段,必有一蓝红的标准线段与之对应;否则 A_k 不能为红色,所以在 A 和 A_k 之间,红蓝和蓝红的标准线段就成对出现,即 A 和 A_k 之间的标准线段的个数是偶数,加上最后一个标准线段 A_kA_{k+1},A 和 B 之间的标准线段的个数是奇数.

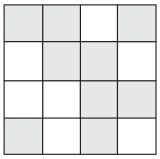
2.【答案】不能.理由如下:如答图 26-1 所示,将正方体分割成 27 个小正方体(每个小正方体表示一间房间),涂上黑白相间的两种颜色,使得中心的小正方体染成白色,再使两个相邻的小正方体染上不同的颜色.那么,在 27 个小正方体中,14 个是黑的,13 个是白的.甲虫从中间的白色小正方体出发,每走一步,方格就改变一种颜色.故它走 26 步,应该经过 14 个白色的小正方体和 13 个黑色的小正方体.这与我们染色的情况是不相对应的.由此可见,如果要求甲虫到每一个小房间只去一次,那么甲虫不能走遍所有的小房间.



答图 26-1

3.【答案】9.

【解析】如答图 26-2 所示,涂 9 格,无黑色四角矩形.下证若涂 10 格,则一定会出现黑色四角矩形.这是因为若有一行全部涂黑,则余下的行中必有一行至少涂黑 2 格,此时便有所求矩形出现.于是每行黑格数不到 4 个,必有两行各包含 3 个黑格,此时不难看出有黑色四角矩形出现,因此最多选择 9 格.

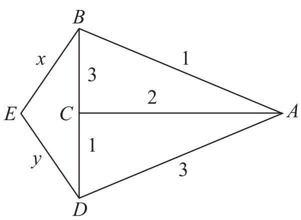


答图 26-2

4.【答案】4.

【解析】如答图 26-3 所示，从顶点 A 引出的 3 条边 AB、AC 和 AD 必须涂上互不相同的 3 种颜色，顺次把这 3 种颜色记为 1、2、3.现在希望尽量用这 3 种颜色给所有各边着色.由于 CA 的颜色是 2，所以 CB 和 CD 的颜色分别是 3 和 1.又因为 BA 的颜色是 1，所以 BC 的颜色只能是 3，CD 的颜色必然是 1.设 BE 的颜色是 x，DE 的颜色是 y.从点 B 知道 $x\neq1$，$x\neq3$；从点 D 知道 $y\neq1$，$y\neq3$.如果只用 3 种颜色，必然有 $x=y=2$.但是从点 E 知道 $x\neq y$，所以必须采用第四种颜色.

综上，至少要用 4 种颜色.



答图 26-3

5.【答案】证明：将 50 个座位相间地涂成黑白两色，假设不论如何围坐都找不到一位两旁都是女生的学生，那么 25 个涂有黑色记号的座位至多坐 12 个女生.否则一定存在两相邻的涂有黑色标记的座位，其上面都坐着女生，其间坐着的那一个学生与假设导致矛盾.同理，25 个涂有白色标记的座位至多只能坐 12 个女生，因此全部入座的女生不超过 24 人，与题设相矛盾.故命题得证.

6.【答案】证明：如答图 26-4 所示，给四种颜色棋盘染色，分别用 1、2、3、4 表示这四种颜色，显然每个 1×4 的长方块各占 1、2、3、4 一个，假设可以按题设覆盖，则 1、2、3、4 应一样多，但 1 有 25 个，2 则有 26 个，矛盾！因此不能覆盖.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

答图 26-4

7.【答案】证明：将包含黑格的所有行中找出黑格数最多的前 k 行，则这 k 行中包含的黑格总数必定不少于 $2k$，否则会有一行的黑格数至多一个，而剩下来的 k 行至少有 $k+1$ 个黑格，于是有一行包含了至少两个黑格，这与“黑格数最多的前 k 行”的取法矛盾.于是取出的这 k 行中包含的黑格总数必定不少于 $2k$，接下来只要再取包含剩下的不超过 k 个黑格的列即可(有的列可不包含黑格).

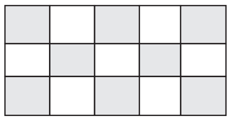
8.【答案】8.

【解析】首先，我们指出红色的行和列不多于 8 个.若不然，红色的行和列至少 9 个，则其中必有 5 个红行或红列，不妨设为前者.由于每个红行中至少有 4 个红格，故知表中至少有 20 个红格.此与已知条件矛盾.

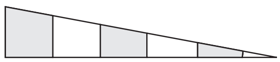
其次，当我们将表格中的某个 4×4 的正方形的 16 个方格全部涂红时，便得到 4 个红行和 4 个红列，共 8 个.这表明有 19 个红格时，确可使红行与红列的个数达到 8.所以最大值为 8.

9.【答案】证明：可将矩形分成 mn 个单位正方形，并按照答图 26-5 的方式涂上黑白两色，使相邻的正方形颜色不同.此时 4 个角上的小正方形颜色相同，设为黑色，于是黑色格总面积比白格多 1.按照题目的方式分拆，每一个有两条边与坐标轴平行的三角形必定是某个 $1\times k$ 的矩形的对角线和这个矩形的两条边构成(见答图 26-6)，两种颜色部分的面积之差为 $\frac{1}{2}$.而每一个仅有一条边与坐标轴平行的三角形中，两种颜色部分的面积相等，如答图 26-7 所示.由于黑色面积与白色面积相差 1，故至少存在两个三角形各有两条边与坐标轴

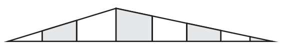
平行.



答图 26-5

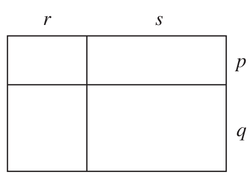


答图 26-6



答图 26-7

10.【答案】不可能.理由如下:设每行、每列中都有一种颜色的方格超过$\frac{3}{4}$,由于行与行、列与列可对调而不影响结论.不妨设其中前 p 行白色占优势,后 q 行黑色占优势;前 r 列白色占优势,后 s 列黑色占优势.$p+q=m$,$r+s=n$,如答图 26-8 所示.



答图 26-8

考虑 $p\times s$ 放 $q\times r$ 的矩形中的 $ps+qr$ 个方格.其中的白格可看成 s 列或 q 行中的"少数派",而黑格可看成 p 行或 r 列中的"少数派".由于在每行、每列中"少数派"少于$\frac{n}{4}$或$\frac{m}{4}$个,所以前一个矩形中的白格与后一个矩形中的黑格的个数之和少于$\frac{m}{4}(s+r)=\frac{mn}{4}$.同样,前一个矩形中的黑格与后一个矩形中白格的个数之和少于$\frac{n}{4}(p+q)=\frac{mn}{4}$.所以这两个矩形中的方格数 $ps+qr<\frac{mn}{4}+\frac{mn}{4}=\frac{mn}{2}$,即少于方格总数的一半.因此 $ps+qr<pr+qs$,$(p-q)(s-r)<0$,从而 $p\leqslant q$,$r\leqslant s$ 或 $q\leqslant p$,$s\leqslant r$,不妨设为前者,这时 $p\leqslant\frac{m}{2}$,$r\leqslant\frac{n}{2}$,故白色方格总数$<pr+q\times\frac{n}{4}+s\times\frac{m}{4}=pr+(m-p)\times\frac{n}{4}+(n-r)\times\frac{m}{4}=\frac{mn}{2}-p(\frac{n}{4}-\frac{r}{2})-r(\frac{m}{4}-\frac{p}{2})\leqslant\frac{mn}{2}$,

与两种颜色的方格数相等矛盾.

