第 1 章　小变形弹塑性本构关系

本章研究率无关材料小变形情况。

1.1　经典弹塑性本构关系

小变形情况下，变形（或应变）张量 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 可分解为弹性变形张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ 与塑性变形张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 之和：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \tag{1.1}$$

1. 预备知识

以 $\boldsymbol{I}$ 表示四阶“等同张量”(identity tensor)，它的分量为

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) \tag{1.2}$$

式中 δ_{ik} 等为 Kronecker delta，它是二阶单位张量 $\boldsymbol{\delta}$（或记作 **1**）的分量。易证 I_{ijkl} 具有下列三重对称性，又称 Voigt 对称性：

$$I_{ijkl} = I_{jikl}, \quad I_{ijkl} = I_{ijlk}, \quad I_{ijkl} = I_{klij}$$

可证 $\boldsymbol{I}$ 具有以下性质。

性质 1　设 $\boldsymbol{a}$ 为任意二阶张量，则

$$\boldsymbol{I} : \boldsymbol{a} = \mathrm{sym}\, \boldsymbol{a} \tag{1.3}$$

即

$$I_{ijkl}a_{kl} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

因此，如 $\boldsymbol{a}$ 为任意二阶对称张量，则

$$\boldsymbol{I}:\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\,,\quad I_{ijkl}\ a_{kl}=a_{ij} \tag{1.3$'$}$$

性质 2

$$\boldsymbol{I}:\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I},\quad I_{ijrs}I_{rskl}=I_{ijkl}$$

以 $\overline{\boldsymbol{I}}$ 表示“特殊等同张量”（special identity tensor），其定义为

$$\overline{\boldsymbol{I}}=\boldsymbol{I}-\frac{1}{3}\boldsymbol{\delta\delta}\,,\quad \overline{I}_{ijkl}=I_{ijkl}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{1.4}$$

它具有以下性质。

性质 1　设 $\boldsymbol{a}$ 为任意二阶对称张量，则

$$\overline{\boldsymbol{I}}:\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'\,,\quad \overline{I}_{ijkl}a_{kl}=a'_{ij} \tag{1.5}$$

式中 $\boldsymbol{a}'$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的偏斜张量[1)]：

$$\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}J_1(\boldsymbol{a})\boldsymbol{\delta}\,,\quad a'_{ij}=a_{ij}-\frac{1}{3}a_{kk}\delta_{ij} \tag{1.6}$$

性质 2

$$\overline{\boldsymbol{I}}:\overline{\boldsymbol{I}}=\overline{\boldsymbol{I}}\,,\quad \overline{I}_{ijrs}\overline{I}_{rskl}=\overline{I}_{ijkl}$$

2. 弹性变形

弹性变形张量 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}$ 与应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 之间满足弹性关系：

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}=\mathscr{M}:\boldsymbol{\sigma}\,,\quad \varepsilon^{\mathrm{e}}_{ij}=\mathscr{M}_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{1.7}$$

式中 $\mathscr{M}$ 为弹性柔度张量。如果弹性与塑性之间不存在耦合，则 $\mathscr{M}$ 为常张量。

下面来推导各向同性材料的弹性柔度张量 $\mathscr{M}$。各向同性材料的弹性常数 G，K，E，ν 之间满足以下关系：

$$\frac{1}{2G}=\frac{1+\nu}{E},\qquad \frac{1}{9K}=\frac{1-2\nu}{3E}$$

其中 E 为杨氏模量，ν 为泊松比，G 为剪切模量，K 为体积模量。

在弹性变形与应力之间，它们的偏斜张量的比例常数为 $2G$，球形张量之间的比例常数为 $3K$。

---

1) 二阶张量加撇表示该二阶张量的偏斜张量（简称偏量）。以后仍沿用此记号。

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2G}\boldsymbol{\sigma}'+\frac{1}{3K}\frac{1}{3}J_1(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\delta},$$

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2G}\sigma_{ij}'+\frac{1}{9K}\sigma_{kk}\delta_{ij}=\left(\frac{1}{2G}\bar{I}_{ijkl}+\frac{1}{9K}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\sigma_{kl}$$

式中 $J_1(\boldsymbol{\sigma})$ 表示应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 的第一不变量。因此，与(1.7)对比可看出

$$\mathscr{M}=\frac{1}{2G}\bar{\boldsymbol{I}}+\frac{1}{9K}\boldsymbol{\delta\delta},\quad \mathscr{M}_{ijkl}=\frac{1}{2G}\bar{I}_{ijkl}+\frac{1}{9K}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{1.8}$$

