# 第 1 章

# 范畴及其运算

## 1.1 集合、类与函数

按照 G. Cantor 的想法，由一些确定的且相互区别的对象汇集而组成的一个整体，称为**集合**，组成该集合的对象称为它的**元素**，至于这些对象如何组合，有以下两条重要原则。

(1) **外延原则**：一个集合由它的元素完全决定。这就是说，若两个集合的元素相同，则它们为同一个集合。

(2) **概括原则**：对任意一个性质 $P$，均存在一个集合 $S$，它的元素恰是具有性质 $P$ 的那些对象。

根据外延原则，这个集合 $S$ 必是唯一的。故常用 $\{x \mid P(x)\}$ 表示，即

$$S = \{x \mid P(x)\}$$

然而，罗素在 1902 年发现，若令

$$T = \{x \mid x \notin x\}$$

则 $T$ 不是集合，这就是著名的**罗素悖论**。

为了克服朴素集合论中的悖论，必须对概括原则加以修改。通常采用的成功做法如下：

(1) 把概括原则中的“存在一个集合 $S$”修改为“存在一个类 $S$”。

**类**是一个比集合更为广泛的概念，所有的集合都是类，但类不一定是集合。不是集合的类称为**真类**。例如，上面的 $T$ 就是一个真类。

(2) 用下述的原则 1 至原则 6 取代关于集合的概括原则。

为简便起见，我们采用纯集合论，即所有的对象均是集合。因此，真类既不能是集合的元素，也不能是真类的元素。下面列举关于类和集合的若干存在性原则。

**1) 外延原则**：一个类由它的元素完全决定。

**定义 1.1.1** 设 $S_1$ 和 $S_2$ 均是类。若 $S_1$ 和 $S_2$ 满足

$$\forall x.(x \in S_1 \to x \in S_2)$$

则称 $S_1$ 为 $S_2$ 的**子类**，记为 $S_1 \subseteq S_2$。如果 $S_1 \subseteq S_2$ 且 $S_2 \subseteq S_1$，则由外延原则知道，$S_1$ 和 $S_2$ 为同一个类，记为 $S_1 = S_2$。如果 $S_1 \subseteq S_2$ 且 $S_1 \neq S_2$，则称 $S_1$ 为 $S_2$ 的**真子类**，记为 $S_1 \subset S_2$。

**2) 概括原则**：对于任意一个性质 $P$，均存在一个类 $S$，它的元素恰是具有性质 $P$ 的那些对象。

根据外延原则，这个类 $S$ 必是唯一的，故常用 $\{x \mid P(x)\}$ 表示，即

$$S = \{x \mid P(x)\}$$

**3) 原则 1**：存在一个不含任何元素的集合，称为**空集**。

根据外延原则，空集必是唯一的，故常用 $\varnothing$ 表示。

**4) 原则 2**：对任意二集合 $X$ 与 $Y$，均存在一个集合 $S$，它的元素恰为 $X$ 与 $Y$，称为 $X$ 与 $Y$ 的**无序偶集合**。

根据外延原则，这个集合必是唯一的，故常用 $\{X, Y\}$ 表示。当 $X = Y$ 时，简写为 $\{X\}$，并称 $\{X\}$ 为 $X$ 的**单元素集合**。

**定义 1.1.2** 对任意二集合 $X$ 与 $Y$，若令

$$\langle X, Y\rangle = \{\{X\}, \{X, Y\}\}$$

则 $\langle X, Y\rangle$ 为一个集合，称为 $X$ 与 $Y$ 的**有序偶集合**。这时，显然有

$$\langle X, Y\rangle = \langle U, V\rangle \quad \text{当且仅当} \quad X = U \text{ 且 } Y = V$$

