第5章 整数规划

本章内容要点

- 整数规划相关概念；
- 整数规划问题的一般特点；
- 分支定界法求解过程；
- 割平面法求解过程；
- 0—1 规划的求解方法；
- 指派问题法求解过程。

本章核心概念

- 整数规划(integer programming)；
- 分支定界方法(branch and bound algorithm)；
- 割平面方法(cutting plane method)；
- 匈牙利方法(Hungarian method)；
- 0—1 规划(0-1 programming)；
- 指派(assignment problem)。

■ 案例

经济管理当中经常存在人员指派问题，企业中有 4 个人可以胜任 4 项不同工作的任意一项，但是完成工作的效率有所不同，如表 5-1 所示。

表 5-1 案例工作时间表

任　务	甲	乙	丙	丁
A	10	12	13	15
B	15	10	15	22
C	15	15	14	17
D	20	15	13	16

为了使得企业获得最好的经济效益，应该如何指派这 4 个人完成 4 项不同工作？

用单纯形法求解线性规划问题，其最优解往往是分数或小数。但对于某些实际问题，常要求全部或部分变量的最优解必须是整数。例如，所求的解是人数，机器台数或工厂个数等；又如决策某个方案的取与舍，电路的连通与切断，逻辑运算中涉及的是与非等；再如某种机器有限种运行方式的选择，人员配备的若干组合方案的选取等。这些涉及用整数值来作为取值范围，由于它们的求解过程中的特殊性而构成数学规划的一个分支，称之为整数规划。

在一个线性规划问题中，若要求全部变量取整数值，称为纯整数规划问题。若要求部分变量取整数值，称为混合整数规划问题。有一类整数规划问题，其决策变量只取 0 或 1 值，

由于计算上的特殊性，称之为 0—1 规划。

整数规划具有广泛的应用领域，如管理决策、人员组织、生产调度、区域布局、资本预算、资源规划等。在工程和科学计算方面，计算机设计、系统可靠性、编码系统设计等也都提出不少整数规划的问题。

本章介绍整数规划建模中常使用的一些处理方法及最基本的整数规划解法。在最后一节，将介绍一个特殊的整数规划问题——指派问题的解法。

5.1 整数规划问题的提出

5.1.1 问题特征

整数规划问题的一个明显特征是它的变量是离散的，因而在经典连续数学中的理论和基本方法一般无法直接用于求解整数规划问题。

求解整数规划问题，初看起来好像很简单，比如把带有分数或小数的解进行“收尾”或“去尾”处理就可以了。事实上，这样处理有时行得通，有时却行不通。例如，某公司根据市场需要，用线性规划的方法得到一个方案是增加甲产品的工厂 3.7 个，乙产品的工厂 1.5 个。如果用凑整方法求其解，则有 4 个近似方案：(4,1)、(4,2)、(3,1)、(3,2)，显然，这 4 个方案之间差别很大。对原线性规划问题来说，它们有的是可行解，有的则不是可行解；或虽是可行解，但不一定是最优解。因此，对求最优整数解的问题，有必要另行研究。

5.1.2 整数规划建模中常用的处理方法

对于整数规划问题，除考虑到它的某些或全部决策变量有整数限制外，没有特殊的建模难点。比较特殊的是 0—1 变量的使用，它可以把一些不易用数学公式表示的条件，处理成易于表达的数学式。下面介绍一个关于投资问题的数学规划背景及几个 0—1 变量设置问题。

1. 资本预算问题

决策者要对若干潜在的投资方案作出选择，决定是取还是舍。

设共有 n 个投资方案，$c_j(j=1,2,\cdots,n)$ 为第 j 个投资方案的投资收益，整个投资过程共分为 m 个阶段，b_i 为第 i 阶段的投资总量，a_{ij} 为第 i 阶段第 j 项投资方案所需要的资金。目标是在各阶段资金限制下使整个投资的总收益最大。

这类问题是典型的决策问题。设决策变量 x_j 为对第 j 个方案的取($x_j=1$)或舍($x_j=0$)，可得到下列整数规划问题(0—1 规划)。

$$\max S = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j = 0 \text{ 或 } 1, & j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{5-1}$$