将(1.4)的 $\bar{\boldsymbol{I}}$ 代入(1.8)，可得

$$\begin{gathered}\mathscr{M}=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)\boldsymbol{I}-\nu\boldsymbol{\delta\delta}\right],\\ \mathscr{M}_{ijkl}=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)I_{ijkl}-\nu\delta_{ij}\delta_{kl}\right]=\frac{1}{E}\left[\frac{1}{2}(1+\nu)\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)-\nu\delta_{ij}\delta_{kl}\right]\end{gathered} \tag{1.8$'$}$$

若用 Lamé 参数λ与μ表示，则(1.8)可写作

$$\begin{gathered}\mathscr{M}=\frac{1}{2\mu}\bar{\boldsymbol{I}}+\frac{1}{3(2\mu+3\lambda)}\boldsymbol{\delta\delta}=\frac{1}{2\mu}\boldsymbol{I}-\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\boldsymbol{\delta\delta},\\ \mathscr{M}_{ijkl}=\frac{1}{2\mu}\bar{I}_{ijkl}+\frac{1}{3(2\mu+3\lambda)}\delta_{ij}\delta_{kl}=\frac{1}{2\mu}I_{ijkl}-\frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)}\delta_{ij}\delta_{kl}\end{gathered} \tag{1.8$''$}$$

式中

$$\mu=G=\frac{E}{2(1+\nu)},\quad \lambda=K-\frac{2}{3}G=\frac{2\nu G}{1-2\nu}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

3. 塑性变形

屈服条件

$$f(\boldsymbol{\sigma},Y_1,\cdots,Y_n)=0 \tag{1.9}$$

式中 $Y_1,\cdots,Y_n$ 为硬化参量，它们在加载过程中随着时间 t 而变化，它们依赖于材料的当前状态，可以是标量，也可以是张量。作为硬化参量的例子，有累积塑性变形、累积塑性功、背应力等。

屈服条件(1.9)决定应力空间中的一曲面，称为后继屈服面（或当前屈服面）。在材料初始状态，$Y_1=\cdots=Y_n=0$，(1.9)相当于应力空间中的初始屈服面，见图 1-1。屈服面之内为弹性区。设应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 在当前屈服面上，当应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$

指向屈服面外时，属于加载情况，伴随有塑性变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$。当应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 指向屈服面之内，属于卸载情况，塑性变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 为零。

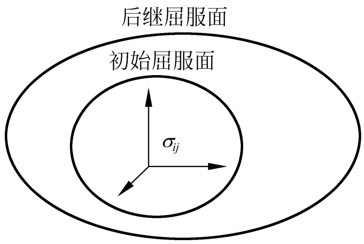


图 1-1　初始与后继屈服面

在经典塑性理论中，假定“正交法则”，即塑性变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 沿着屈服面的外向法线方向。由 Drucker 假设，或 Ilyushin 假设，或最大塑性功率原理（见节 1.6）均可论证这一正交法则。按正交法则 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} // \partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$。不失广泛性，可设 $\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 沿屈服面的外向法线[1)]。故可记[2)]

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\lambda\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}},\quad \text{即}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{\mathrm{p}}=\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}},\quad \lambda\geqslant 0 \tag{1.10}$$

式中 λ 称为塑性流动因子。由于塑性变形保持体积不变，

$$\mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\dot{\varepsilon}_{ii}^{\mathrm{p}}=0 \tag{1.11}$$

因此 $\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 为一偏斜张量。定义沿屈服面外法线的单位张量

$$\boldsymbol{n}=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\Bigg/\left|\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right| \tag{1.12}$$

式中

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right|=\sqrt{\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}}=\sqrt{\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}} \tag{1.13}$$

故 $\boldsymbol{n}$ 为一单位偏斜张量

$$\boldsymbol{n}:\boldsymbol{n}=1 \tag{1.14}$$

1) 在节 1.1 至 1.3 中假设 $\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$ 存在，即在应力空间中屈服面为光滑曲面。

2) 有的文献把此处的 λ 记为 $\dot{\lambda}$，因此（1.10）乘以 dt 后，可以写成 $\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\mathrm{d}\lambda\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$，$\mathrm{d}\lambda\geqslant 0$。

而(1.10)可写作

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\lambda\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right|\boldsymbol{n} \tag{1.10$'$}$$

因为塑性变形保持体积不变，故 $\boldsymbol{n}$ 为偏量。

作为塑性变形的度量，引进“累积塑性变形” $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ ，首先定义等效塑性变形率。设材料为各向同性，定义等效塑性变形率为

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}\,,\quad 即\quad \mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} \tag{1.15}$$