**5) 原则 3**：对任意集合 $S$，均存在 $S$ 的**幂集** $\mathscr{P}(S) = \{X \mid X \subseteq S\}$。

**6) 原则 4**：对任意集合 $S$，均存在 $S$ 的**并集** $\bigcup S = \{x \mid \text{有 } U \in S \text{ 使 } x \in U\}$。

**7) 原则 5**：对任意性质 $P$ 和集合 $S$，存在集合 $\widetilde{S} = \{x \mid x \in S \text{ 且 } P(x)\}$。

原则 5 又称**子集分离原则**，因为它是通过性质 $P$ 从 $S$ 中分离出的一个子集 $\widetilde{S}$。若令

$$V = \{x \mid x = x\}$$

则由概括原理知道，$V$ 是一个类。但因为

$$T = \{x \mid x \in V \text{ 且 } x \notin x\}$$

所以由子集分离原则知道，$V$ 必是一个真类。

若 $S$、$S_1$ 和 $S_2$ 均是类，则令

$$\begin{aligned}
\bigcup S &= \{x \mid \text{有 } U \in S \text{ 使 } x \in U\} \\
\bigcap S &= \{x \mid \text{若 } U \in S \text{ 则 } x \in U\} \\
S_1 \times S_2 &= \{\langle x, y\rangle \mid x \in S_1 \text{ 且 } y \in S_2\} \\
S_1 \setminus S_2 &= \{x \mid x \in S_1 \text{ 且 } x \notin S_2\} \\
\sim S &= V \setminus S
\end{aligned}$$

根据概括原则，$\bigcup S$、$\bigcap S$、$S_1 \times S_2$、$S_1 \setminus S_2$ 和 $\sim S$ 均是类，且有

$$\begin{array}{ll}
\sim \varnothing = V & \sim V = \varnothing \\
V = S \cup \sim S & \bigcup V = V
\end{array}$$

**定义 1.1.3**　若 $S_1$ 和 $S_2$ 均是类且 $R \subseteq S_1 \times S_2$，则称 $R$ 是一个从 $S_1$ 到 $S_2$ 的**二元关系类**，简称**关系类**。并令

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}R &= \{x \mid \exists y.(y \in S_2 \wedge \langle x,y\rangle \in R)\}\\ \mathrm{ran}R &= \{y \mid \exists x.(x \in S_1 \wedge \langle x,y\rangle \in R)\}\\ \mathrm{fld}R &= \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R\end{aligned}$$

当 $R$ 为一个集合时，则称类关系 $R$ 为**集合关系** $R$，并简称关系 $R$。

关于类关系的**合成**、**逆**和**限制**定义如常，而且相应的性质也成立。

**定义 1.1.4**　设 $S_1$ 和 $S_2$ 均是类，若 $F \subseteq S_1 \times S_2$ 满足

$$\forall x.\forall y.\forall z.(\langle x,y\rangle \in F \wedge \langle x,z\rangle \in F \to y = z)$$

则称 $F$ 为一个从 $S_1$ 到 $S_2$ 的**部分函数**，记为 $F : S_1 \rightsquigarrow S_2$。

若 $F$ 为集合，则称类部分函数 $F$ 为**集合部分函数**，简称**部分函数**。如果 $\mathrm{dom}F = S_1$，则称类部分函数 $F$ 为**类全函数**，简称**类函数**。

关于类函数的**内射**、**满射**、**双射**、**左逆**、**右逆**、**逆**以及类部分函数的**合成**和**限制**定义如常，而且相应的性质也均成立。

**8) 单值化原则**：对任意类关系 $R$，均存在类部分函数 $F$ 使

$$F \subseteq R \quad \text{且} \quad \mathrm{dom}F = \mathrm{dom}R$$

单值化原则与概括原则无关，它等价于选择公理。

**9) 类选择公理**：若类 $S$ 的元素均是非空集合，则有选择函数 $\varphi : S \to \bigcup S$ 使

$$\varphi(x) \in x \qquad x \in S$$

当 $S$ 为集合时，该公理也称为**选择公理**。

**10) 原则 6**：若 $F : S_1 \rightsquigarrow S_2$ 为类部分函数且 $S \subseteq S_1$ 为集合，则 $\mathrm{ran}(F{\restriction}_S)$ 为集合。这个原则称为**替换原则**，当 $S \subseteq S_1$ 为集合时，它保证了替换结果 $\mathrm{ran}(F{\restriction}_S)$ 为集合。