式(5-1)的约束 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i (i=1,2,\cdots,m)$ 反映了第 i 个时期资金增长量的平衡。

这里 a_{ij} 代表第 i 时期内第 j 项投资的净资金流量：

① $a_{ij}>0$，表示需附加资金；

② $a_{ij}<0$，表示该项投资在第 i 时期内产生资金。

右端项 b_i 表示第 i 时期外源资金流量的增长量：

① $b_i>0$，表示有附加资金的数量；

② $b_i<0$，表示要抽回资金的数量。

2. 指示变量

指示变量常用于指示不同情况的出现。例如，某产品生产涉及两类成本：一类为产品的边际成本费用 c_1，即再生产一个单位的产品需有 c_1 费用的投入；另一类为固定成本费用 c_2，如装配线的固定投资等，它与生产产品的数量无关，只要生产就必须全数投入。设 x 为产品数量，c 为总成本费用，于是成本费用如下：

当 $x=0$ 时，$c=0$；

当 $x>0$ 时，$c=c_1x+c_2$。

显然，变成了一个非线性的分段函数，为了便于计算，可以引入指标变量 y，即

$$y=\begin{cases}0, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

于是得到线形函数 $c=c_1x+c_2y$。

例 5.1 仓库位置问题：有 m 个仓库，经营者需要决定动用哪些仓库才能满足 n 个客户的需求，还要进一步决定从各仓库分别向不同客户运送货物的数量，使总的费用最少。

设 f_i 表示动用仓库 i 的固定运营费，c_{ij} 表示从仓库 i 到客户 j 运送单位货物量的费用 $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。设置变量 x_{ij} 为从仓库 i 向客户 j 运送货物的数量，指示变量

$$y_i=\begin{cases}1, & \text{表示动用仓库 } i\\ 0, & \text{表示不动用仓库 } i\end{cases}$$

规定约束条件：

(1) 每个客户对货物的需求量 d_j，必须从各动用仓库中得到满足。

(2) 不动用的仓库不能对任何客户供货。

这里，第(2)个约束的处理可用下面的不等式：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant y_i M_i$$

其中，M_i 为可能从仓库 i 中取出货物的上限数，一个较简单的取法为

$$M_i=\sum_{j=1}^{n} d_j,\quad i=1,2,\cdots,m$$

可以看出，当 $y_i=0$ 时，即不动用仓库 i，$x_{ij}\leqslant 0$，$j=1,2,\cdots,n$，又由于 $x_{ij}\geqslant 0$，故这时从第 i 个仓库到第 j 个客户的运量必有 $x_{ij}=0$；当 $y_i=1$ 时，即动用仓库 i，运量不会在这里受

到限制。

根据上述分析，容易得到下列数学模型

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}f_iy_i$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=d_j, & j=1,2,\cdots,n\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}-y_i\sum_{j=1}^{n}d_j\leqslant 0, & i=1,2,\cdots,m\\ x_{ij}\geqslant 0, & i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n\\ y_i=0\text{ 或 }1, & i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

3. 线性规划模型的附加条件

在许多实际问题中，线性规划模型中的约束条件允许一定范围的放宽或对个别因素有进一步限制时，常可通过引入 0—1 变量来处理。下面分 3 种情况介绍建模思路。

（1）不同时成立的约束条件。设某个模型问题中的约束条件不必同时成立，有 m 个线性不等式约束

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i,\quad i=1,2,\cdots,m \tag{5-2}$$

对每个约束进入一个指示变量 y_i，并得到每个约束左端的一个上界 M_i（$i=1,2,\cdots,n$），建立下列不等式

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+M_iy_i\leqslant b_i+M_i,\quad i=1,2,\cdots,m \tag{5-3}$$