第 27 讲　赋值法

解答题(每题 10 分,共 100 分)

1.【答案】证明:赋予黑点以整数值 1,白点以整数值 2.设点 A_i 的值为 a_i,当 A_i 为黑点时,$a_i=1$;当 A_i 为白点时,$a_i=2$.再赋予线段 A_iA_{i+1} 以整数值 a_i+a_{i+1},则两端同色的线段具有的整数值为 2 或 4,两端异色的线段具有的整数值为 3.所有线段对应的整数值的总和为

$(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)$

$=a_1+a_n+2(a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})$

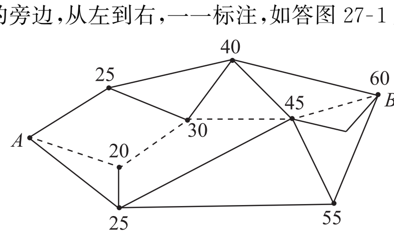
$=2+1+2(a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})$.

它是一个奇数.另外,设具有整数值 2、3、4 的线段的条数依次为 l、m、n,则所有线段对应的整数值的总和为 $2l+3m+4n$,根据已有的推导,$2l+3m+4n$ 也是一个奇数,由上式推知,m 必为奇数,即两端异色的线段条数是奇数.

2.【答案】EFFGY

【解析】将 A、B、C、D、E、F、G、X、Y、Z 分别赋值为 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9,则 CYZGB = 28961,XEFDA = 74530.在 28961 与 74530 之间共有 $74530-28961-1=45568$ 个数,词表中第 45568 个词是 EFFGY.

3.【答案】先把从 A 村到各村的最短时间标注在各村的旁边,从左到右,一一标注,如答图 27-1 所示.



答图 27-1

由此不难看出，按图中的虚线走就能在最短时间(60min)内从 A 村走到 B 村.

4.【答案】不能.理由如下：涂上颜色后，给图中所有的红圈赋值 1，给所有的篮圈赋值 0.假设题中所设想的染色方案能够实现，那么每条直线上代表各圈的数字之和便应都是奇数.一共有 5 条直线，把这 5 条直线上代表各圈的数字之和的这 5 个奇数再加起来，得到的总和数仍应是一个奇数.但是，由观察可见，图中每个圈都恰好同时位于两条直线上，在求上述总和数时，代表各圈的数字都恰被加过两次，所以这个总和应是一个偶数.这就导致矛盾，说明假设不成立，染色方案不能实现.

5.【答案】证明：我们将圆周上 27 个点按顺时针方向依次赋值 1，2，…，27，则以下各组点可以形成 9 个正三角形：(1，10，19)，(2，11，20)，…，(9，18，27).

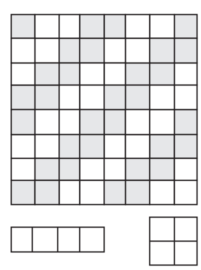
由染色规则知，其中至多有 9 个黑点.如果黑点不多于 8 个，那么上面 9 组点中必有 1 组全是白色，这组点构成一个正三角形.如果黑点恰有 9 个，那么由染色规则知，它们只能是一黑两白相间排列，其中也一定有一个正三角形的所有顶点全为白色.综上，命题成立.

6.【答案】证明：设 $m\times n$ 棋盘由 k 个 L 形纸片所覆盖，而 L 形是由 4 个 1×1 小方格所组成，则可令 $mn=4k$.由此得出 m 和 n 中至少有一个偶数，不失一般性，可令 n 为偶数，即共有偶数 n 列.现在对“列”进行 1、0 交替赋值，可得被赋值 1、0 的格子各共有 $2k$ 个，所以整副棋盘上所有的格子中的数字之和是 $2k$.易见每个 L 形纸片无论怎样配置，总是盖住奇数个含有数字 1 的格子，所以每个 L 形纸片中的数字之和一定是个奇数，并且所有这些 L 形纸片中的数字之和是 $2k$.因此必须有偶数个 L 形纸片，从而证得 mn 是 8 的倍数.

7.【答案】证明：将这些球标上数字，红球标 1，而蓝球则标上 -1，于是问题变为必定有 6 个相邻的球其标数之和为 0.记从第 i 个球起的 6 个数字和为 S_i，于是 i 可取 1，2，…，19.易知 S_1 的全部取值为 $-6,-4,-2,0,2,4,6$，且 $|S_{i+1}-S_i|=0$ 或 2 (可以认为以 2、-2 或 0 的步长“连续”变化).由 $S_1+S_7+S_{13}+S_{19}=0$，知若四数中有 0，则结论成立，否则必有正有负.不妨设 $S_i>0$，$S_j<0$，其中 i 和 j 都是 1、7、13、19 中的一个数，于是必存在一个 k，k 在 i 与 j 之间，$S_k=0$.

8.【答案】证明：将 23×23 的正方形地面中第 1、4、7、10、13、16、19、22 列中的小方格赋值 0，剩下的小方格全赋值 1，于是被赋值 1 的小方格的个数为 15×23，所以整个地面中的数字之和是奇数.因为每块 2×2 瓷砖内的数字之和总是偶数，每块 3×3 瓷砖内的数字之和总是 6，故无论多少 2×2 及 3×3 的瓷砖盖住的格子内的数字之和总是一个偶数，不可能是 15×23 这个奇数.所以，只用 2×2 及 3×3 的瓷砖不能盖住 23×23 的地面.

9.【答案】证明：反证法，假设可以按照题目要求盖住 8×8 的正方形.如答图 27-2 所示给棋盘染上黑白两色，并记白色格的值为 0，黑色格的值为 1.可以发现，无论如何放置 4×1 的矩形骨牌，它所包含的格子的值的总和一定是 2(正好包含两个白格和两个黑格).然而，无论如何放置 2×2 的正方形骨牌，它所包含的格子的值的总和一定是 1 或 3，也就是说，这个值一定是个奇数.所以，无论怎么在棋盘内放置 13 块 4×1 的矩形骨牌和 3 块 2×2 的正方形骨牌，骨牌中所有数的和一定是奇数.但是，棋盘中黑色格总共有 32 个，即棋盘中所有格子的值的总和是一个偶数，矛盾！故不能按照题目要求盖住 8×8 的正方形.