**定义 1.1.5**　设 $S$ 为集合且 $X \in S$。若 $S \cap X = \varnothing$，则称 $X$ 为 $S$ 的**极小元**。

显然，$X$ 为集合 $S$ 的极小元，当且仅当 $X \in S$ 且 $S \cap X = \varnothing$。

注意，对于真类而言，我们一般不谈论它的极小元。

**11) 极小元存在原则**：每个非空集合均有极小元。

这个原则与概括原则无关，它是对集合的一种限制，用以排除一些非正规的“集合”，因此它又称为**正规性原则**。由此原则不难知道：

(1) 若 $X$ 为集合，则 $X \notin X$。

(2) 若 $X$ 和 $Y$ 均是集合，则 $\neg(X \in Y \wedge Y \in X)$。

(3) 若 $X_0, \cdots, X_n$ 均是集合，则 $\neg(X_0 \in X_1 \wedge \cdots \wedge X_{n-1} \in X_n \wedge X_n \in X_0)$。

(4) 不存在集合的无穷序列 $X_0, X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}, \cdots$ 使 $\cdots \in X_{n+1} \in X_n \in \cdots \in X_1 \in X_0$。

**定义 1.1.6** 若 $S$ 为集合，则令

$$S^+ = S \cup \{S\}$$

并称 $S^+$ 为 $S$ 的**后继**。

显然，集合 $S$ 的后继 $S^+$ 仍为集合。

**自然数**可用集合定义如下：

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing \\ 1 &= 0^+ \\ 2 &= 1^+ \\ &\vdots \end{aligned}$$

也可以归纳如下：

(1) $0 = \varnothing$ 为自然数。

(2) 若 $n$ 为自然数，则 $n^+$ 为自然数。

(3) 每个自然数均可通过有限次应用 (1) 和 (2) 获得。

**12) 原则 7**：所有的自然数形成一个集合。

这个原则又称**无穷原则**，它保证了无穷集合的存在性。

所有自然数形成的集合称**自然数集合**，用 $\omega$ 表示。这时显然有

$$0 \in \omega \wedge \forall x.(x \in \omega \to x^+ \in \omega)$$
$$\forall x.(x \in \omega \to x = 0 \vee \exists y.(y \in \omega \wedge x = y^+))$$

**定义 1.1.7** 设 $A$ 和 $B$ 均为集合:

(1) 若有内射 $f : A \to B$，则记为 $\#A \leqslant \#B$（或 $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{B}}$）。

(2) 若有双射 $f : A \to B$，则称 $A$ 与 $B$ **等势**，记为 $\#A = \#B$（或 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$）。

(3) 若 $\#A \leqslant \#B$ 且 $\#A \neq \#B$，则记为 $\#A < \#B$（或 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$）。

**定义 1.1.8** **序数**是自然数的推广，它可以归纳定义如下:

(1) 0 为序数。

(2) 若 $\alpha$ 为序数，则 $\alpha^+$ 为序数。

(3) 若 $s$ 为序数的一个集合（即 $s$ 的元素皆是序数），则 $\bigcup s$ 为序数。

(4) 每个序数皆可以通过有限次应用 (1) $\sim$ (3) 获得。

关于序数，有几点说明：

(1) 每个自然数 $n$ 都是序数。

(2) $\omega$ 是一个序数。

(3) $\omega + 1 = \omega^+$、$\omega + 2 = (\omega + 1)^+ \cdots$ 都是序数。

(4) $\omega + \omega = \bigcup\{\omega + n \mid n \in \omega\}$ 也是序数，将其记为 $2 \cdot \omega$，同样还有序数 $3 \cdot \omega$，$\cdots$，$n \cdot \omega$。

(5) $\omega \cdot \omega = \bigcup\{n \cdot \omega \mid n \in \omega\}$ 也是序数，记为 $\omega^2$，同样还有序数 $\omega^3$，$\cdots$，$\omega^n$，$\cdots$，$\omega^\omega$，$\cdots$ 。

在序数之间可定义二元小于关系 $<$ 如下：

$$\text{若 } \alpha \text{ 和 } \beta \text{ 皆是序数，则 } \alpha < \beta \text{ 当且仅当 } \alpha \in \beta$$

并把 $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta$ 简写为 $\alpha \leqslant \beta$。