显然，当 $y_i=1$ 时，式(5-2)与式(5-3)等价；当 $y_i=0$ 时，式(5-3)是恒成立，相当于除去了这个限制。

在实际问题中，如果至少有 k 个约束成立时，只需附加下列约束

$$\sum_{i=1}^{m}y_i\geqslant k$$

（2）最优解中非零分量个数的限制。在许多实际问题中，对最优解中的非零分量个数有所限制。类似上述分析可对每个决策变量 x_i 找到其上界 M_i，并引入指示变量 y_i。附加式(5-4)

$$x_i-M_iy_i\leqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{5-4}$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_i\leqslant k \tag{5-5}$$

可以看出，式(5-4)等价于

$$x_i>0\Leftrightarrow y_i=1$$

$$x_i=0\Leftrightarrow y_i=0$$

式(5-5)说明，非零分量至多有 k 个。

（3）离散的资源变化。实际问题中常出现下列情况：不等式约束

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b_i \quad i = 1,2,\cdots,k \tag{5-6}$$

表示右端的值可以有 k 个等级的违背，而 $b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_k$，这里 b_0 为最低的限制，在这个限制下，无须付出代价；其余的限制 $b_i(i=1,2,\cdots,k)$ 各需相应付出代价 $c_i(i=1,2,\cdots,k)$，自然有 $c_1 < c_2 < \cdots < c_k$。

在这种情况下，可以引入 0—1 变量 y_i 来把上述情况模型化：用式(5-7)和式(5-8)取代式(5-6)，得

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j - \sum_{i=0}^{k} b_i y_i \leqslant 0 \tag{5-7}$$

$$\sum_{i=1}^{k} y_i = 1 \tag{5-8}$$

在目标函数上需增加一项(求 min 函数时)

$$\sum_{i=1}^{k} c_i y_i \tag{5-9}$$

由此不难看出式(5-7)以及式(5-8)决定了式(5-6)中的一个式子成立，而式(5-9)表明把相应的代价加到目标函数中。注意，式(5-9)应在目标函数求最小时使用。请读者思考为什么？在求目标函数最大时如何处理？

思　考　题

(1) 整数规划问题有什么特点？

(2) 引入指标变量在现行规划建模中有什么作用？

5.2　分支定界法

本章主要讨论线性整数规划问题，设整数规划问题为

$$\max S = \boldsymbol{CX}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{b} & (\text{或 } \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, & x_i(i = 1,2,\cdots,n) \text{ 为整数} \end{cases}$$

前文叙述了整数规划问题的特征，于是在求解问题上就自然形成了两个基本的途径：一个是先忽略整数要求，按连续情况求解，然后对解进行整数处理。虽然已经说明了它的不足之处，但由于缺乏更好的方法，所以仍是一种可参考的思路；另一个是基于如下考虑：离散情况下的解大多是有限的，因此找出所有的解，再进行比较，这种想法也是自然的，称之为穷举法或枚举法。

枚举法在实际中常常是行不通的，因为这个有限的数量往往大得惊人，在允许的时限内，无法求得它们的全部解，更不要说比较了。例如 0—1 规划中的背包问题，设有 60 个变量，其可能的解有 $2^{60} = 1.6529 \times 10^{18}$ 个，如果用计算机每秒处理 1 亿个数据，需要 360 多年。

分支定界法是在 20 世纪 60 年代初提出来的，可用于求解纯整数型或混合型的整数规划问题。由于该方法便于用计算机求解，它是目前解整数规划问题的重要方法。下面说明分支定界法的基本思路和步骤。

设有整数规划问题(Ⅰ)为

(Ⅰ)

$$\max S = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geqslant 0 \text{ 且 } x_j \text{ 是整数} \end{cases}$$

与它对应的线性规划问题(Ⅱ)(又称为松弛问题)为

(Ⅱ)

$$\max S = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ x_j \geqslant 0 \text{ 且 } x_j \text{ 无整数限制} \end{cases}$$