$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 恒为正。在沿 x_1 方向的单向拉伸或单向压缩情况下， $\dot{\varepsilon}_{22}^{\mathrm{p}}=\dot{\varepsilon}_{33}^{\mathrm{p}}=-\dfrac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{p}}$ ， $\dot{\varepsilon}_{12}^{\mathrm{p}}=\dot{\varepsilon}_{23}^{\mathrm{p}}=\dot{\varepsilon}_{31}^{\mathrm{p}}=0$ ，由(1.15)

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\left|\dot{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{p}}\right|$$

利用(1.15)，可将 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 写为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\,\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{n} \tag{1.16}$$

比较(1.10)′与(1.16)，可知

$$\lambda=\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}{\left|\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}\right|} \tag{1.17}$$

(1.17)表示塑性流动因子 λ 与等效塑性变形率 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 的关系。(1.15) 对时间 t 积分定义为累积塑性变形，

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\int_{t_0}^{t}\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}}\,\mathrm{d}t=\int_{\text{history}}\sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{p}}} \tag{1.18}$$

式中 t_0 表示开始出现塑性变形的时刻。在单向拉伸或压缩时

$$\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\int_{t_0}^{t}\left|\dot{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{p}}\right|\mathrm{d}t$$

附带指出，在率无关的塑性本构关系中， t 不一定取牛顿时间，它可以是任意的随时间递增的参数（有时称为“类时间参数”，time-like parameter），例如也可以取 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 为“时间”。率无关材料的塑性变形过程就好像一部电影胶片，无论快速或慢速放映，这个过程是不变的。

设给定应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ （或应力增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}\,\mathrm{d}t$ ），需求塑性变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 。为此必须确定(1.10)或(1.10)′式中的 λ ，或者(1.16)中的 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ (λ 与 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 之间存在关

系(1.17))。可以区分两种情形：

(1) 理想弹塑性材料。屈服面在应力空间中为固定不变曲面，此时屈服条件(1.9)成为

$$f\left(\boldsymbol{\sigma}\right)=0 \tag{1.9$'$}$$

(1.9)′中不含有随着时间而变化的参数。设$\boldsymbol{\sigma}$在屈服面上，应力增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$必须服从条件

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\leqslant 0$$

当给定的$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$使上式的$\mathrm{d}f<0$时，属于弹性卸载，$\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t=0$，因此$\lambda=0$。但当给定的$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$使$\mathrm{d}f=0$时，应力$\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$仍保持在屈服面上，可以有塑性变形增量$\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}=\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}\mathrm{d}t$产生。但当给定应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$（或应力增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}t$）时，由(1.10)式决定$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$所需要的塑性流动因子$\lambda$不可能由塑性本构关系确定[1)]。但是在具体的物理问题（例如在内压作用下的厚壁筒）中，将本构关系与平衡方程及几何方程联立在一起，可以确定应力与应变场。这时除平衡方程之外，对应力增加了一个约束方程(1.9)′，但同时也增加了一个未知场函数λ。

(2) 硬化材料。λ可由“一致性条件”(consistency condition)定出。

4. 一致性条件

为了确定塑性流动因子λ，必须利用“一致性条件”。设在时刻t应力空间中表示材料应力$\boldsymbol{\sigma}$的点P处于后继屈服面(1.9)上(图 1-2)。在时刻$t+\mathrm{d}t$，应力为$\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$，在应力空间中的应力点为$P'$，后继屈服面成为

$$f(\boldsymbol{\sigma}+\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma},\ Y_1+\mathrm{d}Y_1,\ \cdots,\ Y_n+\mathrm{d}Y_n)=0 \tag{1.19}$$

式中$\mathrm{d}Y_1,\ \cdots,\ \mathrm{d}Y_n$为硬化参量$Y_1,\ \cdots,\ Y_n$在时间$\mathrm{d}t$内的增量。取(1.19)与(1.9)式之差，得

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}:\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}+\sum_i\frac{\partial f}{\partial Y_i}\mathrm{d}Y_i=0 \tag{1.20}$$

如Y_i为张量，则$\partial f/\partial Y_i$与$\mathrm{d}Y_i$应为张量的缩并乘。(1.20)式称为“一致性条件”。它的物理意义表示：在加载（非卸载）过程中，材料的应力点始终处于屈服面上。(1.20)中第一项$(\partial f/\partial \boldsymbol{\sigma}):\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$表示$f$由于$\boldsymbol{\sigma}$的变化$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$所引起的增量，可记为