**定义 1.1.9**　设 $A$ 为集合，

(1) 称 $A$ 为 **$\in$- 连接的**，是指 $A$ 满足

$$\forall x \in A.\forall y \in A.(x \in y \vee x = y \vee y \in x)$$

(2) 称 $A$ 为**传递的**，是指 $A$ 满足

$$\forall x.\forall y.(x \in y \wedge y \in A \to x \in A)$$

可以证明：

(1) $\alpha$ 为序数当且仅当 $\alpha$ 是传递的和 $\in$- 连接的。

(2) 序数具有**三岐性**：若 $\alpha$ 和 $\beta$ 为任意二序数，则恰有以下三者之一成立：

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \beta < \alpha$$

通常，用 $On$ 表示所有序数组成的类。显然，$On$ 是一个真类，而且 $On$ 上的类二元关系“$\leqslant$”是自反的、反对称的和传递的。

除 0 外的其他序数分为**后继序数**和**极限序数**两种：

① 序数 $\alpha$ 为后继序数：有序数 $\beta$ 使 $\alpha = \beta^+$；

② 序数 $\alpha$ 为极限序数：$\alpha \neq 0$ 且 $\alpha$ 不是后继序数。

**定义 1.1.10**　若序数 $\alpha$ 满足

$$\forall \beta.(\beta < \alpha \to \#\beta < \#\alpha)$$

则称 $\alpha$ 为**基数**（即开始序数）。

由此定义，每个自然数 $n$ 都是基数，$\omega$ 也是基数。但是，$\omega+1$，$\omega+2$，$2\omega$，$\cdots$，$\omega^2$，$\cdots$，$\omega^\omega$ 都不是基数，因为它们都与 $\omega$ 等势。

如果令

$$\omega_1 = \{\alpha \mid \alpha \text{ 是序数且 } \#\alpha \leqslant \#\omega\}$$

那么可以证明 $\omega_1$ 为一个基数。

类似地，对于每个后继序数 $\alpha$，还可以令

$$\omega_{\alpha+1} = \{\beta \mid \beta \text{ 是序数且 } \#\beta \leqslant \#\omega_\alpha\}$$

对每个极限序数 $\alpha$，令

$$\omega_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \omega_\beta$$

则可以证明每个 $\omega_\alpha$ 都是基数。由于这个证明需要超限归纳法，这里不给出。

一般，也把 $\omega$ 写作 $\omega_0$。这样，我们就获得了一个基数序列

$$\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n, \cdots, \omega_\alpha, \cdots$$

在有的教科书上，也把这些基数写作

$$\aleph_0, \aleph_1, \cdots, \aleph_n, \cdots, \aleph_\alpha, \cdots$$

这些基数对应的序数的序，仍用 $\leqslant$ 表示，称为基数的**自然序**。

比类更广泛的概念是“**超类**”，其元素皆是类（即集合或真类）。对于超类和类，也可以仿照对类和集合那样处理，有类似的原则，以及关于超类的代数运算、超类关系、超类部分函数和超类函数等。而且还有与此相应的原则、概念、性质和结果，这里就不再详述了。

## 1.2 图、图同态与图自然变换

**定义 1.2.1** 若 $O$ 和 $M$ 均为类，$\mathrm{source}: M \to O$ 且 $\mathrm{target}: M \to O$，则称四元偶 $\mathcal{G} = \langle O, M, \mathrm{source}, \mathrm{target}\rangle$ 为**图**。

(1) 称 $O$ 为 $\mathcal{G}$ 的**结点类**，其元素称为 $\mathcal{G}$ 的**结点**。

(2) 称 $M$ 为 $\mathcal{G}$ 的**箭头类**，其元素称为 $\mathcal{G}$ 的**箭头**。

(3) 若 $f \in M$，则称 $\mathrm{source}(f)$ 为 $f$ 的**源**，$\mathrm{target}(f)$ 为 $f$ 的**靶**。

(4) 若 $f \in M$ 使 $A = \mathrm{source}(f)$ 且 $B = \mathrm{target}(f)$，则称 $f$ 为从 $A$ 到 $B$ 的**箭头**，记为 $f: A \to B$ 或 $A \xrightarrow{f} B$。

(5) 若 $A, B \in O$，则令

$$\mathcal{G}[A, B] = \{f \in M \mid \mathrm{source}(f) = A, \mathrm{target}(f) = B\}$$

在不引起混淆时，又常简写为 $[A, B]$。

几点说明如下：

(1) 若 $O = \varnothing$，则 $\mathcal{G} = \langle\varnothing, \varnothing, \varnothing, \varnothing\rangle$，此时称 $\mathcal{G}$ 为**空图**。