显然，问题(Ⅰ)的可行解集是问题(Ⅱ)的可行解集的子集。因而，问题(Ⅰ)的最优值≤问题(Ⅱ)的最优值。

第 1 步，对线性规划问题(Ⅱ)求解，其结果有下列 3 种情形：

(1) 问题(Ⅱ)无可行解，这时问题(Ⅰ)也无可行解，停止计算；

(2) 问题(Ⅱ)有整数最优解，且符合问题(Ⅰ)的整数条件，这时问题(Ⅱ)的最优解就是问题(Ⅰ)的最优解，停止计算；

(3) 问题(Ⅱ)有最优解，而其解不全为整数。这时问题(Ⅱ)的最优解不是问题(Ⅰ)的可行解。但是，问题(Ⅱ)的目标函数最优值(设为 $\bar{S}$)，是问题(Ⅰ)的最优目标函数值 S^* 的上界(求最小值时，为其下界)。

第 2 步，分支与定界。

设线性规划问题(Ⅱ)的最优解为

$$\boldsymbol{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^{\mathrm{T}}$$

其中，x_j^* $(j=1,2,\cdots,n)$不是整数，则必有

$$[x_j^*] < x_j^* < [x_j^*] + 1$$

其中，$[x_j^*]$表示小于 x_j^* 的最大整数。由此构造两个约束条件：

$$x_j \leqslant [x_j^*] \quad \text{和} \quad x_j \geqslant [x_j^*] + 1$$

将其分别加入问题(Ⅱ)，从而得到问题(Ⅱ)的两支子线性规划问题(Ⅲ)和(Ⅳ)，即

(Ⅲ) $\max S = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \\ x_j \leqslant [x_j^*] \\ x_j \geqslant 0 \end{cases}$$

(Ⅳ) $\max S = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \\ x_j \geqslant [x_j^*] + 1 \\ x_j \geqslant 0 \end{cases}$$

对问题(Ⅲ)和问题(Ⅳ)求解。如果子问题有最优解,但其解不全为整数,则选取最优目标函数值的最大者(若目标函数求最小时,选最小者)作为新的上界;如果子问题中有最优整数解,且其目标函数值小于新的上界,则其值可作为新的下界,(原问题(Ⅰ)的下界可看作0)记作$\underline{S}$。

第3步,剪枝。在继续分支的过程中,各分支的最优目标函数值如果有小于$\underline{S}$,则称这个分支已被“查清”,将该分支剪掉,不再计算。因为再算下去不会得到更好的目标函数值。

若有目标函数值大于下界$\underline{S}$,且不符合整数条件,则重复第2步,直到找到S^*。

例 5.2 求解问题(Ⅰ):

(Ⅰ) $\max S = 5x_1 + 8x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \text{ 且为整数} \end{cases}$$

(Ⅱ) $\max S = 5x_1 + 8x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解

(1) 设问题(Ⅰ)的松弛问题为问题(Ⅱ),不受整数约束,利用单纯形法求解问题(Ⅱ),得最优解为

$$x_1 = 2.25, \quad x_2 = 3.75, \quad \text{且 } S_0 = 41.25$$

其可行解域如图5-1所示。显然原问题(Ⅰ)的可行域是问题(Ⅱ)的可行域的一个子集,整数最优解应出现在可行域的整数点上,$S_0 = 41.25$为其上界。

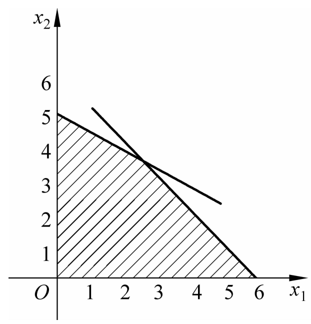

图 5-1　Ⅱ可行域

(2) 分支与定界。因 x_1、x_2 都是小数,可任选一个进行分支。今选 $x_2 = 3.75$,对问题(Ⅱ)增加约束条件:

$$x_2 \leqslant [3.75] = 3 \quad \text{和} \quad x_2 \geqslant [3.75] + 1 = 4$$

则问题(Ⅱ)分解为两个子问题(Ⅲ)和问题(Ⅳ)(即两支)。

(Ⅲ) $\max S = 5x_1 + 8x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(Ⅳ) $\max S = 5x_1 + 8x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 9x_2 \leqslant 45 \\ x_2 \geqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

求解线性规划问题(Ⅲ)和问题(Ⅳ),得到如下最优解:

问题(Ⅲ)　$x_1 = 3, x_2 = 3$ 且 $S_1 = 39$

问题(Ⅳ)　$x_1 = 1.8, x_2 = 4$ 且 $S_2 = 41$

问题(Ⅲ)都是整数解,该问题已经查清。然而问题(Ⅲ)虽都是整数解,但 $S_1<S_2$。这里 $S_1=39$ 可作为新的下界,$S_2=41$ 可作为新的上界。

值得指出的是,增加了约束条件 $x_2\leqslant 3$ 和 $x_2\geqslant 4$ 之后,虽然缩小了可行解的范围,但原问题(Ⅰ)的整数可行解没有变,这是因为在 $3<x_2<4$ 内没有整数解,如图 5-2 所示。

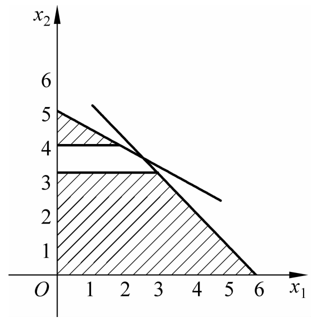

图 5-2 Ⅲ和Ⅳ可行域

(3) 重复步骤(2),继续对问题(Ⅳ)进行分解。因为在问题(Ⅳ)中 $x_1=1.8$,对问题(Ⅳ)增加约束条件:

$$x_1\leqslant[1.8]=1 \quad 和 \quad x_1\geqslant[1.8]+1=2$$

将问题(Ⅳ)再分解为两个子问题(Ⅴ)和问题(Ⅵ):

(Ⅴ) $\max S=5x_1+8x_2$

$$\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 6\\5x_1+9x_2\leqslant 45\\x_2\geqslant 4\\x_1\leqslant 1\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(Ⅵ) $\max S=5x_1+8x_2$

$$\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 6\\5x_1+9x_2\leqslant 45\\x_2\geqslant 4\\x_1\geqslant 2\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

求解问题(Ⅴ)和问题(Ⅵ),得问题(Ⅴ)的最优解为

$$x_1=1,x_2=4\frac{4}{9} \quad 且 \quad S_3=40\frac{5}{9}$$

问题(Ⅵ)无可行解,这个子问题也已查清。

因为在问题(Ⅴ)中有 $x_2=4\frac{4}{9}$,且 $S_1<S_3<S_2$,则作为新的上界。继续对问题(Ⅴ)进行分解,对问题(Ⅴ)增加约束条件:

$$x_2\leqslant 4 \quad 和 \quad x_2\geqslant 5$$

则问题(Ⅴ)又分解为两个子问题(Ⅶ)和问题(Ⅷ):

(Ⅶ) $\max S=5x_1+8x_2$

$$\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 6\\5x_1+9x_2\leqslant 45\\x_2\geqslant 4\\x_1\leqslant 1\\x_2\leqslant 4\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

(Ⅷ) $\max S=5x_1+8x_2$

$$\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 6\\5x_1+9x_2\leqslant 45\\x_2\geqslant 4\\x_1\leqslant 1\\x_2\geqslant 5\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

求解线性规划问题(Ⅶ)和问题(Ⅷ),得到如下最优解:

问题(Ⅶ) $x_1=1,x_2=4$ 且 $S_5=37$;

问题(Ⅷ) $x_1=0,x_2=5$ 且 $S_6=40$。

问题(Ⅶ)和问题(Ⅷ)都是整数解,均属查清。但 $S_5<S_1$(下界),故将该枝剪去;又 $S_1<S_6<S_3$(上界),所以 S_6 为原问题(Ⅰ)的最优值,它对应的解为其最优解。计算终止。

