1　哈代的明信片

让我们从一则小故事开始我们的黎曼猜想（Riemann hypothesis）漫谈吧。[①] 故事大约发生在20世纪30年代，当时英国有位很著名的数学家叫做哈代（Godfrey Hardy，1877—1947），他不仅著名，而且在我看来还是两百年来英国数学界的一位勇者。为什么这么说呢？因为在17世纪的时候，英国数学家与欧洲大陆的数学家之间发生了一场激烈的论战。论战的主题是谁先发明了微积分。论战所涉及的核心人物一边是英国的科学泰斗牛顿（Isaac Newton，1642—1727），另一边则是欧洲大陆（德国）的哲学及数学家莱布尼茨（Gottfried Leibniz，1646—1716）。这场论战打下来，两边筋疲力尽自不待言，还大伤了和气，留下了旷日持久的后遗症。自那以后，许多英国数学家开始排斥起来自欧洲大陆的数学进展。一场争论演变到这样的一个地步，英国数学界的集体荣誉及尊严、牛顿的赫赫威名便都成了负资产，英国的数学在保守的舞步中走起了下坡路。

这下坡路一走便是两百年。

在这样的一个背景下，在复数理论还被一些英国数学家视为来自欧洲大陆的危险概念的时候，土生土长的英国数学家哈代却对来自欧洲大陆（而且偏偏还是德国）、有着复变函数色彩的数学猜想——黎曼猜想——产生了浓厚兴趣，积极地研究它，并且——如我

---

① 这则故事来自与哈代相识的匈牙利数学家波利亚（George Pólya，1887—1985）。

们将在后文中介绍的——取得了令欧洲大陆数学界为之震动的成就，算得上是勇者所为。

当时哈代在丹麦有一位很要好的数学家朋友叫做玻尔（Harald Bohr，1887—1951），他是著名量子物理学家玻尔（Niels Bohr，1885—1962）的弟弟。玻尔对黎曼猜想也有浓厚的兴趣，曾与德国数学家兰道（Edmund Landau，1877—1938）一起研究黎曼猜想（他们的研究成果也将在后文中加以介绍）。哈代很喜欢与玻尔共度暑假，一起讨论黎曼猜想。他们对讨论都很投入，哈代常常要待到假期将尽才匆匆赶回英国。结果有一次当他赶到码头时，很不幸地发现只剩下一条小船可以乘坐了。从丹麦到英国要跨越宽达几百公里的北海（North Sea），在那样的汪洋大海中乘坐小船可不是闹着玩的事情，弄得好算是浪漫刺激，弄不好就得葬身鱼腹。为了旅途的平安，信奉上帝的乘客们大都忙着祈求上帝的保佑。哈代却是一个坚决不信上帝的人，不仅不信，有一年他还把向大众证明上帝不存在列入自己的年度六大心愿之中，且排名第三（排名第一的是证明黎曼猜想）。不过在面临生死攸关的旅程之时哈代也没闲着，他给玻尔发去了一张简短的明信片，上面只有一句话：

“我已经证明了黎曼猜想。”

哈代果真已经证明了黎曼猜想吗？当然不是。那他为什么要发那样一张明信片呢？回到英国后他向玻尔解释了原因，他说如果那次他乘坐的小船真的沉没了，那人们就只好相信他真的证明了黎曼

猜想。但他知道上帝是肯定不会把这么巨大的荣誉送给他——一个坚决不信上帝的人——的，因此上帝是一定不会让他的小船沉没的。①

上帝果然没舍得让哈代的小船沉没。自那以后又过了大半个世纪，吝啬的上帝依然没有物色到一个可以承受这么大荣誉的人。

---

①　哈代的这个解释让我想起了一句有趣的无神论者的祈祷语：上帝啊，如果你存在的话，拯救我的灵魂吧，如果我有灵魂的话（God, if there is one, save my soul if I have one）。

2　黎曼ζ函数与黎曼猜想

那么这个让上帝如此吝啬的黎曼猜想究竟是一个什么样的猜想呢？在回答这个问题之前我们先得介绍一个函数：黎曼 ζ 函数(Riemann zeta-function)。这个函数虽然挂着德国数学家黎曼(Bernhard Riemann，1826—1866)的大名，其实并不是黎曼首先提出的。但黎曼虽然不是这一函数的提出者，他的工作却大大加深了人们对这一函数的理解，为其在数学与物理上的广泛应用奠定了基础。后人为了纪念黎曼的卓越贡献，就用他的名字命名了这一函数。①