答图 27-2

10.【答案】证明：假设凸多边形 M 能分割成非凸四边形 $M_1,\cdots,M_n$.我们将多边形 N 中小于 180° 的内角和与“另外的角”之和的差用数 $f(N)$ 来表示，这里“另外的角”是指 N 中大于 180° 的角关于 360° 的补角(即用 360° 减去这个角).比较数 $A=f(M)$ 和 $B=f(M_1)+\cdots+f(M_n)$，为此研究

四边形 $M_1,\cdots,M_n$ 的所有顶点，这些顶点能够分成 4 种类型：

(1) 多边形 M 的顶点.这些点给予 A 和 B 同样的值.

(2) 在多边形 M 或四边形 M_1 边上的点.每个这样的点给予 B 的值比给予 A 的值大 $180°$.

(3) 多边形 M 的内点，且在这点引出四边形的角均小于 $180°$，每个这样的点给予 B 的值比给予 A 的值大 $360°$.

(4) 多边形 M 的内点，且在这点引出四边形的某一个角大于 $180°$，这样的点给予 A 和 B 的值为 0.总之，得到 $A\leqslant B$.

另一方面，我们证明 $A>0$ 而 $B=0$.不等式 $A>0$ 是显然的，而对于等式 $B=0$ 的证明，可以验证：若 N 是非凸四边形，则 $F(N)=0$.设 N 的角 $\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma\geqslant\delta$，任意的非凸四边形相当于有一个角大于 $180°$，因此得到 $f(N)=\beta+\gamma+\delta-(360°-\alpha)=\alpha+\beta+\gamma+\delta-360°=0°$.这个结论与 $A\leqslant B$ 矛盾，因此不可能把凸多边形划分成有限个非凸四边形.

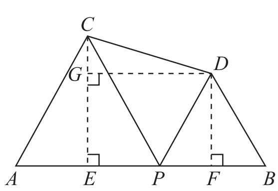
第 28 讲　三角形中的不等关系

一、填空题(每题 5 分，共 50 分)

1.【答案】5.

【解析】如答图 28-1 所示，过 C 作 $CE\perp AB$ 于 E，过 D 作 $DF\perp AB$ 于 F，过 D 作 $DG\perp CE$ 于 G.显然 $DG=EF=\frac{1}{2}AB=5$，$CD\geqslant DG$，且 $CD=\sqrt{EF^2+CG^2}$.故当 $CG=0$ 时，CD 有最小值，即当 P 为 AB 中点时，有 $CD=DG=5$.

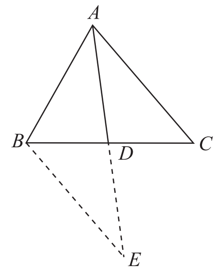
所以 CD 长度的最小值是 5.



答图 28-1

2.【答案】$1<AD<4$.

【解析】如图 28-2 所示，延长 AD 至 E，使 $DE=AD$，连接 BE.



答图 28-2

在$\triangle ACD$ 和$\triangle EBD$ 中，

$$\begin{cases}DC=DB,\\ \angle ADC=\angle EDB,\\ AD=ED,\end{cases}$$

所以$\triangle ACD\cong\triangle EBD$(SAS)，

所以 $AC=BE$.

在$\triangle ABE$ 中，由三角形的三边关系可得

$|AB-BE|<AE<AB+BE$，

故 $|AB-AC|<2AD<AB+AC$，

所以$1<AD<4$.

3.【答案】$15°<x<30°$.

【解析】由三角形外角大于任何一个不相邻的内角且小于 $180°$可知，

$90°<\angle ACB<180°$，即 $90°<6x<180°$，由此可得 $15°<x<30°$.

4.【答案】钝角三角形.

【解析】根据题意$\angle A>3\angle B$，即有$\angle B<\frac{1}{3}\angle A$，

故$\angle C<2\angle B<\frac{2}{3}\angle A$，

所以 $180°=\angle A+\angle B+\angle C<\angle A+\frac{1}{3}\angle A+\frac{2}{3}\angle A=2\angle A$，故有 $180°<2\angle A$，

所以$\angle A>90°$，即得$\triangle ABC$ 为钝角三角形.

5.【答案】33.

【解析】设 $BF=a$，则 $CF=10-a$，$ED=4-a$，$EC=a+3$，

$$S_{\triangle AEF}=S_{矩形ABCD}-S_{\triangle AED}-S_{\triangle CEF}-S_{\triangle ABF}$$
$$=70-\frac{7}{2}a-5(4-a)-\frac{1}{2}(10-a)(a+3)$$

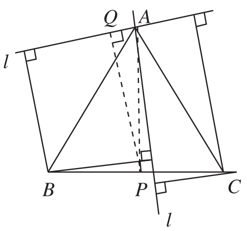
$=\frac{1}{2}a^2-2a+35$

$=\frac{1}{2}(a-2)^2+33$

所以当 $a=2$ 时，$\triangle AFE$ 面积取最小值 33.

6.【答案】$\sqrt{3}$.

【解析】如答图 28-3 所示，若 l 穿过 BC，则由“直角边小于斜边”知 $d_1+d_2\leqslant BC=1$，取到等号时仅当 $l\perp BC$.



答图 28-3

若 l 不经过 BC，取 BC 中点 P，作 $PQ\perp l$，Q 在 l 上，则 $d_1+d_2=2PQ\leqslant 2AP=\sqrt{3}$，取到等号仅当$l\parallel BC$.

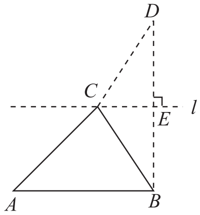
综上所述，d_1+d_2 的最大值为$\sqrt{3}$.

7.【答案】$2\sqrt{2}$.

【解析】如答图 28-4 所示，不妨设 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，过 C 作直线 $l\parallel AB$，又作 $BE\perp l$ 于 E，延长一倍至 D，连接 CD.则 $a+b=AC+CD\geqslant AD=\sqrt{c^2+(2h)^2}$.这里 $h=BE$.

因为 $c^2-4ch+4h^2=(c-2h)^2\geqslant 0$，所以 $c^2+4h^2\geqslant 4ch=8$，于是 $a+b\geqslant 2\sqrt{2}$.

仅当 A、C、D 共线，即 $a=b=\sqrt{2}$，且 $c=2h=2$ 时取等号，此时$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.



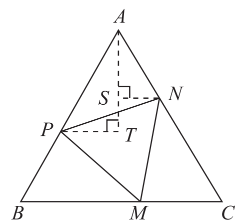
答图 28-4

8.【答案】0.

【解析】由已知，$AB<BC+CA$，所以 $b^2-1<a^2+2a$，故 $b^2<a^2+2a+1$，即 $b^2<(a+1)^2$.又因为 a 和 b 是大于 1 的整数，所以 $b<a+1$，进而 $b\leqslant a$.另一方面，$BC<AB+CA$，所以 $a^2<b^2-1+2a$，故 $a^2-2a+1<b^2$，即 $(a-1)^2<b^2$，所以 $a-1<b$，从而 $a\leqslant b$.综上可得 $a=b$，所以 $b-a=0$.

9.【答案】$\frac{3}{2}$.