(2) 若 $M = \varnothing$，则 $\mathcal{G} = \langle O, \varnothing, \varnothing, \varnothing\rangle$，此时称 $\mathcal{G}$ 为**离散图**。

(3) 若 $O$ 和 $M$ 均为集合，则称 $\mathcal{G}$ 为**小图**。

(4) 若 $O$ 和 $M$ 均为有穷集合，则称 $\mathcal{G}$ 为**有穷图**。

(5) 若当 $A, B \in O$ 时，$[A, B]$ 均为集合，则称 $\mathcal{G}$ 为**局部小图**。

(6) 若 $f \in O$，使 $\mathrm{source}(f) = \mathrm{target}(f)$，则称 $f$ 为 $\mathcal{G}$ 的**自圈**。

(7) 若 $\mathcal{G}$ 无自圈，且当 $A, B \in O$ 时皆有 $\#[A, B] \leqslant 1$，则称 $\mathcal{G}$ 为**简单图**。

(8) 当取 $\Psi = \langle\mathrm{source}, \mathrm{target}\rangle$ 时，图 $\mathcal{G}$ 可表示为 $\mathcal{G} = \langle O, M, \Psi\rangle$。

由上可知：

(1) 有穷图为小图。

(2) 离散图为简单图。

(3) 简单图为局部小图。

(4) 每个箭头都有唯一的源和唯一的靶。

**例 1.1**　设 $A$ 和 $B$ 均为集合且 $R \subseteq A \times B$。若令

$$\begin{aligned} \mathrm{source}(\langle a,b\rangle) &= a \\ \mathrm{target}(\langle a,b\rangle) &= b \end{aligned} \qquad \langle a,b\rangle \in R$$

则 $\mathcal{G}_R = \langle A \cup B, R, \mathrm{source}, \mathrm{target}\rangle$ 为图，且为小图。

**例 1.2**　设 $\mathscr{L}$ 是一个计算机程序设计语言，$TP(\mathscr{L})$ 为 $\mathscr{L}$ 的数据类型集合，$TPF(\mathscr{L})$ 为 $\mathscr{L}$ 的类型化函数集合。若令

$$\begin{aligned} \mathrm{source}(f) &= f \text{ 的自变元类型} \\ \mathrm{target}(f) &= f \text{ 的结果类型} \end{aligned} \qquad f \in TPF(\mathscr{L})$$

则 $\mathcal{G}_{\mathscr{L}} = \langle TP(\mathscr{L}), TPF(\mathscr{L}), \mathrm{source}, \mathrm{target}\rangle$ 是一个图，且为小图。

**例 1.3**　设 *FPL* 为一个一阶逻辑系统，*WFF* 为 *FPL* 的合式公式集合，$\Pi$ 为 *FPL* 的所有从单个合式公式出发的形式证明的集合。若令

$$\begin{aligned} \mathrm{source}(\pi) &= \pi \text{ 的前提} \\ \mathrm{target}(\pi) &= \pi \text{ 的结果} \end{aligned} \qquad \pi \in \Pi$$

则 $\mathcal{G}_{FPL} = \langle WFF, \Pi, \mathrm{source}, \mathrm{target}\rangle$ 是一个图，且为小图。

**定义 1.2.2**　设图 $\mathcal{G} = \langle O, M, \mathrm{source}, \mathrm{target}\rangle$ 且 $\mathcal{G}' = \langle O', M', \mathrm{source}', \mathrm{target}'\rangle$。

(1) 若 $\Phi_0 : O \to O'$ 和 $\Phi_1 : M \to M'$ 满足

$$\Phi_0 \circ \mathrm{source} = \mathrm{source}' \circ \Phi_1 \quad \text{且} \quad \Phi_0 \circ \mathrm{target} = \mathrm{target}' \circ \Phi_1$$

则称 $\Phi = \langle \Phi_0, \Phi_1\rangle$ 为从 $\mathcal{G}$ 到 $\mathcal{G}'$ 的**图同态**，并记为 $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$，见图 1.1。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{source}(f) \arrow[r, Rightarrow, "\Phi_0"] \arrow[dd, "f"'] & \Phi_0(\mathrm{source}(f)) \arrow[r, equal] & \mathrm{source}'(\Phi_1(f)) \arrow[dd, "\Phi_1(f)"] \\
{} \arrow[rr, Rightarrow, "\Phi_1"] & & {} \\
\mathrm{target}(f) \arrow[r, Rightarrow, "\Phi_0"] & \Phi_0(\mathrm{target}(f)) \arrow[r, equal] & \mathrm{target}'(\Phi_1(f))
\end{tikzcd}$$