---

1) 理想弹塑性材料，当给定变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$(或变形增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathrm{d}t$)时，可以由逆本构关系(见本节(1.31)式)求应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$(或应力增量$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\dot{\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}t$)。

$$\mathrm{d}f\big|_Y = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\,,\quad \text{即}\quad \frac{\mathrm{d}f\big|_Y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

以区别于(1.20)的 $\mathrm{d}f$，下标 Y 表示假设保持 $Y_1, \cdots, Y_n$ 不变。

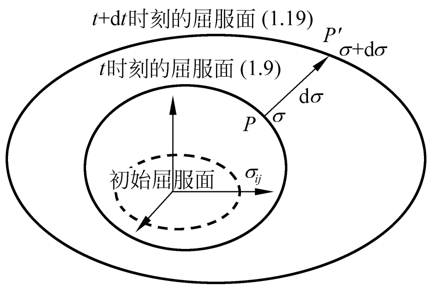


图 1-2　后继屈服面的变化

设 $Y_i\ (i=1,\cdots,n)$ 以下列微分方程（称为演化方程）的形式依赖于累积塑性变形 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$：

$$\mathrm{d}Y_i = Z_i(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}},\cdots)\mathrm{d}\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}} \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1.21}$$

式中 Z_i 除了依赖于 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 之外，还可能依赖于其他状态变量，如应力张量（或变形张量）、硬化参量 $Y_1, \cdots, Y_n$ 等[1)]。(1.21)式规定屈服曲面 $f(\boldsymbol{\sigma}, Y_1, \cdots, Y_n)$ 如何随着塑性变形过程而变化。将(1.21)代入(1.20)后，除以 $\mathrm{d}t$，可得

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = -\frac{1}{\displaystyle\sum_i \frac{\partial f}{\partial Y_i} Z_i} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.20$'$}$$

将(1.20)′代入(1.17)，可得

$$\lambda = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.22}$$

式中

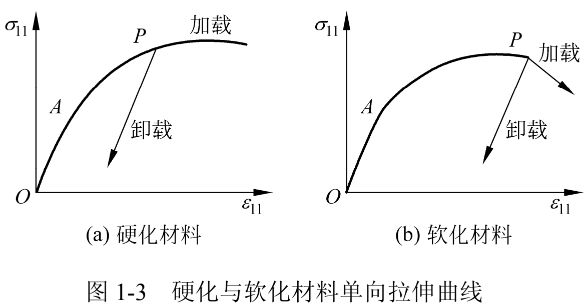
$$\frac{1}{h} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\left|\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right| \displaystyle\sum_i \frac{\partial f}{\partial Y_i} Z_i} \tag{1.23}$$

1) (1.21)规定 Y_i 的率 $\dot{Y}_i$ 与累积塑性变形 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 的率 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 之间的关系，$\dot{Y}_i = Z_i\left(\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}},\ldots\right)\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$，但 Y_i 一般不能表示成 $\bar{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$ 的函数。

将(1.22)之λ代入(1.10)，或直接将(1.20)′的$\dot{\varepsilon}^{\mathrm{p}}$代入(1.16)，可得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.24}$$

$h>0$的情况相当于硬化材料，因为由(1.24)当应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$指向屈服面之外$\left(\dfrac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\dot{\boldsymbol{\sigma}}>0\right)$时，塑性变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$指向屈服面的外向法线（$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$与$\partial f/\partial\boldsymbol{\sigma}$同向）。反之，对于软化材料$h<0$，按(1.24)应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$则不可能指向屈服面之外，因为否则$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$指向屈服面的内向法线，违背正交法则（$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$恒指向屈服面的外向法线）。在$h<0$的情况下，当应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$指向屈服面之内时，按(1.24)可以算出$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$指向屈服面的外向法线。但是根据屈服面的定义，当应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$指向屈服面之内时，属于卸载情况，应有$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}=0$。这一相互矛盾的结果说明采用应力$\boldsymbol{\sigma}$为自变量，变形$\boldsymbol{\varepsilon}$为应变量，由给定的应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$来求解应变率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$的提法((1.24)式) 不适用于软化材料。现以单向拉伸为例加以说明。图 1-3(a)、(b)分别表示硬化材料与软化材料的单向拉伸曲线。A点表示初始屈服。对于硬化材料 (图 1-3(a))，在P点可根据$\dot{\sigma}_{11}$的正或负来判断属于加载或卸载。但对于软化材料 (图 1-3(b))，在P点应力只能减小而不能增大，$\dot{\sigma}_{11}<0$。在应力空间中讨论问题，给定$\dot{\sigma}_{11}<0$，无法判定$\dot{\varepsilon}_{11}>0$（继续产生新的塑性变形，$\dot{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{p}}>0$，也称为加载）还是$\dot{\varepsilon}_{11}<0$（卸载，$\dot{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{p}}=0$）。因此对于软化材料，必须在应变空间中讨论问题，即给定$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，求解$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$。