【解析】如答图 28-5 所示，易知 $AP+AN=BP+BM=MC+CN=1$.



答图 28-5

又作$\angle BAC$ 的平分线 AST，PT、NS 分别与 AST 垂直于 T、S.由于$\angle PAS=\angle NAS=30°$，$1=AP+AN=2PT+2SN\leqslant 2PN$，故 $PN\geqslant\frac{1}{2}$，取等号时 $PN\perp AS$，且 P、N 是 AB、AC 的中点.同理有 $PM\geqslant\frac{1}{2}$，$MN\geqslant\frac{1}{2}$，故$\triangle MNP$ 的周长不小于 $\frac{3}{2}$，取等号仅当 M、N、P 为各边之中点时.

10.【答案】41.

【解析】因为 $1>\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$，所以 1 不可能为边.

当最大边为$\frac{1}{2}$时，次大边只能为$\frac{1}{3}$，最小边为$\frac{1}{4}$或$\frac{1}{5}$，有 2 组.

当最大边为$\frac{1}{3}$时，次大边为$\frac{1}{4}$或$\frac{1}{5}$.次大边为$\frac{1}{4}$时，最小边大于$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$，故可取$\frac{1}{5}\sim\frac{1}{10}$；次大边为$\frac{1}{5}$时，最小边大于$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$，可取$\frac{1}{6}$与$\frac{1}{7}$，共有 8 组.

当最大边为$\frac{1}{4}$时，次大边为$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{7}$.次大边为$\frac{1}{5}$时，最小边大于$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$，可取$\frac{1}{6}\sim\frac{1}{10}$；次

大边为$\frac{1}{6}$时，最小边大于$\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$，可取$\frac{1}{7}$～$\frac{1}{10}$；次大边为$\frac{1}{7}$时，最小边大于$\frac{1}{4}-\frac{1}{7}=\frac{3}{28}$，可取$\frac{1}{8}$和$\frac{1}{9}$，共有11组.

当最大边不超过$\frac{1}{5}$时，由于$\frac{1}{5}<\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$，故$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{7}$、$\frac{1}{8}$、$\frac{1}{9}$、$\frac{1}{10}$中任三数可构成三角形的三边，一共有20组.

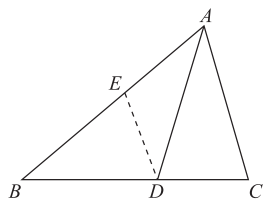
综上所述，总共有41组.

二、解答题(每题10分,共50分)

11.【答案】证明：如答图28-6所示，不妨设$AB=15$，$AC=10$，AD为角平分线.今在AB上取一点E，使$ED\parallel AC$，则由角平分线定理可知$\frac{ED}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{AB}{AB+AC}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$，故$ED=\frac{3}{5}\times 10=6$.

又由$\angle EAD=\angle DAC=\angle EDA$知，

$AE=ED=6$，于是$AD<AE+ED=12$.



答图28-6

12.【答案】证明：在$\triangle ABC$外作$\angle CAE=\angle BAD$，使$AE=AD$，连接CE、DE.

那么$\triangle ACE\cong\triangle ABD$，$\angle ADE=\angle AED$，

所以$CE=BD$，$\angle AEC=\angle ADB>\angle ADC$，

又因为$\angle ADE=\angle AED$，

所以$\angle DEC>\angle EDC$，

所以$DC>CE$，即$DC>BD$，

所以$\angle DBC>\angle DCB$.

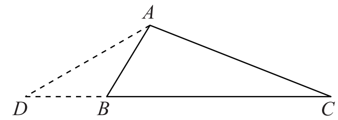
13.【答案】证明：如答图28-7所示，延长CB到D使$BD=AB$.则$\angle D=\frac{1}{2}\angle ABC$，

在$\triangle ADB$中，$AD<AB+BD=2AB$，

又因为$AC\geqslant 2AB$，所以$AD<AC$，

所以$\angle D>\angle C$，即$\frac{1}{2}\angle ABC>\angle C$，

所以$\angle ABC>2\angle C$.



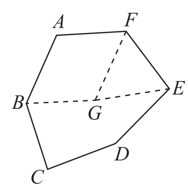
答图28-7

14.【答案】27.

【解析】易知$\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle ADO}}=\frac{BO}{DO}=\frac{S_{\triangle BCO}}{S_{\triangle DCO}}$，故$S_{\triangle ABO}\cdot S_{\triangle CDO}=S_{\triangle ADO}\cdot S_{\triangle BCO}=36$.

从而$S_{\triangle ABO}+S_{\triangle CDO}\geqslant 2\sqrt{S_{\triangle ABO}\cdot S_{\triangle CDO}}=12$，且当$S_{\triangle ABO}=S_{\triangle CDO}$(此时四边形$ABCD$为一梯形)时等号成立，所以此时四边形$ABCD$面积达到最小值27.

15.【答案】证明：如答图28-8所示，由于$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=720^\circ$，不妨设$\angle A+\angle F\leqslant 240^\circ$，作菱形$ABGF$，则因为$\angle A+\angle AFG=180^\circ$，所以$\angle GFE\leqslant 60^\circ$，$FG=FE=1$，则$GE$是$\triangle FGE$最小边，$GE\leqslant 1$，又$BG=1$，故$BE\leqslant BG+GE\leqslant 2$.



答图28-8

第29讲　组合几何初步

一、填空题(每题5分,共50分)

1.【答案】15.

【解析】对于两条线段，只要有一个端点不同，就是不同的线段，我们以左端点为标准，将线段分5类分别计数：

(1) 以A为左端点的线段有AB、AC、AD、AE、AF共5条；

(2) 以B为左端点的线段有BC、BD、BE、BF共4条；

(3) 以C为左端点的线段有CD、CE、CF共3条；

(4) 以D为左端点的线段有DE、DF共2条；

(5) 以 E 为左端点的线段只有 EF，共 1 条.

所以，不同的线段一共有 $5+4+3+2+1=15$(条).

评注 一般地，如果一条线段上有 $n+1$ 个点(包括两个端点)，那么这 $n+1$ 个点把这条线段一共分成的线段总数为 $n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$.

2.【答案】19.

【解析】线段 AB 上共有 $n+2$ 个点(包括端点)，由题 1 的评注，不同的线段有 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 条.所以 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}=210$，解得 $n=19$.

3.【答案】100.

【解析】注意到不同的长方形对应大长方形长和宽上的两条不同线段.而大长方形中长的一边有 5 个分点(包括端点)，所以，长的一边上不同的线段共有 $1+2+3+4=10$(条).同样，宽的一边上不同的线段也有 10 条.所以，共有长方形 $10\times10=100$(个).

4.【答案】22.

【解析】1 个圆最多能把平面分成 2 个部分；

2 个圆最多能把平面分成 4 个部分；

3 个圆最多能把平面分成 8 个部分；

现在加入第 4 个圆，为了使分成的部分最多，第 4 个圆必须与前面 3 个圆都有 2 个交点，因此得 6 个交点，这 6 个交点将第 4 个圆的圆周分成 6 段圆弧，而每一段圆弧将原来的部分一分为二，即增加了一个部分，于是，4 个圆最多将平面分成 $8+6=14$ 个部分.