图　1.1

(2) 设 $\Phi_1 : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$，若 $\Phi_0$ 和 $\Phi_1$ 均为双射，则称 $\Phi$ 为**图同构**。

(3) 若有图同态 $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$，则称 $\mathcal{G}$ **同态于** $\mathcal{G}'$，记作 $\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}'$。

(4) 若有图同构 $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$，则称 $\mathcal{G}$ **同构于** $\mathcal{G}'$，记作 $\mathcal{G} \cong \mathcal{G}'$。

为方便起见，今后统一用 $\Phi$ 表示 $\Phi_0$ 和 $\Phi_1$，因此

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= \Phi_0(A), \qquad A \in O \\ \Phi(f) &= \Phi_1(f), \qquad f \in M \end{aligned}$$

**例 1.4** 对每个图 $\mathcal{G}=\langle O, M, \mathrm{source}, \mathrm{target}\rangle$，取 $\mathbb{I}_{\mathcal{G}}=\langle \mathbb{I}_O, \mathbb{I}_M\rangle$，则 $\mathbb{I}_{\mathcal{G}}:\mathcal{G}\to\mathcal{G}$，并称 $\mathbb{I}_{\mathcal{G}}$ 为 $\mathcal{G}$ 的**恒等图同态**。

显然，$\mathbb{I}_{\mathcal{G}}$ 为图同构，故 $\mathcal{G}\cong\mathcal{G}$。

**例 1.5** 设图 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 如图 1.2 所示。

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "y"] \arrow[d, "x"] & 2 \arrow[loop above, "u"] \arrow[r, "v"] & 3 \\ 4 & & \end{tikzcd}$$

(a) 图 $\mathcal{G}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[loop above, "h"] \arrow[loop below, "k"] \\ C & \end{tikzcd}$$

(b) 图 $\mathcal{G}'$

图 1.2

这时可定义图同态 $\Phi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ 如下:

$$\begin{aligned} &\Phi(1)=A \qquad &&\Phi(x)=f \\ &\Phi(2)=B &&\Phi(y)=g \\ &\Phi(4)=C &&\Phi(u)=h \\ & &&\Phi(v)=k \end{aligned}$$

**例 1.6** 若图 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}'$ 如图 1.3 所示,

$$1 \xrightarrow{x} 2 \xrightarrow{y} 3$$

(a) 图 $\mathcal{G}$

$$A \xrightarrow{f} B$$

(b) 图 $\mathcal{G}'$

图 1.3

则不存在图同态 $\Phi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$，即 $\mathcal{G}\not\cong\mathcal{G}'$。

例 1.6 说明，并非任意两个图之间都一定有图同态，更不用说图同构。

**定理 1.2.1** 设 $\Phi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$，$\Psi:\mathcal{G}'\to\mathcal{G}''$ 且 $\mathcal{G}=\langle O, M, \mathrm{source}, \mathrm{target}\rangle$。若令

$$\begin{aligned} (\Psi\circ\Phi)(A)&=\Psi(\Phi(A)), \qquad && A\in O \\ (\Psi\circ\Phi)(f)&=\Psi(\Phi(f)), && f\in M \end{aligned}$$

则 $\Psi\circ\Phi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}''$，并称 $\Psi\circ\Phi$ 为 $\Psi$ 与 $\Phi$ 的**合成**。

证明很容易，留作练习。

**定义 1.2.3** 设 $\Phi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$。

(1) 若 $\Psi:\mathcal{G}'\to\mathcal{G}$ 使

$$\Phi\circ\Psi=\mathbb{I}_{\mathcal{G}'} \quad 且 \quad \Psi\circ\Phi=\mathbb{I}_{\mathcal{G}}$$

则称 $\Psi$ 为 $\Phi$ 的**逆**。

(2) 若有 $\Psi:\mathcal{G}'\to\mathcal{G}$ 为 $\Phi$ 的逆，则称 $\Phi$ **有逆**。

这时，我们不难证明有以下结论：

(1) 图同态的合成是可结合的，且保持图同构。

(2) 若 $\varPhi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$，则 $\varPhi\circ\mathbb{I}_{\mathcal{G}}=\mathbb{I}_{\mathcal{G}'}\circ\varPhi$。