(a) 硬化材料　　(b) 软化材料

图 1-3　硬化与软化材料单向拉伸曲线

为书写简便，记

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}},\quad \mu_{ij}=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \tag{1.25}$$

则(1.22)成为

$$\lambda = \frac{1}{h}\boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \geqslant 0 \tag{1.26}$$

(1.10)式(或(1.24)式)成为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{h}\boldsymbol{\mu\mu} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad 当 \quad \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \geqslant 0$$

引进一加载参数α，在加载情况下$\alpha = 1$，而在卸载情况下$\alpha = 0$，则可写出塑性应变率的统一表示：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{\alpha}{h}\boldsymbol{\mu\mu} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.27}$$

式中

$$\alpha = \begin{cases} 1, & 当\boldsymbol{\sigma}在应力空间中\boldsymbol{\sigma}在屈服面上, 且\boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} > 0 \\ 0, & 当\boldsymbol{\sigma}在屈服面内或\boldsymbol{\sigma}在屈服面上, 且\boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.28}$$

把弹性变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}}$与塑性变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$迭加，得到变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$与应力率$\dot{\boldsymbol{\sigma}}$之间的关系，称为本构关系：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathscr{M} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\alpha}{h}\boldsymbol{\mu\mu} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.29}$$

式中$\boldsymbol{M}$表示弹塑性柔度张量：

$$\boldsymbol{M} = \mathscr{M} + \frac{\alpha}{h}\boldsymbol{\mu\mu} \tag{1.30}$$

显然，$\boldsymbol{M}$具有 Voigt 对称性。

本构关系也可用 Heaviside 阶梯函数表示，其定义为

$$H(L) = \begin{cases} 1, & 当L > 0 \\ 0, & 当L \leqslant 0 \end{cases}$$

再引进记号〈 〉：

$$\langle L \rangle = LH(L) = \begin{cases} L, & 当L > 0 \\ 0, & 当L \leqslant 0 \end{cases}$$

则(1.27)塑性变形率$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \frac{1}{h}\boldsymbol{\mu}\langle \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \tag{1.27$'$}$$

而本构关系(1.29)则可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathscr{M} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{h}\boldsymbol{\mu}\langle \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \tag{1.29$'$}$$

以下还引进“塑性模量”E_{p}。利用(1.12)，(1.25)，$\boldsymbol{\mu}$ 可表示为

$$\boldsymbol{\mu} = \left| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right| \boldsymbol{n}$$

因此(1.27)可写作

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \alpha \frac{3}{2E_{\mathrm{p}}} \boldsymbol{nn} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.27$''$}$$

式中的 E_{p} 定义为

$$\frac{1}{E_{\mathrm{p}}} = \frac{2}{3}\frac{1}{h}\left| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|^2 \tag{1.23$'$}$$

将(1.23)中 $1/h$ 代入，得

$$\frac{1}{E_{\mathrm{p}}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\left| \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|}{\sum\limits_i \dfrac{\partial f}{\partial Y_i} Z_i} \tag{1.23$''$}$$

将(1.27)″代入(1.15)，可将累积塑性变形率 $\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}}$ 表示为

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{p}} = \alpha \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{E_{\mathrm{p}}} \boldsymbol{n} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.27$'''$}$$

在单向拉伸情况下，设 x_1 为拉伸方向。设材料在初始状态为各向同性，经过沿 x_1 方向的单向拉伸以后具有对 x_1 轴的轴对称性。因此可以由(1.14)定出

$$n_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad n_{22} = n_{33} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad n_{ij} = 0, \quad \text{当 } i \neq j$$

(1.27)″给出

$$\dot{\varepsilon}_{11}^{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{E_{\mathrm{p}}} n_{11} \dot{\sigma}_{11} = \frac{1}{E_{\mathrm{p}}} \dot{\sigma}_{11}, \quad E_{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{d}\sigma_{11}}{\mathrm{d}\varepsilon_{11}^{\mathrm{p}}}$$

所以在单向拉伸情况下，E_{p} 为拉伸方向应力增量与塑性变形分量增量之比值，这正是 E_{p} 称为塑性模量的原因。

弹塑性本构关系(1.29)是变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 通过应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 的表示式。也可以求它的逆，即应力率 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ 通过变形率 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的表示式，称为逆本构关系：