同样道理，5 个圆最多将平面分成 $14+8=22$ 个部分.

评注 用上面类似的方法，可以计算出 n 个圆最多分平面的部分数为 $2+1\times2+2\times2+\cdots+(n-1)\times2=2+2[1+2+\cdots+(n-1)]=n^2-n+2$.

5.【答案】32.

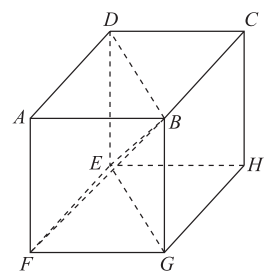
【解析】由题 4 可知，平面上 5 个圆最多能把平面分成 22 个部分.现在加入 1 条直线，由于 1 条直线最多与 1 个圆有两个交点，所以 1 条直线与 5 个圆最多有 10 个交点.10 个点把这条直线分成了 11 段，其中 9 条线段在圆内，2 条射线在圆外，9 条在圆内的线段把原来的部分一分为二，圆外只增加了一个部分.所以，总共增加了 10 个部分.因此，5 个圆和 1 条直线，最多将平面分成 $22+10=32$(个)部分.

6.【答案】24.

【解析】如答图 29-1 所示，连接 BD、BE、BF、EG，则 $\triangle BEF$、$\triangle BEG$、$\triangle BDE$ 均为不规则三角形.

所以，从正方体的一个顶点出发与所有顶点的连线中有三个不规则的三角形.

所以，用一个正方体上的任意三个顶点构成的所有三角形中，不规则三角形的个数是 $3\times8=24$(个).



答图 29-1

7.【答案】72.

【解析】含两个“*”的矩形，与第二、三两行有公共部分.它们可能与第一行有公共部分，也可能没有公共部分，即分为两类.

每一类中的矩形，可能与四、五两行都有公共部分，或都没有公共部分，或仅与第四行有公共部分而与第五行没有公共部分，即又分为三类，这样，从行考虑共有 $2\times3=6$ 类.

同样，考虑列，矩形可能与第一、二列都有公共部分，或都没有公共部分，或仅与第二列有公共部分，共 3 类.而与第五、六、七列的关系则有 4 类：都有公共部分，都没有公共部分，仅与第五列有公共部分，与第五、六列有公共部分而与第七列无公共部分.

所以，含两个“*”的矩形共有 $2\times3\times3\times4=72$(个).

8.【答案】AB、DH、FG.

【解析】因为每个正方形的 4 根铅丝分别涂上红、黄、蓝、白 4 种颜色.

所以在同一个正方形中的 2 根铅丝不能涂成同一种颜色.

又因为 AD 涂成红色,BF 涂成黄色,GH 涂成蓝色.

所以涂成红色的铅丝只能有 EF、FG、CG.

而如果 FG 涂成红色,那么没有其他任何的铅丝再能够涂成红色,于是正方形 $EFBA$ 没有红色铅丝,不符合题意.则涂成红色的铅丝有 EF、CG.

同理涂成黄色的铅丝有 EH、CD;涂成蓝色的铅丝有 AE、BC.

则涂成白色的铅丝有 AB、DH、FG.

9.【答案】8.

【解析】先考虑一个 3×3 的方格表,其中有 k 个小方格被染成了红色,使得任意两个红色小方格的中心之间的距离大于 2.由枚举可以知道,k 的最大值为 2,并且只有如答图 29-2 所示的两种情况(包括对称的情形,R 表示红色).

R		
		R

R		
		R

答图 29-2

将一个 6×6 的方格表分成 4 个 3×3 的方格表,由于每个 3×3 的方格表中至多有 2 个红色小方格,于是 $n\leqslant2\times4=8$.

另一方面,如答图 29-3 所示的染色恰有 8 个红色小方格,并且任意两个红色小方格的中心之间的距离大于 2.

综上所述,n 的最大值为 8.

R				R	
		R			
					R
	R				
			R		
R					R

答图 29-3

10.【答案】9.

【解析】设这 n 个凸多边形中,有 k_3 个三角形,k_4 个四边形,k_5 个五边形,……,k_m 个 m 边形.则这 n 个凸多边形的内角和为

$k_3\times(3-2)\times180°+k_4\times(4-2)\times180°+k_5\times(5-2)\times180°+\cdots+k_m\times(m-2)\times180°$.

另一方面,矩形内部有 6 个顶点,对于每个顶点,围绕它的多边形的内角和为 360°.矩形边界线段内(不含矩形顶点)有 8 个顶点,在每个顶点处,各多边形在此汇合成一个平角,其和为 180°.在矩形的每个顶点处,各多边形在此汇合成一个直角,其和为 90°.因此,这 n 个凸多边形的内角和为 $6\times360°+8\times180°+4\times90°$.

所以 $k_3\times(3-2)\times180°+k_4\times(4-2)\times180°+k_5\times(5-2)\times180°+\cdots+k_m\times(m-2)\times180°=6\times360°+8\times180°+4\times90°$.

故 $k_3+2k_4+3k_5+\cdots+(m-2)k_m=22$, ①

再考虑这 n 个凸多边形的边数:

由于每个凸 m 边形有 m 条边,因此,这 n 个凸多边形的边数和为 $3k_3+4k_4+5k_5+\cdots+mk_m$.

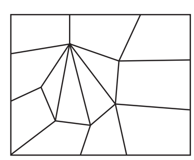
另一方面,由条件知,在矩形内部有 18 条边,每条边都是两个凸多边形的公共边,应计算 2 次.而在矩形边界上的 12 个点,得到 12 条线段,它们都对应某个凸多边形的边.因此,这 n 个凸多边形的边数和为 $18\times2+12=48$.

所以 $3k_3+4k_4+5k_5+\cdots+mk_m=48$, ②

由①②,消去 k_3,得 $k_4+2k_5+\cdots+(m-3)k_m=9$,所以 $k_4\leqslant9$.

又如答图 29-4 所示的划分符合要求,此时,$k_3=4$,$k_4=9$.

所以 k_4 的最大值为 9,即这 n 个凸多边形中,最多有 9 个四边形.



答图 29-4

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11.【答案】证明:我们将这条线段 n 等分,并把等分后的每一份看成一个"抽屉",那么这里的 $n+1$ 个点中至少有 2 个点在同一个等分后的"抽屉"中.也就是说,至少有 2 个点在同一个长度为 $\frac{1}{n}$

的小线段内,当然这 2 个点之间的距离就一定不会超过$\frac{1}{n}$.命题得证.

12.【答案】取正方形各边上的四等分点,可以把一个正方形分成 $4^2=16$ 个正方形,再把其中位于一角的 9 个拼成一个正方形,共得 $16-9+1=8$ 个正方形.

将一个大正方形分成 16 个正方形后,把其中任意 5 个分成 4 个小正方形(注意到取正方形各边上的中点,可以把一个正方形分成 $2^2=4$ 个正方形),共有 $16-5+5\times4=31$(个)正方形.