(3) 若 $\varPhi$ 有逆，则 $\varPhi$ 的逆唯一，并记为 $\varPhi^{-1}$。

(4) 若 $\varPhi$ 有逆，则 $\varPhi^{-1}:\mathcal{G}'\to\mathcal{G}$ 也有逆，且 $(\varPhi^{-1})^{-1}=\varPhi$。

(5) 图同态 $\varPhi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ 有逆，当且仅当 $\varPhi$ 为图同构。

(6) 若 $\varPhi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ 为图同构且 $\varPhi=\langle\varPhi_0,\varPhi_1\rangle$，则 $\varPhi^{-1}=\langle\varPhi_0^{-1},\varPhi_1^{-1}\rangle$ 且 $\varPhi^{-1}:\mathcal{G}'\to\mathcal{G}$ 也是图同构。

(7) 若 $\varPhi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ 和 $\varPsi:\mathcal{G}'\to\mathcal{G}''$ 均有逆，则 $\varPsi\circ\varPhi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}''$ 也有逆，且 $(\varPsi\circ\varPhi)^{-1}=\varPhi^{-1}\circ\varPsi^{-1}$。

现在，我们来介绍一个重要的概念，即图自然变换。

**定义 1.2.4**　设 $\mathcal{G}=\langle O,M,\mathrm{source},\mathrm{target}\rangle$ 和 $\mathcal{G}'=\langle O',M',\mathrm{source}',\mathrm{target}'\rangle$ 均为图。$\varPhi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$ 且 $\varPsi:\mathcal{G}\to\mathcal{G}'$，以及 $M'$ 上的局部二元运算 $\circ$ 使得当 $f,g\in M'$ 且 $\mathrm{target}'(f)=\mathrm{source}'(g)$ 时，恒有

① $g\circ f\downarrow$ 当且仅当 $\mathrm{source}'(g)=\mathrm{target}'(f)$。

② 若 $g\circ f\downarrow$ 则 $\mathrm{source}'(g\circ f)=\mathrm{source}'(f)$ 且 $\mathrm{target}'(g\circ f)=\mathrm{target}'(g)$。

如果 $\alpha:O\to M'$ 使

$$\alpha(\mathrm{target}(f))\circ\varPhi(f)=\varPsi(f)\circ\alpha(\mathrm{source}(f)),\quad f\in M$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{source}(f) \arrow[d, "f"'] & \varPhi(\mathrm{source}(f)) \arrow[r, "\alpha(\mathrm{source}(f))"] \arrow[d, "\varPhi(f)"'] & \varPsi(\mathrm{source}(f)) \arrow[d, "\varPsi(f)"] \\
\mathrm{target}(f) & \varPhi(\mathrm{target}(f)) \arrow[r, "\alpha(\mathrm{target}(f))"] & \varPsi(\mathrm{target}(f))
\end{tikzcd}$$

图　1.4

则称 $\alpha$ 为从 $\varPhi$ 到 $\varPsi$ 的**自然变换**，记为 $\alpha:\varPhi\to\varPsi$，见图 1.4。

如图 1.5 所示，若 $f\in M$ 使 $A=\mathrm{source}(f)$ 且 $B=\mathrm{target}(f)$，即 $f:A\to B$，则

$$\varPsi(f)\circ\alpha(A)=\alpha(B)\circ\varPhi(f)$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & \varPhi(A) \arrow[r, "\alpha(A)"] \arrow[d, "\varPhi(f)"'] & \varPsi(A) \arrow[d, "\varPsi(f)"] \\
B & \varPhi(B) \arrow[r, "\alpha(B)"] & \varPsi(B)
\end{tikzcd}$$

图　1.5

注意，具有上述局部二元运算 $\circ$ 的图 $\mathcal{G}'$ 称为**演算系统**。

## 1.3 范畴的定义

**定义 1.3.1** 若图 $\langle O, M, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}\rangle$ 和 $\mathrm{comp}: M\times M \rightsquigarrow M$ 满足如下公理:

$C_0$: 若 $f, g\in M$，则 $\mathrm{comp}(g,f)\downarrow$ 当且仅当 $\mathrm{dom}(g)=\mathrm{cod}(f)$。