综上所述,求解的全过程可用如图 5-3 所示的树状图表示。图中的 B_0 从问题(Ⅱ)开始,依次编号。

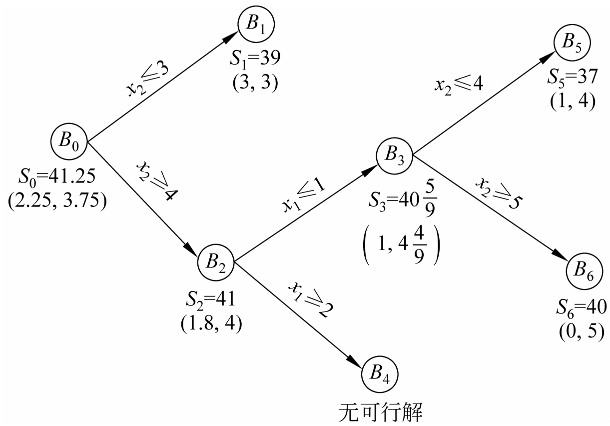

图 5-3　求解树状结构图

思　考　题

(1) 整数规划问题和对应的线性规划问题,两者的可行域有什么关系。

(2) 简述分支定界方法求解的一般步骤。

(3) 用图形的方式说明分支定界方法的求解思路。

5.3　割平面法

割平面法是求解整数规划问题最早提出的一种方法。它的基本思想是,首先不考虑变量是整数的条件,但增加特定的约束条件(称为割平面),使得在原凸可行域中切掉一部分,被切割掉的这部分不包含任何的整数可行解。这样经过有限次的切割,最终可得到某个顶点的坐标恰好是整数,并且是问题的最优解。

割平面算法的基本类型有纯整数型和混合型。本节仅讨论纯整数型的割平面算法,它的基本要求是:每一个约束条件的所有系数及右端常数项都必须是整数。下面先讨论线性规划问题存在整数解的必要条件。

设有整数规划问题为

(Ⅰ)

$$\max S = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0 \text{ 且是整数} \end{cases}$$

与其对应的线性规划问题为

（Ⅱ）

$$\max S=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,(i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0\end{cases}$$

用单纯形法求得最终单纯形表如表 5-2 所示。

表 5-2 线性规划最终单纯型表

		x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n
S	b_{00}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	b_{0m+1}	$\cdots$	b_{0n}
x_1	b_{10}	1					b_{1m+1}	$\cdots$	b_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$				$\vdots$		$\vdots$
x_i	b_{i0}			1			b_{im+1}	$\cdots$	b_{in}
$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$		$\vdots$		$\vdots$
x_m	b_{m0}					1	$b_{m,m+1}$	$\cdots$	b_{mn}

为了表述方便，这里恰好用 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 作为基变量。

如果 $b_{i0}(i=1,2,\cdots,m)$全是整数，显然它是原问题的最优解。

如果 $b_{i0}(i=1,2,\cdots,m)$不全为整数，不妨设 b_{i0} 不是整数，则它对应于单纯形表中第 i 个方程

$$x_i+\sum_{j=m+1}^{n}b_{ij}x_j=b_{i0} \tag{5-10}$$

称为割平面的来源行。

令

$$b_{ij}=[b_{ij}]+f_{ij},b_{i0}=[b_{i0}]+f_{i0}$$

其中，$0\leqslant f_{ij}<1$，　$0<f_{i0}<1$，于是式(5-10)可写成

$$x_i+\sum_{j=m+1}^{n}[b_{ij}]x_j+\sum_{j=m+1}^{n}f_{ij}x_j=[b_{i0}]+f_{i0}$$

即

$$x_i+\sum_{j=m+1}^{n}[b_{ij}]x_j-[b_{i0}]=f_{i0}-\sum_{j=m+1}^{n}f_{ij}x_j \tag{5-11}$$

为了使 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$是整数，上式右端必须是整式。又注意到 $f_{ij}\geqslant 0,x_j\geqslant 0$，则有

$$f_{i0}-\sum_{j=m+1}^{n}f_{ij}x_j\leqslant f_{i0}<1$$

因为小于 1 且不大于 0 的整数，所以有

$$f_{i0}-\sum_{j=m+1}^{n}f_{ij}x_j\leqslant 0 \tag{5-12}$$

由上述分析可得如下重要结论：

如果线性规划问题（Ⅱ）有整数解，则它必须满足条件式(5-12)，此不等式称为割平面