13.【答案】取一个立方体各棱的三等分点,可以把立方体分割成 $3^3=27$ 个立方体,再把其中 4 个立方体各分成 $2^3=8$ 个立方体(方法是取每个立方体各棱的中点),一共可以得到 $27-4+4\times2^3=55$(个)立方体.

14.【答案】证明:假设结论不成立.给矩形编号,1 号矩形覆盖的面积是 1,当 2 号矩形盖上去后,被覆盖面积增加的尽管不超过 1,但大于$\frac{8}{9}$;类似地,当 3 号矩形盖上去后,又增加了大于$\frac{7}{9}$的面积……,最后,被 9 个矩形盖住的总面积超过了 $1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\cdots+\frac{1}{9}=5$,矛盾! 所以结论成立.

15.【答案】首先,从这些圆中选出半径最大的圆,并考察半径为其 3 倍的同心圆,剔除所有包含在这个同心圆里面的圆,于是剩下的圆与原来的最大圆没有交点,再在剩下的圆中找出最大的圆.重复上述过程,由于圆的总数有限,这一过程总会终止.这时,每个半径变大 3 倍的圆覆盖了原先所有的圆,它们的面积之和不小于 1,而这些“半径变大 3 倍的圆”对应的所有原先的同心圆,便是满足条件的两两不相交,且面积之和不小于$\frac{1}{9}$的圆.

第 30 讲　完全平方数

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1.【答案】1、2、5、6、7 或 0.

【解析】完全平方数的末位数字只能是 0、1、4、5、6 或 9,所以 m^2+1 的个位数为 1、2、5、6、7 或 0.

2.【答案】0.

【解析】因为 n 是奇数,所以存在整数 k,使得 $n=2k+1$.从而 $n^2-1=(2k+1)^2-1=4k^2+4k$ 是 4 的倍数.

3.【答案】1 或 5.

【解析】因为 n 是偶数,所以存在整数 k,使得 $n=4k$ 或 $n=4k+2$.

当 $n=4k$ 时,$n^2+1=(4k)^2+1=16k^2+1$,它除以 8 的余数是 1.

当 $n=4k+2$ 时,$n^2+1=(4k+2)^2+1=16k^2+16k+5$,它除以 8 的余数是 5.

4.【答案】0.

【解析】若 k 不能被 3 整除,则完全平方数 k^2 除以 3 的余数只能是 1,所以 k^2-1 除以 3 的余数为 0.

5.【答案】5.

【解析】因为 $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2$ 的个位数字与只看个位数字的平方和的个位数字相同,并且 $1+4+9+6+5+6+9+4+1+0=45$,所以前十个连续正整数的平方和的个位数是 5.把原式中每十个数分成一组考虑求和(最后 9 个数单独分成一组),则原式的个位数字与下式相同:

$(1+4+9+6+5+6+9+4+1+0)\times12345678+(1+4+9+6+5+6+9+4+1)$

故个位数与 $5\times8+5=45$ 的个位数字相同,即为 5.

6.【答案】7.

【解析】有奇数个正约数的正整数就是完全平方数,所以满足题意的数有 361、400、441、484、529、576 和 625,共 7 个.

7.【答案】1987.

【解析】设这个四位数是 a,依题意,存在正整数 x、y 使得$\begin{cases}a+38=x^2,\\a-138=y^2,\end{cases}$所以 $x^2-y^2=176$,故 $(x-y)(x+y)=176=2^4\times11$.注意到 $x-y$ 与

$x+y$ 同奇偶,所以只能有 $\begin{cases}x-y=2,\\x+y=88,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-y=4,\\x+y=44,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-y=8,\\x+y=22.\end{cases}$ 进而 $\begin{cases}x=45,\\y=43,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=24,\\y=20,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=15,\\y=7.\end{cases}$ 经验算,只有 $\begin{cases}x=45,\\y=43\end{cases}$ 时,$a=1987$ 是一个四位数,其余情况不满足题意.

8.【答案】6.

【解析】设 n 的末两位数是 $10a+b$,则 $(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$.因为 $20ab$ 的十位数字一定是偶数,影响 n^2 的十位数字的只能是 n 的末两位数,所以要使 n^2 的十位数字是奇数 7,那么 b^2 的十位数字必须是奇数,所以 b 只能取 4 或 6,从而 b^2 的个位数字只能是 6.

9.【答案】1681.

【解析】依题意,存在正整数 x,使得 $N=x^2$,N 的末两位数字组成整数 y,去掉该两位数后得到整数 m,且 $m=k^2$(k 是正整数),于是 $x^2=100k^2+y$,所以 $y=x^2-100k^2=(x+10k)(x-10k)$.注意到 $x-10k>0$,所以 $x+10k>20k$,又因为 $1\leqslant y\leqslant 99$,所以 $20k<x+10k\leqslant 99$,故 $k\leqslant 4$.欲使 N 最大,应取 $k=4$,进而有 $N=1600+y$,经验算,当 $x=41$,即 $N=1681$ 时,N 取最大值.

10.【答案】11.

【解析】因为 $\overline{aabb}=11\times\overline{a0b}$ 是一个完全平方数,所以存在正整数 x,使得 $\overline{a0b}=11\times x^2$,所以 $x=4,5,6,7,8$ 或 9.经验算,只有 $x=8$ 时满足题意,此时 $\overline{aabb}=88^2=7744$,所以 $a+b=11$.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11.【答案】证明:

$$3\underbrace{99\cdots96}_{n\text{个}9}\underbrace{00\cdots01}_{n\text{个}0}$$
$$=3\times10^{2n+2}+(10^n-1)\times10^{n+2}+6\times10^{n+1}+1$$
$$=3\times10^{2n+2}+10^{2n+2}-10^{n+2}+6\times10^{n+1}+1$$
$$=(2\times10^{n+1})^2-4\times10^{n+1}+1$$
$$=(2\times10^{n+1}-1)^2$$
$$=1\underbrace{99\cdots9}_{(n+1)\text{个}9}{}^2$$

所以原命题成立.

12.【答案】证明:通过因式分解,可得 $y=(x+1)^2(x^2+1)$,所以 $y>(x+1)^2x^2=(x^2+x)^2$.另外,$y<x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x=(x^2+x+1)^2$,所以 y 在两个连续整数的平方数之间,从而 y 一定不是完全平方数.

13.【答案】证明:依题意,存在正整数 m,使得 $3n+1=m^2$,从而 m 不能被 3 整除,分情况讨论:

(1) 若 $m=3k+1$(k 是整数),则因为 $3n+1=m^2$,所以 $n=3k^2+2k$,进而 $n+1=k^2+k^2+(k+1)^2$ 是三个数的平方和;

(2) 若 $m=3k+2$(k 是整数),则因为 $3n+1=m^2$,所以 $n=3k^2+4k+1$,进而 $n+1=k^2+(k+1)^2+(k+1)^2$ 是三个数的平方和.

命题获证.