$C_1$: 若 $f, g\in M$ 使 $\mathrm{comp}(g,f)\downarrow$，则 $\mathrm{dom}(\mathrm{comp}(g,f))=\mathrm{dom}(f)$ 且 $\mathrm{cod}(\mathrm{comp}(g,f))=\mathrm{cod}(g)$。

$C_2$: 若 $A\in O$，则有 $\mathbb{I}_A\in M$ 使

① $\mathrm{dom}(\mathbb{I}_A)=A=\mathrm{cod}(\mathbb{I}_A)$。

② 若 $g\in M$ 使 $\mathrm{dom}(g)=A$，则 $\mathrm{comp}(g,\mathbb{I}_A)=g$。

③ 若 $f\in M$ 使 $\mathrm{cod}(f)=A$，则 $\mathrm{comp}(\mathbb{I}_A,f)=f$。

$C_3$: 若 $f,g,h\in M$，则

① $\mathrm{comp}(h,\mathrm{comp}(g,f))\downarrow$ 当且仅当 $\mathrm{comp}(\mathrm{comp}(h,g),f)\downarrow$。

② 若 $\mathrm{comp}(h,\mathrm{comp}(g,f))\downarrow$ 则 $\mathrm{comp}(h,\mathrm{comp}(g,f))=\mathrm{comp}(\mathrm{comp}(h,g),f)$。

则称五元偶 $\mathscr{C}=\langle O, M, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \mathrm{comp}\rangle$ 为**范畴**。

几点说明如下:

(1) 称图 $\langle O, M, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}\rangle$ 为 $\mathscr{C}$ 的**基图**，记为 $\boldsymbol{G}(\mathscr{C})$。

(2) 称 $O$ 为 $\mathscr{C}$ 的**对象类**，记为 $Ob\mathscr{C}$，其元素称为 $\mathscr{C}$ 的**对象**。

(3) 称 $M$ 为 $\mathscr{C}$ 的**态射类**，记为 $Mor\mathscr{C}$，其元素称为 $\mathscr{C}$ 的**态射**。

(4) 若 $A,B\in O$，则记 $\boldsymbol{G}(\mathscr{C})[A,B]=\mathscr{C}[A,B]$，并常简写为 $[A,B]$。

(5) 若 $f\in M$，则称 $\mathrm{dom}(f)$ 为 $f$ 的**论域**，$\mathrm{cod}(f)$ 为 $f$ 的**余论域**。

(6) 设 $f\in M$，若 $A=\mathrm{dom}(f)$ 且 $B=\mathrm{cod}(f)$，则称 $f$ 为一个从 $A$ 到 $B$ 的**态射**，记为 $f: A\to B$ 或 $A\xrightarrow{f} B$。

(7) 若 $f,g\in M$，使 $\mathrm{comp}(g,f)\downarrow$，则称 $\mathrm{comp}(g,f)$ 为 $g$ 与 $f$ 的**合成**，并简写为 $g\circ f$ 或 $gf$。

(8) 若 $A\in O$，则称由公理 $C_2$ 给出的态射 $\mathbb{I}_A$ 为**关于 $A$ 的幺态射**，简称**幺态射**。

(9) 因为 $M=\bigcup\limits_{A,B\in O}[A,B]$，且 dom 和 cod 又完全由所有的 $[A,B]$（$A,B\in O$）确定，所以范畴 $\mathscr{C}$ 可用如下方法给出:

① 给出对象类 $O$，即每个对象。

② 对任意的对象 $A$ 和 $B$，给出类 $[A,B]$。

③ 给出 comp。

**例 1.7** 显然，$\langle\varnothing,\varnothing,\varnothing,\varnothing,\varnothing\rangle$ 是一个范畴，称为**空范畴**。

**例 1.8** 设 $n$ 为正整数，$A=\{a_1,\cdots,a_n\}$ 且 $B=\{b_1,\cdots,b_n\}$，若令

$$\mathrm{dom}(b_i)=a_i=\mathrm{cod}(b_i),\quad 1\leqslant i\leqslant n$$

$$\mathrm{comp}(b_i,b_j)=\begin{cases} b_i, & i=j\\ \uparrow, & \text{否则}\end{cases}$$

则 $\langle A, B, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}, \mathrm{comp}\rangle$ 是一个范畴。