那么究竟什么是黎曼 ζ 函数呢？简单地说，它的定义是这样的：黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$是级数表达式(n 为正整数)

$$\zeta(s) = \sum_{n} n^{-s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

在复平面上的解析延拓(analytic continuation)。之所以要对上述级数表达式进行解析延拓，是因为——如我们已经注明的——这一表达式只适用于复平面上 s 的实部 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 的区域(否则级数不收敛)。黎曼找到了这一表达式的解析延拓(当然黎曼没有使用“解析

① 远在黎曼之前，黎曼 ζ 函数(当然那时还不叫这名字)的级数表达式就已经出现在了数学文献中，但正如我们在正文中所注，那级数表达式的定义域较小，即只适用于复平面上 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 的区域。黎曼把黎曼 ζ 函数的定义域大大地延拓了，这一点不仅对于它的应用有着重要意义，对于黎曼猜想的表述及研究更是至关重要(因为黎曼猜想所涉及的非平凡零点全都在级数表达式的定义域之外)。仅凭这一点，即便把黎曼称为黎曼 ζ 函数的提出者之一，也并不过分。

延拓”这样的现代复变函数论术语)。运用围道积分(contour integral),解析延拓后的黎曼 ζ 函数可以表示为

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-z)^s}{e^z-1}\frac{dz}{z}。$$

这里我们采用的是历史文献中的记号,式中的积分实际上是一个环绕正实轴(即从 $+\infty$ 出发,沿实轴上方积分至原点附近,环绕原点积分至实轴下方,再沿实轴下方积分至 $+\infty$——离实轴的距离及环绕原点的半径均趋于 0)进行的围道积分;式中的 Γ 函数 $\Gamma(s)$ 是阶乘函数在复平面上的解析延拓,对于正整数 $s>1$:$\Gamma(s)=(s-1)!$。可以证明,上述 $\zeta(s)$ 的积分表达式除了在 $s=1$ 处有一个简单极点(simple pole)外,在整个复平面上处处解析。这样的表达式是所谓的亚纯函数(meromorphic function)——即除了在一个孤立点集(set of isolated points)上存在极点(pole)外,在整个复平面上处处解析的函数——的一个例子。这就是黎曼 ζ 函数的完整定义。

运用上面的积分表达式可以证明,黎曼 ζ 函数满足以下代数关系式——也叫函数方程(functional equation):

$$\zeta(s) = 2\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)。$$

从这个关系式中不难发现,黎曼 ζ 函数在 $s=-2n$(n 为正整数)处取值为零——因为 $\sin(\pi s/2)$ 为零。① 复平面上的这种使黎曼 ζ 函数取

① $\sin(\pi s/2)$ 在 $s=0$ 及 $s=2n$(n 为正整数)时也为零,但是在 $s=0$ 时 $\zeta(1-s)$ 有极点,$s=2n$(n 为正整数)时 $\Gamma(1-s)$ 有极点。因此只有在 $s=-2n$(n 为正整数)时才可以由 $\sin(\pi s/2)=0$ 直接推知黎曼 ζ 函数的取值为零,$s=0$ 及 $s=2n$(n 为正整数)时的取值则需进一步分析(分析的结果是非零)。

值为零的点被称为黎曼 ζ 函数的零点。因此 $s=-2n$（n 为正整数）是黎曼 ζ 函数的零点。这些零点分布有序、性质简单，称为黎曼 ζ 函数的平凡零点（trivial zero）。除了这些平凡零点外，黎曼 ζ 函数还有许多其他零点，它们的性质远比那些平凡零点来得复杂，被恰如其分地称为非平凡零点（non-trivial zero）。对黎曼 ζ 函数非平凡零点的研究构成了现代数学中最艰深的课题之一。我们所要讨论的黎曼猜想就是一个关于这些非平凡零点的猜想，在这里我们先把它的内容表述一下，然后再叙述它的来龙去脉。

> 黎曼猜想：黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于复平面 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线上。

在黎曼猜想的研究中，数学家们把复平面上 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线称为临界线（critical line）。运用这一术语，黎曼猜想也可以表述为：黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于临界线上。

这就是黎曼猜想的内容，它是黎曼在 1859 年提出的。从其表述上看，黎曼猜想似乎是一个纯粹的复变函数命题，但我们很快将会看到，它其实却是一曲有关素数分布的神秘乐章。