14.【答案】证明:设这个自然数是 n,则题目中所说的和是 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$.

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$
$$=[n(n+3)]\cdot[(n+1)(n+2)]+1$$
$$=(n^2+3n)\cdot(n^2+3n+2)+1$$
$$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1$$
$$=(n^2+3n+1)^2$$

所以命题成立.

15.【答案】不能找到这样的四个正整数,使得它们中任两个数的积与 2018 的和都是完全平方数.

下面来证明这个结论:偶数的平方能被 4 整除,奇数的平方被 4 除余 1,也就是说正整数的平方被 4 除余 0 或 1.若存在正整数满足 $n_in_j+2018=m_{ij}{}^2(i,j=1,2,3,4)$,其中 m_{ij} 是正整数,则因为 2018 被 4 除余 2,所以 n_in_j 被 4 除应余 2 或 3.

(1) 若正整数 n_1、n_2、n_3、n_4 中有两个是偶数,不妨设 n_1、n_2 是偶数,则 n_1n_2+2018 被 4 除余 2,与正整数的平方被 4 除余 0 或 1 不符,所以正整数 n_1、n_2、n_3、n_4 中至多有一个是偶数,至少有三个是奇数.

(2) 在这三个奇数中,被 4 除的余数可分为余 1 或余 3 两类.根据抽屉原则,必有两个奇数属于同一类,则它们的乘积被 4 除余 1,与 n_in_j 被 4 除余 2 或 3 的结论矛盾.

综上所述,不能找到这样的四个正整数,使得它

们中任两个数的积与 2018 的和都是完全平方数.

第 31 讲　简单的不定方程

一、填空题(每题 5 分,共 50 分)

1.【答案】3.

【解析】先考虑 $x\leqslant y$ 的情况,此时又由 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ 和解是正整数可知 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{2}{x}$ 并且 $\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$,故 $3\leqslant x\leqslant 4$.

当 $x=3$ 时,由 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ 可知 $y=6$;

当 $x=4$ 时,计算可知 $y=4$.

再考虑 $x>y$ 的情况,综上可知原方程的正整数解是 $\begin{cases}x=3,\\y=6,\end{cases}\begin{cases}x=6,\\y=3,\end{cases}\begin{cases}x=4,\\y=4.\end{cases}$ 所以总共有 3 组解.

2.【答案】$\begin{cases}x=7,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=6.\end{cases}$

【解析】由 $x+xy-7=0$ 可知 $x(y+1)=7$,因为 y 是非负数,故 $y+1\neq 0$,从而得到 $x=\frac{7}{y+1}$,因为解是非负整数,所以 $y+1=1$ 或 $y+1=7$,所以 $y=0$ 或 $y=6$.进而得到原方程的非负整数解是 $\begin{cases}x=7,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=6.\end{cases}$

3.【答案】12.

【解析】由 $\frac{2}{x+3}+\frac{2}{3-x}+\frac{2x+18}{x^2-9}=\frac{2(x-3)-2(x+3)+2x+18}{x^2-9}=\frac{2x+6}{x^2-9}=\frac{2}{x-3}$ 的值是整数,并且 x 为整数,则 $x-3=\pm 2$ 或 $x-3=\pm 1$.则 $x=5,1,4$ 或 2,故所有符合条件的 x 值的和为 12.

4.【答案】12.

【解析】设有 a 个男生骑车,b 个女生骑车,依题意有

$$2a+3b=35, \qquad ①$$

所以 $a=\frac{35-3b}{2}$,进而 $a+b=\frac{35-b}{2}$,故要使 $a+b$ 的值最小,应使 b 的值尽量大.

由①可知 $3b\leqslant 35$,所以 $b\leqslant 11$.故可得当 $b=11$ 时,$a+b$ 取最小值 12.

5.【答案】72.

【解析】设小明今年 x 岁,那么今年祖父 $6x$ 岁.设 y 年后,祖父的年龄将是小明的年龄的 5 倍,可得方程 $5(x+y)=6x+y$,化简得 $x=4y$,所以 x 是 4 的倍数.

设又过 z 年以后,祖父的年龄将是小明的年龄的 4 倍,所以 $4(x+y+z)=6x+y+z$,即得 $2x=3(y+z)$,故 x 必须是 3 的倍数.又因为 x 是 4 的倍数,所以 x 是 12 的倍数.当 $x=12$ 时,祖父今年的年龄是 $12\times 6=72$ 岁;当 $x\neq 12$ 时,x 的最小值是 24,但此时祖父今年的年龄是 $24\times 6=144$ 岁,与题设矛盾.

综上,祖父今年的年龄是 72 岁.

6.【答案】1150.

【解析】设该旅行团住三人间 x 间,双人间 y 间,单人间 z 间,总住宿费为 a 元.

则依题意得 $\begin{cases}x+y+z=20, & ①\\3x+2y+z=50, & ②\\60x+60y+50z=a, & ③\end{cases}$

由②－①得 $2x+y=30$,即

$$y=30-2x, \qquad ④$$

由②－①×2 得 $x-z=10$,即

$$z=x-10, \qquad ⑤$$

因为 $0\leqslant y\leqslant 20$,即 $0\leqslant 30-2x\leqslant 20$,解得

$$5\leqslant x\leqslant 15 \qquad ⑥$$

同理 $0\leqslant z\leqslant 20$,即 $0\leqslant x-10\leqslant 20$,解得

$$10\leqslant x\leqslant 30 \qquad ⑦$$

由⑥⑦知 $10\leqslant x\leqslant 15$.

将④⑤代入③得 $a=60x+60(30-2x)+50(x-10)=1300-10x$,故 $x=130-\frac{a}{10}$.

所以 $10\leqslant 130-\frac{a}{10}\leqslant 15$,进而 $1150\leqslant a\leqslant 1200$.

所以这笔最省的住宿费用是 1150 元,此时 $x=15$,$y=0$,$z=5$.

7.【答案】4.

【解析】因为 $2x+2y=a$ 有整数解,所以 a 必为偶数.由 $\begin{cases}ax+2y=24,\\2x+2y=a,\end{cases}$ 可知 $(a-2)x=24-a$,所以 $x=\dfrac{24-a}{a-2}=-1+\dfrac{22}{a-2}$.又 $-1+\dfrac{22}{a-2}$ 是整数,所以可以推出 $a=0,4,24$ 或 -20.经检验,这些都是符合题意的,所以答案是 4.

8.【答案】12.

【解析】由 $abc+ab+bc+ca+a+b+c=119$ 可知

$$(a+1)(b+1)(c+1)=120, \qquad ①$$

依题意三角形三边的长度均不相同,不妨设 $a<b<c$,从而 $120>(a+1)^3$,所以 $a<2\sqrt[3]{15}-1<2\times3-1=5$,又 a 是整数,所以 $a\leqslant4$.

若 $a=1$,由 a、b、c 是互不相等的整数和 $a<b<c$ 可知 $c\geqslant b+1=b+a$,这和 a、b、c 是三角形三边长矛盾,舍去.

若 $a=2$,则由①可知 $(b+1)(c+1)=40$,解得 $\begin{cases}b=3,\\c=9\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=4,\\c=7,\end{cases}$ 它们都不满足 a、b、c 是三角形三边长的条件,故舍去.

若 $a=3$,则由①可知 $(b+1)(c+1)=30$,解得 $\begin{cases}b=4,\\c=5,\end{cases}$ 此时 $a+b+c=12$.

若 $a=4$,则 $b\geqslant5$,$c\geqslant6$,故 $(a+1)(b+1)(c+1)>120$ 与①矛盾,舍去.

综上,该三角形的周长为 12.

9.【答案】6.

【解析】因为 $x^2+xy+y^2=3(x+y)$,

所以 $2x^2+2xy+2y^2=6x+6y$,

故 $(x-3)^2+(y-3)^2+(x+y)^2=18$.

经计算,符合条件的整数解有

$\begin{cases}x=3,\\y=0,\end{cases}\begin{cases}x=0,\\y=3,\end{cases}\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$

和 $\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$ 所以一共有 6 组整数解.

10.【答案】17.

【解析】由已知,$b=\sqrt{a^5}=a^2\sqrt{a}$,又因为 a 和 b 都是正整数,所以一定存在正整数 m,使得 $a=m^2$,进而 $b=m^5$.同理,存在正整数 n,使得 $c=n^4$,$d=n^3$.从而由 $a-c=319$,可得 $m^2-n^4=319$,故 $(m+n^2)(m-n^2)=319$.注意到 $319=11\times29$,所以只能 $\begin{cases}m+n^2=319,\\m-n^2=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m+n^2=29,\\m-n^2=11.\end{cases}$

若 $\begin{cases}m+n^2=319,\\m-n^2=1,\end{cases}$ 则 $n^2=159$,n 不是正整数,舍去.所以只能 $\begin{cases}m+n^2=29,\\m-n^2=11,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=20,\\n=3,\end{cases}$

所以 $\dfrac{b}{a^2}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{m^5}{(m^2)^2}-\dfrac{n^4}{n^3}=m-n=17$.

二、解答题(每题 10 分,共 50 分)

11.【答案】$\begin{cases}x=15\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$.

【解析】由 $3x+11y=45$ 及解的非负性可知 $11y\leqslant45$,所以 $y\leqslant4$.经计算,当 $y=1$、2 或 4 时,x 不是整数,舍去.当 $y=0$ 时,$x=15$.当 $y=3$ 时,$x=4$. 所以原方程的非负整数解是 $\begin{cases}x=15,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$

12.【答案】4.

【解析】设需 x 枚 7 分,y 枚 5 分恰好支付 142 分,于是,

$$7x+5y=142. \qquad ①$$

所以 $y=\dfrac{142-7x}{5}=28-x-\dfrac{2x-2}{5}$.

由于 $7x\leqslant142$,所以 $x\leqslant20$,并且由上式知 $5|2(x-1)$,所以 $5|x-1$,从而,

$x=1,6,11$ 或 16.

故①的非负整数解为 $\begin{cases}x=1,\\y=27,\end{cases}\begin{cases}x=6,\\y=20,\end{cases}\begin{cases}x=11,\\y=13,\end{cases}$ $\begin{cases}x=16,\\y=6.\end{cases}$

所以,共有 4 种不同的支付方式.

13.【答案】$\begin{cases}x=10,\\y=3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2,\\y=-3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-10,\\y=-3.\end{cases}$

【解析】方程 $x^2-4xy+19y^2=151$ 化为 $(x-2y)^2=151-15y^2$.

依题意,$A=151-15y^2$ 为完全平方数.又由 $A=$

$151-15y^2\geqslant 0$，得 $y^2\leqslant\frac{151}{15}$.而 y 为整数，得 $y^2\leqslant 10$.故 $y^2=0,1,4$ 或 9.

当 $y^2=0$ 时，$A=151-15y^2=151$，不是完全平方数；

当 $y^2=1$ 时，$A=151-15y^2=136$，不是完全平方数；

当 $y^2=4$ 时，$A=151-15y^2=91$，不是完全平方数；

当 $y^2=9$ 时，$A=151-15y^2=16=4^2$，是完全平分数.

所以，方程化为$\begin{cases}y^2=9,\\(x-2y)^2=16,\end{cases}$即$\begin{cases}y=3,\\(x-6)^2=16,\end{cases}$或$\begin{cases}y=-3,\\(x+6)^2=16.\end{cases}$

所以$\begin{cases}y=3,\\x-6=4,\end{cases}$或$\begin{cases}y=3,\\x-6=-4,\end{cases}$或$\begin{cases}y=-3,\\x+6=4,\end{cases}$或$\begin{cases}y=-3,\\x+6=-4.\end{cases}$

所以原方程的整数解为$\begin{cases}x=10,\\y=3,\end{cases}$或$\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-2,\\y=-3,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-10,\\y=-3.\end{cases}$

14.【答案】$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$或$\begin{cases}x=2017,\\y=1.\end{cases}$

【解析】原方程 $x^2+2017y^2=2018x$ 可化为 $2017y^2=2018x-x^2$，进而可以得到 $2017y^2=(2018-x)x$.注意到 2017 是质数并且方程的解是正整数，所以 2017 可以整除 $2018-x$ 或 x.若 $2017\mid 2018-x$，则 $x=1$，进而得 $y=1$.若 $2017\mid x$，又因为 $2018-x>0$，所以 $x<2018$.故只能 $x=2017$，进而得 $y=1$.所以原方程的正整数解为$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$或$\begin{cases}x=2017,\\y=1.\end{cases}$

15.【答案】(1) 16h；(2) 2 或 3 或 4 或 5 或 7 或 13 人.

【解析】(1) 设装卸工作需 xh 完成，则第一人干了 xh，最后一个人干了 $\frac{x}{4}$h 两人共干活$\left(x+\frac{x}{4}\right)$h，平均每人干活$\frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{4}\right)$h.由题意知，第二人与倒数第二人，第三人与倒数第三人，平均每人干活的时间也是$\frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{4}\right)$h.因为总工作量不变，并且所有人都参与了工作，所以两种装卸方式的人均工作量相等，故$\frac{1}{2}\left(x+\frac{x}{4}\right)=10$，解得 $x=16$，所以改变后的装卸方式需 16h.

(2) 设共有 y 人参加装卸工作，由于每隔 th 增加一人，因此最后一人比第一人少干 $(y-1)t$h，按题意，得 $16-(y-1)t=16\times\frac{1}{4}$，即 $(y-1)t=12$.

解此不定方程得

$\begin{cases}y=2,\\t=12,\end{cases}\begin{cases}y=3,\\t=6,\end{cases}\begin{cases}y=4,\\t=4,\end{cases}\begin{cases}y=5,\\t=3,\end{cases}\begin{cases}y=7,\\t=2,\end{cases}\begin{cases}y=13,\\t=1.\end{cases}$

即参加的工人人数可能是 2 或 3 或 4 或 5 或 7 或 13 人.